Introducción a las EDP

4 de Mayo de 2012

Ejercicio 1 [1.2 puntos] Resolver el problema

$$y^2 u_x(x,y) + xyu_y(x,y) = x, \qquad u(x,\varphi(x)) = x^4 - 2x^2 + 1, \quad \text{si} \quad x > 0,\ y > 0,$$

en los siguientes casos: $\varphi(x) = x$ y $\varphi(x) = 1$.

Ejercicio 2 [2 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, <u>haciendo todos los cambios en detalle</u> y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) + 4u_{xy}(x,y) - 5u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) - u_y(x,y) = x + 3.$$

Ejercicio 3 [2 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & \\ u(0,y) = u(3,y) = 0, & y \in (0,5), \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,5) = 16\sin(4\pi x), & x \in (0,3), \end{cases}$$

en los casos $f(x) = \cos(\pi x)$ y $f(x) = 1 - 7\cos(\pi x)$.

Ejercicio 4 [1.4 puntos] Determinar <u>justificadamente</u> la suma de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = e^x$ en $[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 5 [1.2 puntos] Calcular la transformada de Fourier de la función $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2+5}$.

Ejercicio 6 [1 punto] Un estudiante de la UC está resolviendo una EDP lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Primero la resuelve con MAPLE y obtiene que la solución general viene dada por $u(x,y) = K_1(y-x) + x \cdot K_2(y-x)$; luego, la resuelve "a mano" obteniendo que $u(x,y) = (y+2x) \cdot K_1(y-x) + K_2(y-x)$, donde K_1 y K_2 son funciones arbitrarias. Explicar si ambas expresiones coinciden o no.

Ejercicio 7 [1.2 puntos] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+1} + \frac{8e^{-s}}{s-4}.$$

<u>**Tiempo: 3 horas**</u>

Introducción a las EDP

EDP – Series de Fourier – Transformadas Integrales

15 de Junio de 2012

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Resolver el problema

$$xu_x(x,y) + 2yu_y(x,y) - 2u(x,y) = x, \quad u(x,\varphi(x)) = g(x), \quad \text{si } x > 0, \quad y > 0,$$

en los siguientes casos:

$$a) \quad \varphi(x) = 4x^2, \quad g(x) = x, \qquad\qquad b) \quad \varphi(x) = x^3, \quad g(x) = x^4 - x.$$

¿Cuántas soluciones hay en cada caso?.

Ejercicio 2 [2 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, <u>haciendo todos los cambios en detalle</u> y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) - 2u_{xy}(x,y) + u_{yy}(x,y) - u_x(x,y) + u_y(x,y) + \frac{u(x,y)}{4} = 2x + y.$$

Ejercicio 3 [2.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

en los siguientes casos:

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in (0,1], \\ 1 & \text{si } x \in (1,\pi]. \end{cases} \qquad b) \quad f(x) = 8 + 5\cos(3x) - 3\cos(10x) + 4\cos(16x).$$

Ejercicio 4 [1.5 puntos] Determinar <u>justificadamente</u> el valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = x^3 - x$ en $[-1,1]$.

Ejercicio 5 [1.3 puntos] Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| \le 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Ejercicio 6 [1.2 puntos] Calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = 6te^t \sin(4t) + 2t^{3/2}, \quad \text{para } \ t > 0.$$

<u>**Tiempo: Dos horas y media.**</u>

Introducción a las EDP

Funciones Especiales – Distribuciones

15 de Junio de 2012

Ejercicio 1 [1 + 1.5 puntos] Determinar el valor de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^7(1-x^2)^{16}dx.$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 x^2\log(x)dx.$

Ejercicio 2 [1.5 + 1 punto]

a) Suponiendo que $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ son los ceros positivos de $J_1(t)$, desarrollar en el intervalo $[0,1]$ la función

$$f(t)=\begin{cases} t^3+2t & \text{si } t\in[0,\frac{1}{2}],\\ \\ t & \text{si } t\in(\frac{1}{2},1],\end{cases}$$

en serie de Fourier-Bessel del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n J_1(\mu_n t)$.

b) Determinar razonadamente la suma de las siguientes series, siendo γ_n los coeficientes del apartado a): $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n J_1(\mu_n/3)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n J_1(\mu_n/2)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n J_1(3\mu_n/4)$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n J_1(\mu_n)$.

