Introducción a las EDP
11 de Abril de 2017

Ejercicio 1 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema:

$$u_x(x,y) + y u_y(x,y) - 3u(x,y) = e^{2x} + 5, \quad u(x,\varphi(x)) = 0,$$

en los siguientes casos: $\varphi(x) = 1$ y $\varphi(x) = exp(1)$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) + 8u_{xy}(x,y) + 7u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) + 7u_y(x,y) = 2e^x + 168e^{3y} - 1.$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,5),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(5,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,5). \end{cases}$$

en los casos $f(x) = x$ y $f(x) = 6\sin(\pi x/5) - 2\sin(4\pi x/5) + 9\sin(\pi x)$.

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar justificadamente las sumas de la series numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2 + 1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2 + 1},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \cosh(x/2)$ en $[-2,2]$.

Ejercicio 5 [1.2 puntos] Determinar razonadamente la solución general del siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,4), \\ u(0,y) = u_x(1,y) = 0, & y \in (0,4), \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,4) = g(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

donde se supone que las funciones f y g son conocidas.

Ejercicio 6 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x \in (0,3),\ y \in (0,2),\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(3,y,t) = 0, & y \in (0,2),\ t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,2,t) = 0, & x \in (0,3),\ t > 0, \\ u(x,y,0) = x(y-2), & x \in (0,3),\ y \in (0,2), \\ u_t(x,y,0) = y^2, & x \in (0,3),\ y \in (0,2). \end{cases}$$

Indicación: No es necesario volver a demostrar las fórmulas o los resultados vistos en clase. El resto de los pasos hay que justificarlos convenientemente.

Tiempo: Dos horas y media

Introducción a las EDP
EDP – Series de Fourier
13 de Junio de 2017

Ejercicio 1 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema

$$(x+1)u_x(x,y) - u_y(x,y) + xu(x,y) = x^2 + 4x + 1, \quad u(\alpha(y), y) = e^{-y},$$

en los casos $a)$ $\alpha(y) = e^{-y} - 1$, $b)$ $\alpha(y) = 0$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) + 4u_{xy}(x,y) + 3u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) - u_y(x,y) - 2u(x,y) = 3y + 2e^x - 5x.$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x \in (0,\pi),\ y \in (0,1), \\ u_x(0,y) = 0, u_x(\pi,y) = 0, & y \in (0,1), \\ u(x,0) = x,\ u(x,1) = f(x), & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

en los casos $a)$ $f(x) = 4 - 5x$ y $b)$ $f(x) = 3 + 2x$.

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar justificadamente el valor de las sumas

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{\pi^2(2k+1)^2 - 1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\pi^2 n^2 - 1)^2},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \sin(x)$ en $[-1,1]$.

Ejercicio 5 [1.2 puntos] Determinar razonadamente la solución general del siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + 36u(x,t), & x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

donde se supone que las funciones f y g son conocidas.

Ejercicio 6 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x \in (0,\pi),\ y \in (0,2\pi),\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0, & y \in (0,2\pi),\ t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,2\pi,t) = 0, & x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(x,y,0) = f(x,y), & x \in (0,\pi),\ y \in (0,2\pi), \end{cases}$$

en los casos $f(x,y) = (x-\pi)(y-2\pi)$ y $f(x,y) = \sin(8x)$.

Tiempo: Dos horas y media. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo cuando sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

13 de Junio de 2017

Ejercicio 1 [1.2 + 1 puntos] Determinar razonadamente los siguientes valores:

$$a)\quad \left(-\frac{7}{2}\right)! \qquad\qquad b)\quad \int_0^\infty \sqrt[4]{x}\,e^{-\sqrt{x}}dx$$

Ejercicio 2 [1.2 puntos] Sabiendo que la Transformada de Fourier de cierta función f real, impar y verificando $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < +\infty$ está entre las siguientes, determinarla razonadamente:

$$a)\ F(\xi) = \frac{\pi}{2}\left(i\cosh|1-\xi| - \cosh|1+\xi| - i\sinh|1-\xi| + \sinh|1+\xi|\right)$$

$$b)\ F(\xi) = \frac{\pi i}{2}\left(\cosh|1-\xi| - \cosh|1+\xi| + \sinh|1-\xi| + \sinh|1+\xi|\right)$$

$$c)\ F(\xi) = \frac{\pi}{2}\left(i\cosh|1-\xi| - i\cosh|1+\xi| - i\sinh|1-\xi| + i\sinh|1+\xi|\right)$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Determinar la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \frac{e^t}{\sqrt{t}} + \begin{cases} t+1 & \text{si } t\in[0,3], \\ 0 & \text{si } t>3. \end{cases}$$

Ejercicio 4 [1.3 puntos] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{3s-12}{s^3-s^2+8s-8}.$$

Ejercicio 5 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & \text{si } x^2+y^2\le 1,\ t>0, \\ u(x,y,t) = 0, & \text{si } x^2+y^2=1,\ t>0, \\ u(x,y,0) = (x^2+y^2-1)^2, & \text{si } x^2+y^2<1. \end{cases}$$

Ejercicio 6 [1.3 puntos] Demostrar que la siguiente propiedad para la Transf. de Fourier

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{F}(f)\right)(\xi) = 2\pi f(-\xi),$$

se cumple para cualquier función f continua en $\mathbb{R}$, con f' continua a trozos en $\mathbb{R}$ y que verifique $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < +\infty$. ¿Qué propiedad tendríamos si f es continua, salvo en el origen, donde tiene una discontinuidad de salto finito?.

