Introducción a las EDP

12 de Abril de 2018

A

Ejercicio 1 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema:

$$yu_x(x,y) + 4xu_y(x,y) = xy, \quad u(x,\varphi(x)) = 6x^4,$$

en los casos $\varphi(x) = 0$ y $\varphi(x) = 2x$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$4u_{xx}(x,y) + 4u_{xy}(x,y) + u_{yy}(x,y) + 2u_x(x,y) + u_y(x,y) + u(x,y) = x + 2y + 6.$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 1 - 8\cos(7x), & x \in (0,\pi), \\ u_t(x,0) = \sin(4x), & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar justificadamente la suma de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 49},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = e^{7x}$ en $[-\pi,\pi]$. ¿Qué información se obtiene en este caso al aplicar la identidad de Parseval?

Ejercicio 5 [1.2 puntos] Determinar razonadamente la solución general del siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + 9u_{yy}(x,y) = 0, & x \in (0,2),\ y \in (0,1), \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, & x \in (0,2), \\ u(0,y) = f(y),\ u(2,y) = 0, & y \in (0,1), \end{cases}$$

donde se supone que la función f es conocida. Resolverlo cuando $f(y) = y$.

Ejercicio 6 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x \in (0,\pi),\ y \in (0,1),\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0, & y \in (0,1),\ t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0, & x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(x,y,0) = (\pi - x)y, & x \in (0,\pi),\ y \in (0,1). \end{cases}$$

Indicación: No es necesario volver a demostrar las fórmulas o los resultados vistos en clase. El resto de los pasos hay que justificarlos convenientemente.

Tiempo: Dos horas y media

Introducción a las EDP
EDP – Series de Fourier
15 de Junio de 2018
$\boxed{\text{A}}$

Ejercicio 1 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema

$$u_x(x,y) + (y-3)u_y(x,y) + 2u(x,y) = 6x - 5, \quad u(\alpha(y), y) = y^2 + 7,$$

en los casos *a)* $\alpha(y) = 0$, *b)* $\alpha(y) = 1$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, <u>haciendo todos los cambios en detalle</u> y resolverla (si es posible):

$$3u_{xy}(x,y) + 2u_{yy}(x,y) + 3u_x(x,y) + 2u_y(x,y) = e^x + 4.$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x \in (0,5),\ y \in (0,10), \\ u(0,y) = 0, u(5,y) = 0, & y \in (0,10), \\ u(x,0) = x(5-x),\ u(x,10) = \sin(\pi x), & x \in (0,5). \end{cases}$$

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar <u>justificadamente</u> el valor de las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{81n^2 - 1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(81n^2-1)^2},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \cos(x/9)$ en $[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 5 [1.2 puntos] Determinar razonadamente la solución general del siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - 3u(x,t), & x \in (0,9),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(9,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

donde se supone que la función f es conocida. Resolverlo cuando $f(x) = x$.

Ejercicio 6 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x \in (0,5),\ y \in (0,9),\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(5,y,t) = 0, & y \in (0,9),\ t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,9,t) = 0, & x \in (0,5),\ t > 0, \\ u(x,y,0) = y\sin(6\pi x), & x \in (0,5),\ y \in (0,9). \end{cases}$$

<u>Tiempo: Dos horas y media.</u> En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo cuando sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

15 de Junio de 2018

$\boxed{\text{A}}$

Ejercicio 1 [1.2 + 1.2 puntos] Determinar razonadamente los siguientes valores:

$$a) \quad \int_0^{\infty} e^{-\sqrt[7]{x}} dx. \qquad\qquad b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(3x) e^{-x^2} dx.$$

Ejercicio 2 [1.8 puntos] Determinar la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{5}{1+(x-4)^2} + \begin{cases} \sin(x), & \text{si } x \in [-\pi, \pi], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicio 3 [1.6 puntos] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{s^2}{s^4 + 26s^2 + 25}.$$

Ejercicio 4 [1.6 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & \text{si } x^2+y^2 \le 1, \ t > 0, \\ u(x,y,t) = 0, & \text{si } x^2+y^2 = 1, \ t > 0, \\ u(x,y,0) = 7(x^2+y^2-1), & \text{si } x^2+y^2 < 1, \\ u_t(x,y,0) = 4(1-x^2-y^2), & \text{si } x^2+y^2 < 1. \end{cases}$$

Ejercicio 5 [1.2 puntos] Sabiendo que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, Q_n es un polinomio de grado n solución de la EDO

$$(1-t^2)x''(t) + (1-5t)x'(t) + n(n+4)x(t) = 0,$$

determinar justificadamente la condición de ortogonalidad que verifica la familia $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$.

