Introducción a las EDP $\boxed{\text{A}}$

21 de Abril de 2016

Ejercicio 1 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema, cuando $x > 0$,

$$2xu_x(x,y) + yu_y(x,y) + 3u(x,y) = 15x + 20y + 3, \quad u(x,\varphi(x)) = 3x + 1,$$

en los siguientes casos: $\varphi(x) = x$ y $\varphi(x) = 1$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, <u>haciendo todos los cambios en detalle</u> y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) + 8u_{xy}(x,y) + 16u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) + 4u_y(x,y) + 3u(x,y) = 20e^x + 9x - 3y + 5.$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,2),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin(3\pi x),\ u_t(x,0) = f(x), & x \in (0,2). \end{cases}$$

en los casos $f(x) = \cos(5\pi x)$ y $f(x) = 4x$.

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar <u>justificadamente</u> las sumas de la series numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n^2 - 1)^2},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \cos(x/3)$ en $[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 5 [1.2 puntos] Determinar razonadamente la solución general del siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) + 4u(x,y) = 0, & x \in (0,\pi),\ y \in (0,5), \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0, & y \in (0,5), \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,5) = 0, & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

Ejercicio 6 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x \in (0,4),\ y \in (0,9),\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(4,y,t) = 0, \quad y \in (0,9),\ t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,9,t) = 0, \quad x \in (0,4),\ t > 0, \\ u(x,y,0) = f(x,y), \quad x \in (0,4),\ y \in (0,9). \end{cases}$$

en los casos $f(x,y) = 2\sin(5\pi x)$ y $f(x,y) = xy^2$.

<u>**Indicación:**</u> No es necesario volver a demostrar las fórmulas o los resultados vistos en clase. El resto de los pasos hay que justificarlos convenientemente.

<u>**Tiempo: Dos horas y media**</u>

Introducción a las EDP $\boxed{\text{A}}$

EDP – Series de Fourier

10 de Junio de 2016

Ejercicio 1 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema para $x > 0$:

$$xu_x(x,y) + u_y(x,y) + 3u(x,y) = 3y + 7, \quad u(\alpha(y), y) = \beta(y),$$

en los siguientes casos:

$$a) \quad \alpha(y) = e^y, \quad \beta(y) = y + 2, \qquad\qquad b) \quad \alpha(y) = 1, \quad \beta(y) = y + 1.$$

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$3u_{xx}(x,y) + u_{xy}(x,y) - 2u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) + u_y(x,y) = 4 - y.$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x \in (0,3),\ y \in (0,4), \\ u_x(0,y) = 0, u_x(3,y) = 0, & y \in (0,4), \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,4) = 0, & x \in (0,3), \end{cases}$$

en los casos $a)$ $f(x) = 9$ y $b)$ $f(x) = x + 2$.

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar justificadamente el valor de las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2+1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2+1)^2},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \cosh(x/2)$ en $[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 5 [1.2 puntos] Dos estudiantes de la UC resuelven una EDP. El primero obtiene que la solución general viene dada por $u(x,y) = K_1(y - x^2 - x)e^{2x}$, mientras que el segundo obtiene que $u(x,y) = K_2(y - x^2 - x)e^{2(y-x^2)}$, donde K_1 y K_2 son funciones arbitrarias. Explicar razonadamente si ambas soluciones coinciden o no. En caso afirmativo, determinar la EDP.

Ejercicio 6 [1.4 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x \in (0,1),\ y \in (0,2),\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0, & y \in (0,2),\ t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,2,t) = 0, & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(x,y,0) = f(x,y), & x \in (0,1),\ y \in (0,2), \end{cases}$$

en los casos $f(x,y) = x(1-x)\sin(6\pi y)$ y $f(x,y) = \sin(6\pi x)\sin(18\pi y)$.

Tiempo: Dos horas y cuarto. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP $\boxed{\text{A}}$

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

10 de Junio de 2016

Ejercicio 1 [1 + 1.2 puntos] Determinar razonadamente el valor de las siguientes integrales:

$$a) \quad \int_0^\infty t^7 e^{-4t^2} dt \qquad\qquad b) \quad \int_0^4 \frac{t^2}{\sqrt{4-t}} dt$$

Ejercicio 2 [1.5 puntos] Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = xe^{-(x-3)^2} + \begin{cases} 2(1-2|x|) & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Determinar la transformada de Laplace de la solución del siguiente Problema de Cauchy

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = f(t), \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = -1,$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } t \in [0,2], \\ -1 & \text{si } t \in (2,4], \\ 0 & \text{si } t > 4. \end{cases}$$

Ejercicio 4 [1.3 puntos] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{s^2+s+6}{s^3+4s-16}.$$

Ejercicio 5 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & \text{si } x^2+y^2 \leq 1, \ t > 0, \\ u(x,y,t) = 0, & \text{si } x^2+y^2 = 1, \ t > 0, \\ u(x,y,0) = 6(x^2+y^2-1), & \text{si } x^2+y^2 < 1, \\ u_t(x,y,0) = 7, & \text{si } x^2+y^2 < 1. \end{cases}$$

Ejercicio 6 [1 punto] Demostrar que se cumple la siguiente identidad:

$$tJ'_\alpha(t) = \alpha J_\alpha(t) - tJ_{\alpha+1}(t), \quad \forall t > 0,$$

donde $J_\alpha(t)$ denota la función de Bessel de primera clase y orden α.

