Introducción a las EDP

24 de Abril de 2013

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Resolver el problema

$$xyu_x(x,y) - x^2 u_y(x,y) = yu(x,y), \qquad u(x,\varphi(x)) = \frac{x}{x^2+1},$$

en los siguientes casos: $\varphi(x) = 0$ y $\varphi(x) = x$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, <u>haciendo todos los cambios en detalle</u> y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) - u_{xy}(x,y) - 2u_{yy}(x,y) + 2u_x(x,y) - 4u_y(x,y) = e^x + 1.$$

Ejercicio 3 [2 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad x \in (0,2), \ t > 0 & \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \ u_t(x,0) = \cos(7\pi x), & x \in (0,2), \end{cases}$$

en los casos $f(x) = 4 + 5\cos(3\pi x)$ y $f(x) = 2 + 3\sin(\pi x)$.

Ejercicio 4 [2 puntos] Determinar <u>justificadamente</u> la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+25},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = e^{5x}$ en $[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 5 [1 punto cada apartado]

a) Determinar razonadamente <u>cuántas</u> soluciones tiene el problema

$$xu_x(x,y) - 2yu_y(x,y) - xu(x,y) = 0, \qquad u\left(x, \frac{5}{x^2}\right) = e^{2x}, \quad \text{si} \quad x > 0.$$

<u>No se pide resolverlo.</u>

b) Determinar (si es posible) una EDP para la cual la expresión

$$u(x,y) = K_1(y - 5x) + K_2(y + x) + xy,$$

donde K_1 y K_2 son funciones arbitrarias, defina su solución general.

<u>Indicación:</u> No es necesario volver a demostrar las fórmulas o los resultados vistos en clase, pero el resto de los pasos hay que justificarlos convenientemente.

<u>Tiempo: Dos horas y media</u>

Introducción a las EDP
EDP – Series de Fourier
14 de Junio de 2013

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Resolver el problema

$$2u_x(x,y) + u_y(x,y) - u(x,y) = e^{2y-x}, \quad u(x,\alpha(x)) = \beta(x),$$

en los siguientes casos:

$$a) \quad \alpha(x) = -1, \ \beta(x) = \frac{x}{2}, \qquad\qquad b) \quad \alpha(x) = \frac{x}{2}, \ \beta(x) = -1.$$

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, <u>haciendo todos los cambios en detalle</u> y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) + 8u_{xy}(x,y) + 16u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) + 4u_y(x,y) + \frac{5}{4}u(x,y) = x + \frac{33}{10}.$$

Ejercicio 3 [2.5 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,\pi) \times (0,1), \\ u_x(0,y) = 0, u_x(\pi,y) = 0, & y \in (0,1), \\ u(x,0) = f(x), u(x,1) = g(x), & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

en los casos

$$a) \ f(x) = x, \ g(x) = 3 \quad \text{y} \quad f(x) = 2\cos(5x+\pi), \ g(x) = 7 + \cos(x-\pi).$$

Ejercicio 4 [2.5 puntos] Determinar <u>justificadamente</u> el valor de las sumas

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-9} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-9},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \sin(3\pi x)$ en $(0,1)$.

Ejercicio 5 [1 punto] Dada la EDP $u_{xx}(x,y) + 10 \cdot u_{xy}(x,y) + \alpha u_{yy}(x,y) = x$, donde α es una constante desconocida para nosotros, determinar cuál de las siguientes expresiones puede definir su solución general

$$a) \quad u(x,y) = K_1(y-9x) + K_2(y-2x) + \frac{x^2}{6} \qquad b) \quad u(x,y) = K_1(y-9x) + K_2(y+x) + \frac{x^3}{6}$$

$$c) \quad u(x,y) = K_1(y-9x) + K_2(y-x) + \frac{x^3}{6}$$

donde K_1 y K_2 son funciones arbitrarias. Calcular el valor de α.

<u>Tiempo: Dos horas y cuarto.</u> En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

14 de Junio de 2013

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{x}{4x^2+1}.$$

Ejercicio 2 [1.5 puntos] Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Ejercicio 3 [1.5 puntos] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{80s}{(s^2+2s+5)(s^2-4s+3)}.$$

Ejercicio 4 [1.5 puntos] Suponiendo que $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ son los ceros positivos de $J_0(t)$, desarrollar la función $f(t) = 3t^2+7$ en serie de Fourier-Bessel del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n J_0(\mu_n t)$, en el intervalo $[0,1]$.