Ejercicio 6 [1.4 puntos] Dada la función

$$f(t) = \begin{cases} 2t+1, & \text{si } t \in [0,8), \\ e^t, & \text{si } t \in [8, +\infty), \end{cases}$$

se pide determinar justificadamente la transformada de Laplace de la derivada de f en el sentido de las distribuciones (haciendo todos los cálculos en detalle) y su relación con la transformada de Laplace de f.

Tiempo: Dos horas y cuarto. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo cuando sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo. Todas las respuestas deben estar justificadas.

Introducción a las EDP
EDP – Series de Fourier
5 de Septiembre de 2018

Ejercicio 1 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema

$$xu_x(x,y) + 2yu_y(x,y) - 2u(x,y) = 6, \quad u(x,\alpha(x)) = x^2 + 8, \text{ si } x > 0, y > 0,$$

en los casos $a)$ $\alpha(x) = x^2$, $b)$ $\alpha(x) = 1$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$2u_{xx}(x,y) - 5u_{xy}(x,y) - 3u_{yy}(x,y) + 5u_x(x,y) - u_y(x,y) + 2u(x,y) = 2x + 1 + e^y.$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

en los siguientes casos:

$$a) \quad f(x) = 9 + 2\cos(5\pi x) - 7\cos(12\pi x), \qquad b) \quad f(x) = 6 + 5\cos(3x).$$

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar justificadamente el valor de las sumas

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 - 100} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{((2k+1)^2 - 100)^2},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \sin(10x)$ en $(0,\pi)$.

Ejercicio 5 [1.3 puntos] Determinar razonadamente la solución general del siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) - 6u(x,y) = 0, & x \in (0,3),\ y \in (0,1), \\ u(0,y) = 0, u(3,y) = 0, & y \in (0,1), \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,1) = 0, & x \in (0,3). \end{cases}$$

donde se supone que la función f es conocida. Resolverlo cuando $f(x) = x$.

Ejercicio 6 [1.3 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x \in (0,1),\ y \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0, & y \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0, & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(x,y,0) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,\pi), \\ u_t(x,y,0) = (x-1)(y-\pi), & x \in (0,1),\ y \in (0,\pi). \end{cases}$$

Tiempo: Dos horas y media. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo cuando sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

5 de Septiembre de 2018

Ejercicio 1 [1.4 + 1 puntos] Determinar razonadamente los siguientes valores:

$$a) \quad \int_0^{+\infty} x^4 e^{-5x^2} dx. \qquad\qquad b) \quad \int_{-5}^{5} P_3(t)P_4(t)dt,$$

donde $P_n(t)$ denota el polinomio de Legendre de grado n.

Ejercicio 2 [1.8 puntos] Determinar la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \sin(6x)e^{-(x+8)^2} + \begin{cases} 4 - x^2, & \text{si } x \in [-2, 2], \\ \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicio 3 [1.6 puntos] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2 - 10s + 41}.$$

Ejercicio 4 [1.6 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_t(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t), & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1, \ t > 0, \\ u(x, y, t) = 0, & \text{si } x^2 + y^2 = 1, \ t > 0, \\ u(x, y, 0) = 7 - 5(x^2 + y^2), & \text{si } x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

Ejercicio 5 [1.4 puntos] Demostrar que se cumple la siguiente identidad para cada $\alpha \geq 0$ y $t > 0$:

$$(t^{-\alpha} J_\alpha(t))' = -t^{-\alpha} J_{\alpha+1}(t),$$

donde $J_\alpha(t)$ denota la función de Bessel de primera clase y orden α.

Ejercicio 6 [1.2 puntos] Calcular justificadamente las derivadas primera y segunda (en el sentido de las distribuciones) de la función

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - 5, & \text{si } t \in (-2, 0), \\ 3t + 1, & \text{si } t \in (0, 1), \\ (t+1)^2, & \text{si } t \in (1, 2). \end{cases}$$

Tiempo: Dos horas y cuarto. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo cuando sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo. Todas las respuestas deben estar justificadas.