Ejercicio 7 [1 punto] Calcular (haciendo los cálculos en detalle) la derivada en el sentido de las distribuciones de la función

$$x(t) = \begin{cases} t^2-5 & \text{si } t \in [0,3), \\ t+2 & \text{si } t \in [3,5], \\ 1 & \text{si } t \in (5,9]. \end{cases}$$

Tiempo: Dos horas. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP
EDP – Series de Fourier
6 de Septiembre de 2016

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema:

$$u_x(x,y) + 3yu_y(x,y) - 2u(x,y) = 8e^x, \quad u(x,\alpha(x)) = \beta(x),$$

en los siguientes casos: $\quad a) \quad \alpha(x) = 1,\ \beta(x) = e^x \quad b) \quad \alpha(x) = 0,\ \beta(x) = -8e^x.$

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) + 2u_{xy}(x,y) + u_{yy}(x,y) + 5u_x(x,y) + 5u_y(x,y) + 6u(x,y) = 3x - 4y + 7e^y.$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x \in (0,3),\ y \in (0,1), \\ u(0,y) = u(3,y) = 0, & y \in (0,1), \\ u(x,0) = u(x,1) = f(x), & x \in (0,3), \end{cases}$$

en los casos $a)$ $f(x) = x(3-x)$ y $b)$ $f(x) = \sin(4\pi x) + x$.

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar justificadamente el valor de las siguientes sumas

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}, \quad \text{y} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = x\sin(x)$ en $[-\pi,\pi]$.

Ejercicio 5 [1 punto] Sabiendo que $u(x,y) = K_1(x)e^{-4y} + K_2(y) + y^2 - 5y$, con K_1 y K_2 funciones arbitrarias, es la solución general de cierta EDP, determinar cuál de las siguientes afirmaciones describe el tipo de dicha EDP, justificando la respuesta:

a) la EDP es lineal, homogénea, de orden 2 y tiene coeficientes constantes.

b) la EDP es lineal, homogénea, de orden 1 y tiene coeficientes variables.

c) la EDP es lineal, no homogénea, de orden 2 y tiene coeficientes constantes.

d) la EDP es lineal, no homogénea, de orden 2 y tiene coeficientes variables.

Ejercicio 6 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x \in (0,5),\ y \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(5,y,t) = 0, & y \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0, & x \in (0,5),\ t > 0, \\ u(x,y,0) = 10\sin(4\pi x)\sin(8y), & x \in (0,5),\ y \in (0,\pi), \\ u_t(x,y,0) = g(x,y), & x \in (0,5),\ y \in (0,\pi), \end{cases}$$

en los casos $a)$ $g(x,y) = x - 5$ y $b)$ $g(x,y) = 1$.

Tiempo: Dos horas y cuarto. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

6 de Septiembre de 2016

Ejercicio 1 [1.2 + 1.2 puntos] Determinar razonadamente los siguientes valores:

$$a) \quad \int_0^4 x^{3/2}(4-x)^{5/2}dx \qquad\qquad b) \quad \int_0^1 x^4(\log(x))^5 dx$$

Ejercicio 2 [1.5 puntos] Obtener la expresión de la transformada de Fourier de $g(x) = f(\alpha x + \beta)$, cuando $\alpha > 0$ y β están fijadas, en función de la transformada de Fourier de $f(x)$. Aplicarla para determinar la transformada de Fourier de

$$g(x) = e^{-(2x+6)^2}.$$

Ejercicio 3 [1.2 puntos] Suponiendo que $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ son los ceros positivos de $J_0(t)$, desarrollar en el intervalo $[0,1]$ la función $f(t) = 9t^2 + 6$ en serie de Fourier-Bessel del tipo $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k J_0(\mu_k t)$. Determinar razonadamente la suma de la serie anterior en los puntos $t = 0.2, t = 0.5$ y $t = 1$.

Ejercicio 4 [1.2 puntos] Calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = te^{5t}\cos(4t) + \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,5], \\ t & \text{si } t > 5. \end{cases}$$

Ejercicio 5 [1.4 puntos] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{2s+52}{s^3+4s^2+13s} + \frac{5}{s^2 e^{6s}}.$$

Ejercicio 6 [1.3 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & \text{si } \ x^2+y^2 \leq 1, \ t > 0, \\ u(x,y,t) = 0, & \text{si } \ x^2+y^2 = 1, \ t > 0, \\ u(x,y,0) = 7(x^2+y^2-1), & \text{si } \ x^2+y^2 < 1. \end{cases}$$

Ejercicio 7 [1 punto] Calcular (haciendo los cálculos en detalle) la derivada en el sentido de las distribuciones de la función

$$x(t) = \begin{cases} 4t-5 & \text{si } t \in [0,3), \\ 6t & \text{si } t \in [3,4], \\ (t-7)^2 & \text{si } t \in (4,10]. \end{cases}$$

Tiempo: Dos horas. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.