Ejercicio 7 [1 punto] Calcular las derivadas primera y segunda (en el sentido de las distribuciones) de la función $x(t) = |t^2-2|$ en el intervalo $[-3,3]$, haciendo los cálculos en detalle.

Tiempo: Dos horas y cuarto. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo cuando sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo. Todas las respuestas deben estar justificadas.

Introducción a las EDP
EDP – Series de Fourier
5 de Septiembre de 2017

Ejercicio 1 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema:

$$u_x(x,y) + \sin(x) u_y(x,y) + 4u(x,y) = x + 5, \quad u(\alpha(y), y) = y - 2,$$

en los siguientes casos: *a)* $\alpha(y) = 0$, *b)* $\alpha(y) = \pi$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, <u>haciendo todos los cambios en detalle</u> y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) + u_{xy}(x,y) - 2u_{yy}(x,y) + 2u_x(x,y) + u_y(x,y) + u(x,y) = 6\cosh(y) + x + 7.$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,3), \\ u(0,y) = 0, u(1,y) = 0, & y \in (0,3), \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,3) = 0, & x \in (0,1), \end{cases}$$

en los casos *a)* $f(x) = 4x$ y *b)* $f(x) = \sin(2\pi x) - 1$.

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar <u>justificadamente</u> el valor de las siguientes sumas

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(k+1)k} \quad \text{y} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2-1)^2},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = x\cos(x)$ en $[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 5 [1.2 puntos] Determinar (si es posible) una EDP lineal de primer orden que admita como soluciones (simultáneamente) a $u_1(x,y) = e^{(y^3-2x)^6} + y^2$, $u_2(x,y) = \sqrt[8]{20x - 10y^3} + y^2$ y $u_3(x,y) = \sin\left(x - \frac{y^3}{2}\right) + y^2$.

Ejercicio 6 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x \in (0,6),\ y \in (0,7),\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(6,y,t) = 0, & y \in (0,7),\ t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,7,t) = 0, & x \in (0,6),\ t > 0, \\ u(x,y,0) = f(x,y), & x \in (0,6),\ y \in (0,7), \end{cases}$$

en los casos $f(x,y) = 5y + 2$ y $f(x,y) = \sin(3x)\sin(2\pi y)$.

<u>Tiempo: Dos horas y cuarto.</u> En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

5 de Septiembre de 2017

Ejercicio 1 [1.2 + 1.2 puntos] Determinar <u>razonadamente</u> los siguientes valores:

$$a)\quad \int_0^\infty \exp(-5x)\,(\cos(3x) - \sin(6x))\,dx \qquad\qquad b)\quad \int_0^2 \sqrt{(4-x^2)^3}\,dx$$

Ejercicio 2 [1.5 puntos] Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \cos(x)e^{-3|x|} + \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,2), \\ e^x & \text{si } x \in [2,4), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicio 3 [1.4 puntos] Suponiendo que $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ son los ceros positivos de $J_1(t)$, desarrollar en el intervalo $[0,1]$ la función $f(t) = t^3 + 9t$ en serie de Fourier-Bessel del tipo $\sum_{k=1}^\infty \gamma_k J_1(\mu_k t)$. Determinar <u>razonadamente</u> la suma de la serie anterior en los puntos $t = 0, t = 0.3$ y $t = 1$.

Ejercicio 4 [1.4 puntos] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{4-5s}{s^3 - 3s^2 + 4}.$$

Ejercicio 5 [1.3 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & \text{si } x^2+y^2 \le 1,\ t>0, \\ u(x,y,t) = 0, & \text{si } x^2+y^2 = 1,\ t>0, \\ u(x,y,0) = 0, & \text{si } x^2+y^2 < 1, \\ u_t(x,y,0) = 16, & \text{si } x^2+y^2 < 1. \end{cases}$$

Ejercicio 6 [1 punto] Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ real y par, solamente una de las siguientes expresiones define su transformada de Fourier. Determinar <u>razonadamente</u> cuál es:

$$a)\ \mathcal{F}(f)(\xi) = e^{|\xi|}(\cos(|\xi|) + \sin(|\xi|)) \qquad b)\ \mathcal{F}(f)(\xi) = e^{-|\xi|}(\cos(\xi) + \sin(|\xi|))$$

$$c)\ \mathcal{F}(f)(\xi) = e^{-|\xi|}(\cos(|\xi|) + \sin(\xi))$$

Ejercicio 7 [1 punto] Calcular (<u>haciendo los cálculos en detalle</u>) la derivada en el sentido de las distribuciones de la función

$$x(t) = \begin{cases} 5-3t & \text{si } t \in [0,1), \\ 2 & \text{si } t \in [1,3], \\ t^2 & \text{si } t \in (3,16]. \end{cases}$$

<u>Tiempo: Dos horas.</u> En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.