Introducción a las EDP
8 de Abril de 2014

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Resolver el problema

$$u_x(x,y) + y^2 u_y(x,y) + u(x,y) = 5x - 6, \quad u(x,\varphi(x)) = x + 2,$$

cuando $x > 0$ e $y \neq 0$, en los siguientes casos: $\varphi(x) = 1$ y $\varphi(x) = -\frac{1}{x}$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, <u>haciendo todos los cambios en detalle</u> y resolverla (si es posible):

$$9u_{xx}(x,y) + 6u_{xy}(x,y) + u_{yy}(x,y) + 3u_x(x,y) + u_y(x,y) + \frac{u(x,y)}{4} = 5x + 2e^y.$$

Ejercicio 3 [2 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x \in (0,\pi),\ y \in (0,1), \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0, & y \in (0,1), \\ u(x,0) = f(x), \quad u(x,1) = 0, & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

en los casos $f(x) = 8 + x$ y $f(x) = 7x - 5\cos(6x)$.

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar <u>justificadamente</u> las sumas de la series numéricas

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{4(2k+1)^2 - 1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \sin(x/2)$ en $[-\pi,\pi]$.

Ejercicio 5 [1 punto cada apartado]

a) Dos estudiantes resuelven una EDP. El primero obtiene que la solución general viene dada por $u(x,y) = x + K(x^2+y)e^{-y}$, mientras que el segundo obtiene que $u(x,y) = x + 3e^{x^2} + K(x^2+y)e^{-x^2}$, donde K es una función arbitraria. Explicar razonadamente si es posible que ambas soluciones sean correctas. Indicar también de qué tipo es la EDP.

b) Dada una EDP del tipo $4u_{xx}(x,y) + \beta \cdot u_{xy}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 2$, donde β es una constante desconocida para nosotros, determinar razonadamente si alguna de las siguientes expresiones puede definir su solución general:

$$a) \quad u(x,y) = K_1(x+y) + K_2(x+4y) + \frac{x^2}{4}, \qquad b) \quad u(x,y) = K_1(2x+y) + K_2(x+4y) - 3x,$$

$$c) \quad u(x,y) = K_1(2x+8y) + K_2(x+4y) + y^2,$$

donde K_1 y K_2 son funciones arbitrarias. Calcular el valor de β.

<u>Indicación:</u> No es necesario volver a demostrar las fórmulas o los resultados vistos en clase, pero el resto de los pasos hay que justificarlos convenientemente.

<u>Tiempo: Dos horas y media</u>

Introducción a las EDP
EDP – Series de Fourier
13 de Junio de 2014

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Resolver el problema

$$u_x(x,y) - xu_y(x,y) + xu(x,y) = xy^2, \quad u(x,\alpha(x)) = \beta(x),$$

en los siguientes casos:

$$a) \quad \alpha(x) = 0, \quad \beta(x) = x^4, \qquad\qquad b) \quad \alpha(x) = 1, \quad \beta(x) = 3x^2.$$

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$2u_{xx}(x,y) + 7u_{xy}(x,y) + 3u_{yy}(x,y) + 5u_x(x,y) + 15u_y(x,y) = e^x - y + 5x.$$

Ejercicio 3 [2.5 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

en los casos

$$a)\ f(x) = 4\sin(3x) + 1,\ g(x) = \sin(2\pi x) \quad \text{y} \quad f(x) = 2,\ g(x) = 5\sin(7x).$$

Ejercicio 4 [2.5 puntos] Determinar justificadamente el valor de las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 - 81} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2 - 81},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \cos(3x)$ en $(-3,3)$.

Ejercicio 5 [1 punto] Determinar (si es posible) una EDP lineal de primer orden con coeficientes constantes que admita como soluciones (al menos) a $u_1(x,y) = 16(2y+3x)^6 + 7e^{x+y} - y$, $u_2(x,y) = e^{2y+3x} + 7e^{x+y} - y$, $u_3(x,y) = \frac{3x}{2} + 7e^{x+y}$.

Tiempo: Dos horas y cuarto. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

13 de Junio de 2014

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Determinar la transformada de Fourier de la función:

$$f(x) = xe^{-9x^2} - \frac{3}{(x+7)^2+1}.$$

Ejercicio 2 [1 punto] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función:

$$F(s) = \frac{3s-12}{s^3-s^2+8s-8}.$$

Ejercicio 3 [1 + 1 puntos] Determinar razonadamente los siguientes valores:

$$a) \quad \int_0^\infty \sqrt{t}e^{-t^3}dt \qquad\qquad b) \quad \int_0^\infty \sin(t)e^{-4t}dt$$

Ejercicio 4 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & \text{si } x^2+y^2 \leq 1,\ t>0, \\ u(x,y,t) = 0, & \text{si } x^2+y^2 = 1,\ t>0, \\ u(x,y,0) = 8(x^2+y^2-1), & \text{si } x^2+y^2 < 1. \end{cases}$$

Ejercicio 5 [1.5 puntos] Justificar razonadamente la siguiente identidad:

$$2\alpha J_\alpha(t) = tJ_{\alpha-1}(t) + tJ_{\alpha+1}(t), \quad \forall t > 0,$$

donde $J_\alpha(t)$ denota la función de Bessel de primera clase y orden α.