Ejercicio 3 [3 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t)=u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t), & \text{si } x^2+y^2\le 1,\ t>0,\\ u(x,y,t)=0, & \text{si } x^2+y^2=1,\ t>0,\\ u(x,y,0)=f(x,y), & \text{si } x^2+y^2<1,\\ u_t(x,y,0)=g(x,y), & \text{si } x^2+y^2<1,\end{cases}$$

en los casos:

a) $f(x,y)=1,\quad g(x,y)=0$

b) $f(x,y)=x^2+y^2,\quad g(x,y)=2.$

Ejercicio 4 [1 punto] Desarrollar el polinomio $f(t)=7t^4+5t$ en serie de Fourier-Legendre.

Ejercicio 5 [1 punto] Determinar la derivada en el sentido de las distribuciones de la función

$$x(t)=\begin{cases} -1 & \text{si } t\in[1,4)\\ 3-t & \text{si } t\in[4,6]\\ t^2-4t & \text{si } t\in(6,8].\end{cases}$$

Tiempo: Una hora y cincuenta minutos

Introducción a las EDP

12 de Septiembre de 2012

Primera Parte

Ejercicio 1 [1 punto] Resolver el problema

$$xu_x(x,y) - yu_y(x,y) + yu(x,y) = y^2, \quad u(x,\varphi(x)) = g(x), \quad \text{si } x>0, \quad y>0,$$

en los siguientes casos:

$$a) \quad \varphi(x) = \frac{2}{x}, \quad g(x) = 5, \qquad\qquad b) \quad \varphi(x) = 1, \quad g(x) = 3x.$$

Ejercicio 2 [1 punto] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, <u>haciendo todos los cambios en detalle</u> y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) - 5u_{xy}(x,y) + 4u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) - 4u_y(x,y) = -9.$$

Ejercicio 3 [1.2 puntos] Resolver el siguiente problema utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1)\times(0,4) \\ u(0,y) = 0, u(1,y) = 0, & y \in (0,4) \\ u(x,0) = 0, u(x,4) = f(x), & x \in (0,1) \end{cases}$$

en los casos $f(x) = 3\sin(2\pi x)$ y $f(x) = 3\cos(2\pi x)$.

Ejercicio 4 [1.4 puntos] Determinar <u>justificadamente</u> el valor de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \cos(x/2)$ en $[-\pi,\pi]$.

Ejercicio 5 [0.6 puntos] Sabiendo que la transformada de Fourier de una cierta función $f \in L^1(\mathbb{R})$ real e impar está entre las siguientes funciones, determinar <u>razonadamente</u> cuál es:

$$a) \quad \hat{f}(\xi) = \frac{i\sin^2(\xi)}{\xi}, \qquad b) \quad \hat{f}(\xi) = \frac{\sin^2(\xi)}{\xi}, \qquad c) \quad \hat{f}(\xi) = \frac{i\sin(\xi)}{\xi}.$$

Ejercicio 6 [0.5 puntos] Calcular la transformada de Laplace de la función definida en $(0,+\infty)$ por

$$f(t) = \begin{cases} 3, & si\ t \in (0,2), \\ t, & si\ t \in [2,4], \\ 0, & si\ t > 4. \end{cases}$$

<u>Tiempo: Dos horas y veinte minutos.</u>

En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.

Introducción a las EDP

12 de Septiembre de 2012

Segunda Parte

Ejercicio 7 [0.5 + 0.6 puntos] Determinar los siguientes valores:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\sqrt[4]{t}}\,dt.$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+x)^6(1-x)^3\,dx.$

Ejercicio 8 [1 punto] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables:

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t), & \text{si } x^2+y^2 \leq 1,\ t>0,\\ u(x,y,t)=0, & \text{si } x^2+y^2=1,\ t>0,\\ u(x,y,0) = 1-(x^2+y^2), & \text{si } x^2+y^2<1. \end{cases}$$

Ejercicio 9 [1 punto] Suponiendo que $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ son los ceros positivos de $J_1(t)$, desarrollar en el intervalo $[0,1]$ la función $f(t)=t^3+2t$ en serie de Fourier-Bessel del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n J_1(\mu_n t)$.

Ejercicio 10 [0.6 puntos] Desarrollar el polinomio $f(t)=6t^4-2t^3+t-\frac{6}{5}$ en serie de Fourier-Legendre.

Ejercicio 11 [0.6 puntos] Determinar justificadamente la transformada de Laplace (en el sentido de las distribuciones) de la delta de Dirac concentrada en el punto $t=2$.

Tiempo: Una hora y cuarenta minutos.

En la calificación se tendrá en cuenta si se realizan los cálculos explícitamente, salvo en los casos en que sean los mismos que los hechos en clase, en cuyo caso bastará con indicarlo.