Ejercicio 5 [2 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & \text{si } x^2+y^2 \leq 1, \\ u(x,y) = f(x,y), & \text{si } x^2+y^2 = 1, \end{cases}$$

en los casos:

a) $f(x,y) = x + 2y^2$, *b)* $f(x,y) = x^2 - 3y^2$.

Ejercicio 6 [1 punto] Supuesto que $P_n(t)$ es el polinomio de Legendre de grado n, establecer razonadamente si la siguiente propiedad es cierta o falsa: "Todo polinomio f de grado $2N+1$ se puede expresar en la forma

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N} a_{2n+1} P_{2n+1}(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},$$

eligiendo convenientemente los coeficientes a_{2n+1}".

Ejercicio 7 [1 punto] Justificar razonadamente la siguiente identidad:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} d\xi,$$

donde (como es habitual) $\delta(x)$ denota la delta de Dirac en el punto 0.

<u>Tiempo: Dos horas.</u> En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

EDP – Series de Fourier

12 de Septiembre de 2013

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Resolver el problema

$$u_x(x,y) + \cos(x) u_y(x,y) + 2u(x,y) = 4, \quad u(\alpha(y), y) = \beta(y),$$

en los siguientes casos:

$$a) \quad \alpha(y) = 0, \quad \beta(y) = y^2, \qquad\qquad b) \quad \alpha(y) = \frac{\pi}{2}, \quad \beta(y) = 2.$$

Ejercicio 2 [2.5 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) + 3u_{xy}(x,y) - 4u_{yy}(x,y) - u_x(x,y) + u_y(x,y) = 2x + 2y - 10.$$

Ejercicio 3 [2.5 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

en los casos

$$a)\ f(x) = \sin(x),\ g(x) = \sin(2\pi x) \quad \text{y} \quad b)\ f(x) = 5\sin(2\pi x),\ g(x) = 7\sin(3x).$$

Ejercicio 4 [2.5 puntos] Determinar justificadamente el valor de las sumas

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = x + |x|$, en $[-1,1]$.

Ejercicio 5 [1 punto] Determinar (si es posible) una EDP lineal de primer orden que admita (al menos) como soluciones a las funciones

$$u_1(x,y) = xye^y + x^3, \quad u_2(x,y) = \frac{e^y}{1+(xy)^6} + x^3, \quad u_3(x,y) = \frac{15e^y}{8}\sin(xy) + x^3.$$

Tiempo: Dos horas y cuarto. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

Transformadas Integrales – Funciones Especiales – Distribuciones

12 de Septiembre de 2013

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-2,2], \\ 0 & \text{si } x \notin [-2,2]. \end{cases}$$

Ejercicio 2 [1 punto] Sabiendo que $\mathcal{L}(J_0(t))(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, determinar la transformada de Laplace de la función de Bessel $J_1(t)$.

Ejercicio 3 [1 punto] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{3s^2+7s+10}{s^3+2s^2+5s}.$$

Ejercicio 4 [1.5 puntos] Suponiendo que $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ son los ceros positivos de $J_1(t)$, desarrollar la función $f(t) = 4t^3 + t$ en serie de Fourier-Bessel del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n J_1(\mu_n t)$, en el intervalo $[0,1]$.

Ejercicio 5 [1.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & \text{si } x^2+y^2 \leq 1,\ t>0, \\ u(x,y,t) = 0, & \text{si } x^2+y^2 = 1,\ t>0, \\ u(x,y,0) = 5 - 6(x^2+y^2), & \text{si } x^2+y^2 = 1. \end{cases}$$

Ejercicio 6 [1 punto] Determinar el valor de la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-t^4} t^{15} dt.$$

Ejercicio 7 [1 punto] Desarrollar el polinomio $p(t) = 5t^4 + 4t^3 - t^2 + 3t + 6$ en serie de Fourier-Legendre.

Ejercicio 8 [1.5 puntos] Calcular justificadamente las derivadas primera y segunda (en el sentido de las distribuciones) de la función

$$x(t) = |t(t-1)|,$$

en el intervalo $(-3,2)$, donde $|.|$ representa (como siempre) el valor absoluto.

Tiempo: Dos horas. En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.