Ejercicio 6 [1 punto] Desarrollar el polinomio $p(t) = 70t^4 - 12t^3$ en serie de Fourier-Legendre.

Ejercicio 7 [1.5 puntos] Calcular justificadamente las derivadas primera y segunda (en el sentido de las distribuciones) de la función

$$x(t) = |\cos(t)|,$$

en el intervalo $(-\pi,\pi)$, haciendo los cálculos en detalle.

Tiempo: Dos horas. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP
EDP – Series de Fourier
11 de Septiembre de 2014

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Resolver el problema

$$xu_x(x,y) - 3yu_y(x,y) + u(x,y) = xy, \quad u(x,\alpha(x)) = \beta(x),$$

en los siguientes casos:

$$a) \quad \alpha(x) = 0, \quad \beta(x) = 3x, \qquad\qquad b) \quad \alpha(x) = 1, \quad \beta(x) = 2x^2 - x.$$

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$4u_{xx}(x,y) + 12u_{xy}(x,y) + 9u_{yy}(x,y) + 2u_x(x,y) + 3u_y(x,y) - 2u(x,y) = 6x - 4y + 10e^y.$$

Ejercicio 3 [2.5 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & x \in (0,\pi),\ y \in (0,1), \\ u(0,y) = 0, u(\pi,y) = 0, & y \in (0,1), \\ u(x,0) = f(x), u(x,1) = g(x), & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

en los casos

$$a)\ f(x) = 1,\ g(x) = 5x \quad \text{y} \quad b)\ f(x) = 7x + 3,\ g(x) = -2\sin(9x).$$

Ejercicio 4 [2.5 puntos] Determinar justificadamente el valor de las sumas

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 - 4} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{((2k+1)^2 - 4)^2},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \sin(2x)$ en $(0,\pi)$.

Ejercicio 5 [1 punto] Determinar (si es posible) una EDP lineal de primer orden homogénea que admita como soluciones (al menos) a $u_1(x,y) = 3y^2 + x$, $u_2(x,y) = 7y^2$, $u_3(x,y) = 5x$.

Tiempo: Dos horas y cuarto. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

11 de Septiembre de 2014

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{\sin(5x)}{25x^2+1}.$$

Ejercicio 2 [1.3 puntos] Calcular la transformada de Laplace de la solución del problema de Cauchy

$$x''(t) - 2x'(t) + 4x(t) = t^{16} + e^{7t}\cos(2t), \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 5.$$

No se pide calcular $x(t)$.

Ejercicio 3 [1.2 puntos] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{1}{s^3+s^2+4s+4}.$$

Ejercicio 4 [1.5 puntos] Suponiendo que $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ son los ceros positivos de $J_1(t)$, desarrollar la función

$$f(t) = \begin{cases} t^3 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{3}), \\ 3t & \text{si } t \in [\frac{1}{3}, 1], \end{cases}$$

en serie de Fourier-Bessel del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n J_1(\mu_n t)$, en el intervalo $[0,1]$. Determinar $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n J_1(\frac{\mu_n}{3})$.

Ejercicio 5 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & \text{si } x^2+y^2 \leq 1, \ t > 0, \\ u(x,y,t) = 0, & \text{si } x^2+y^2 = 1, \ t > 0, \\ u(x,y,0) = 3(x^2+y^2-1), & \text{si } x^2+y^2 < 1, \\ u_t(x,y,0) = 1 - x^2 - y^2, & \text{si } x^2+y^2 < 1. \end{cases}$$

Ejercicio 6 [1 punto] Determinar el valor de la integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx.$

Ejercicio 7 [1 punto] Desarrollar el polinomio $p(t) = 6t^4+5t-2$ en serie de Fourier-Legendre.

Ejercicio 8 [1 punto] Calcular (haciendo los cálculos en detalle) la derivada en el sentido de las distribuciones de la función

$$x(t) = \begin{cases} t-3, & \text{si } t \in [-4,0), \\ t^2+1, & \text{si } t \in [0,2], \\ 3t-1, & \text{si } t \in (2,6]. \end{cases}$$

Tiempo: Dos horas. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.