Introducción a las EDP
17 de Abril de 2015

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Resolver el problema

$$yu_x(x,y) + u_y(x,y) + 2u(x,y) = 10y - 3, \quad u(x,\varphi(x)) = x^2,$$

en los siguientes casos: $\varphi(x) = 0$ y $\varphi(x) = 1$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) + 5u_{xy}(x,y) + 4u_{yy}(x,y) + 2u_x(x,y) + 8u_y(x,y) = 1 + x - 3y.$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x \in (0,1),\ y \in (0,6), \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & y \in (0,6), \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,6) = f(x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

en los casos $f(x) = \sin(2\pi x)$ y $f(x) = x$.

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar justificadamente las sumas de la series numéricas

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{\pi^2(2k+1)^2 + 1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\pi^2 n^2 + 1)^2},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \sinh(x)$ en $[-1,1]$.

Ejercicio 5 [1 punto] Determinar (si es posible) una EDP lineal de primer orden que admita (al menos) como soluciones a las funciones

$$u_1(x,y) = \cos(x-y)e^x + 2x^2y, \quad u_2(x,y) = (x-y)^2e^x + 2x^2y, \quad u_3(x,y) = e^y + 2x^2y.$$

Ejercicio 6 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x \in (0,1),\ y \in (0,5),\ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0, & y \in (0,5),\ t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,5,t) = 0, & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(x,y,0) = (x+1)\sin(3\pi y), & x \in (0,1),\ y \in (0,5). \end{cases}$$

Indicación: No es necesario volver a demostrar las fórmulas o los resultados vistos en clase. El resto de los pasos hay que justificarlos convenientemente.

Tiempo: Dos horas y media

Introducción a las EDP
EDP – Series de Fourier
12 de Junio de 2015

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Resolver el problema

$$u_x(x,y) + (1-y)u_y(x,y) + u(x,y) = x, \quad u(x,\alpha(x)) = \beta(x),$$

en los siguientes casos:

$$a) \quad \alpha(x) = 0, \quad \beta(x) = x+2, \qquad\qquad b) \quad \alpha(x) = 1, \quad \beta(x) = x-1.$$

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) - 4u_{xy}(x,y) + 4u_{yy}(x,y) - u_x(x,y) + 2u_y(x,y) - \frac{3}{4}u(x,y) = 9 - 21e^y.$$

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,4), \ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, u_x(4,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,4), \end{cases}$$

en los casos *a)* $f(x) = \sin(x)$ y *b)* $f(x) = 5 - \cos(\pi x)$.

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar justificadamente el valor de las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \frac{x^4}{2} - \pi^2 x^2$ en $(-\pi,\pi)$.

Ejercicio 5 [1 punto] Dos estudiantes resuelven una EDP. El primero obtiene que la solución general viene dada por $u(x,y) = K_1(y-7x)e^y$, mientras que el segundo obtiene que $u(x,y) = 4e^y + K_2(y-7x)e^{7x}$, donde K_1 y K_2 son funciones arbitrarias. Explicar razonadamente si es posible que ambas soluciones sean correctas. Indicar también de qué tipo es la EDP.

Ejercicio 6 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & x \in (0,\pi), \ y \in (0,1), \ t > 0, \\ u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0, & y \in (0,1), \ t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0, & x \in (0,\pi), \ t > 0, \\ u(x,y,0) = \sin(6x)\sin(16\pi y), & x \in (0,\pi), \ y \in (0,1). \\ u_t(x,y,0) = y - 1, & x \in (0,\pi), \ y \in (0,1). \end{cases}$$

Tiempo: Dos horas y cuarto. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

12 de Junio de 2015

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = \sin(4t)e^{-|t|} + \begin{cases} 0 & \text{si } |t| < 5, \\ 1 & \text{si } |t| \in [5,8], \\ 0 & \text{si } |t| > 8. \end{cases}$$

Ejercicio 2 [1.5 puntos] Calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = 10\cos(3t)\cos(5t) + \frac{d^2}{dt^2}(e^{2t}\sin(8t)).$$

Ejercicio 3 [1.3 puntos] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{5s^2 - 15s + 7}{s^3 - 3s^2 + 4}.$$

Ejercicio 4 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & \text{si } x^2+y^2 \leq 1,\ t > 0, \\ u(x,y,t) = 0, & \text{si } x^2+y^2 = 1,\ t > 0, \\ u(x,y,0) = x^2+y^2-1, & \text{si } x^2+y^2 < 1, \\ u_t(x,y,0) = 3(x^2+y^2), & \text{si } x^2+y^2 < 1. \end{cases}$$

Ejercicio 5 [1 punto] Desarrollar en serie de Fourier-Legendre el polinomio

$$p(t) = 70t^4 - 10t^3 - 51t^2 + 7t + 4.$$

Ejercicio 6 [1.2 + 1 puntos] Determinar razonadamente el valor de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 (t\log(t))^3 dt$ *b)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t^2+1} dt$

Ejercicio 7 [1 punto] Calcular (haciendo los cálculos en detalle) la derivada en el sentido de las distribuciones de la función

$$x(t) = \begin{cases} 1-t, & \text{si } t \in [-6,1), \\ 0, & \text{si } t \in [1,4], \\ t^2, & \text{si } t \in (4,11]. \end{cases}$$

Tiempo: Dos horas. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

INTRODUCCIÓN A LAS EDP
EDP – SERIES DE FOURIER
11 DE SEPTIEMBRE DE 2015

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Resolver el problema

$$u_x(x,y) + \frac{u_y(x,y)}{y} - u(x,y) = 3x, \quad u(\alpha(y),y) = -\frac{3}{2}y^2 - 3,$$

en los siguientes casos:

$$a) \quad \alpha(y) = \frac{y^2}{2}, \qquad\qquad b) \quad \alpha(y) = 0.$$

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) + 4u_{xy}(x,y) - 5u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) + 5u_y(x,y) = 3.$$

Ejercicio 3 [2.5 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

en los casos

$$a)\ f(x) = 1,\ g(x) = \sin(8\pi x) \quad \text{y} \quad f(x) = \sin(5x),\ g(x) = 3.$$

Ejercicio 4 [2.5 puntos] Determinar justificadamente el valor de las sumas

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = |x|$ en $(-\pi,\pi)$.

Ejercicio 5 [1 punto] Determinar (si es posible) una EDP lineal de segundo orden y coeficientes constantes que (al menos) admita como soluciones a las funciones

$$u_1(x,y) = \cos(y+7x) + 2e^{y-x} + x^3 + 5,$$

$$u_2(x,y) = (y+7x)^6 + 9(y-x)^3 + x^3 + 5,$$

$$u_3(x,y) = \frac{4}{1+(y+7x)^2} + \sin((y-x)^4 + 16) + x^3 + 5.$$

Tiempo: Dos horas y cuarto. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

11 de Septiembre de 2015

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio 2 [1 punto] Supuesto que f es una función continua a trozos en $[0, T]$ para cada $T > 0$ y de orden exponencial, demostrar que

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(r)dr\right)(s) = \frac{\mathcal{L}(f)(s)}{s}, \quad \text{si} \quad s > 0,$$

donde $\mathcal{L}$ denota la transformada de Laplace.

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{2s^3}{s^4 - 81}.$$

Ejercicio 4 [1.5 puntos] Suponiendo que $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ son los ceros positivos de $J_1(t)$, desarrollar la función $f(t) = t^3 - t$ en serie de Fourier-Bessel del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n J_1(\mu_n t)$, en el intervalo $[0, 1]$.

Ejercicio 5 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_t(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t), & \text{si} \ \ x^2 + y^2 \leq 1, \ t > 0, \\ u(x, y, t) = 0, & \text{si} \ \ x^2 + y^2 = 1, \ t > 0, \\ u(x, y, 0) = 3 - (x^2 + y^2), & \text{si} \ \ x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

Ejercicio 6 [1 punto] Determinar el valor de la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^7 dt.$$

Ejercicio 7 [1 punto] Desarrollar el polinomio $p(t) = t^4 + t^3 + 1$ en serie de Fourier-Legendre.

Ejercicio 8 [1 punto] Calcular la derivada primera (en el sentido de las distribuciones) de la función

$$x(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{si } t \in [0, \pi), \\ t - \pi & \text{si } t \in [\pi, 6], \\ t^2 & \text{si } t \in (6, 10], \end{cases}$$

haciendo los cálculos en detalle.

Tiempo: Dos horas. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.