Introducción a las EDP

5 de Mayo de 2011

Ejercicio 1 [1 punto] Determinar razonadamente cuántas soluciones tiene el problema

$$xu_x(x,y) + yu_y(x,y) - 5u(x,y) = 0, \qquad u(x,x) = g(x),$$

en los casos $g(x) = 2x+1$ y $g(x) = x^5$. No se pide resolverlos.

Ejercicio 2 [2 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$4u_{xx}(x,y) - 16u_{xy}(x,y) + 7u_{yy}(x,y) + 2u_x(x,y) + 17u_y(x,y) - 12u(x,y) = x + 2y.$$

Ejercicio 3 [2 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & \\ u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 1, & x \in (0,6), \end{cases}$$

en los casos $f(x) = \sin(\pi x)$ y $f(x) = 2$.

Ejercicio 4

a) **[1 punto]** Determinar razonadamente si la siguiente igualdad es verdadera o falsa:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \qquad \forall\, x \in (0,\pi).$$

b) **[1 punto]** Determinar justificadamente el valor de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-1}$, utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \cos(x/4)$ en $[-\pi,\pi]$.

Ejercicio 5 [1 punto] Sabiendo que la transformada de Fourier de la función $f(x) = \dfrac{x^4 e^{-5|x|}}{1200}$ está entre las siguientes funciones, determinar razonadamente cuál es:

a) $\mathcal{F}(f)(\xi) = \dfrac{\xi^4 - 50\xi^2 + 125}{(\xi^2+25)^5}$ *b)* $\mathcal{F}(f)(\xi) = \dfrac{\xi^4 - 50\xi^2 + 125}{(\xi^2+25)^2}$ *c)* $\mathcal{F}(f)(\xi) = \dfrac{\xi^4 - 50\xi^2 + 125i}{(\xi^2+25)^5}$

Ejercicio 6

a) **[1 punto]** Calcular la transformada de Laplace de la solución del Problema de Cauchy

$$x''(t) + 9x'(t) - x(t) = t^{52},\ x(0) = 2, x'(0) = 3.$$

No se pide encontrar $x(t)$.

b) **[1 punto]** Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{s-5}{(s^2+4s+8)(s-1)}.$$

Tiempo: 3 horas

Introducción a las EDP

EDP – Series de Fourier – Transformadas Integrales

17 de Junio de 2011

Ejercicio 1 [1.5 puntos] Determinar razonadamente cuántas soluciones tiene el problema

$$xu_x(x,y) - 2yu_y(x,y) = x^2 + y^2, \qquad u(x, g(x)) = x^2,$$

en los casos $g(x) = 1$ y $g(x) = 0$. Resolverlos, si es posible.

Ejercicio 2 [2 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, haciendo todos los cambios en detalle y resolverla (si es posible):

$$u_{xx}(x,y) - 2u_{xy}(x,y) + u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) - u_y(x,y) + u(x,y) = 1.$$

Ejercicio 3 [2.5 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & \\ u_y(x,0) = u_y(x,1) = 0, & x \in (0,1), \\ u(0,y) = f(y),\ u(1,y) = 0, & y \in (0,1), \end{cases}$$

en los casos $f(y) = 7 + \sin(3\pi y)$ y $f(y) = y - 2\cos(6\pi y)$.

Ejercicio 4 [1.5 puntos] Determinar justificadamente el valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}|\sin(x)|$ en $[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 5 [1.2 puntos] Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = \frac{1}{9x^2+4}.$$

Ejercicio 6 [1.3 puntos] Calcular la transformada de Laplace de la función definida en $(0, +\infty)$ por

$$f(t) = e^{3t} + 8\cos(5t) + \begin{cases} 0, & \text{si } t \in (0,1) \\ t^2 - 2t + 5, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Tiempo: Dos horas y veinte minutos.

Introducción a las EDP

Funciones Especiales – Distribuciones

17 de Junio de 2011

Ejercicio 1 [1.2 + 1.3 puntos] Determinar el valor de las siguientes integrales, utilizando las transformaciones que consideres oportunas:

a) $\displaystyle\int_0^1 (\log(1/t))^6\, dt.$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt.$

Ejercicio 2 [1.5 puntos] Supuesto que $J_n(t)$ es la función de Bessel de orden n y primera clase, demostrar que se verifica la siguiente identidad:

$$\frac{d}{dt}(t^{-n}J_n(t)) = -t^{-n}J_{n+1}(t),$$

para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y cada $t > 0$.

Ejercicio 3 [1.5 + 1.5 puntos]

a) Suponiendo que $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ son los ceros positivos de $J_0(t)$, desarrollar en el intervalo $[0,1]$ la función

$$f(t) = \begin{cases} 3t^2 + 2 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{3}] \\ \\ 2 & \text{si } t \in (\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

en serie de Fourier-Bessel del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_k J_0(\mu_k t)$.

b) Suponiendo que $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ son los ceros positivos de $J_1(t)$, desarrollar en el intervalo $[0,1]$ la función $f(t) = t^3 + 7t$ en serie de Fourier-Bessel del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_k J_1(\mu_k t)$.

Ejercicio 4 [1 punto] Supuesto que $P_n(t)$ es el polinomio de Legendre de grado n, determinar razonadamente el valor de la integral $\displaystyle\int_{-1}^1 P_n(t)dt$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ejercicio 5 [1 + 1 puntos]

a) Calcular (haciendo los cálculos en detalle) la derivada en el sentido de las distribuciones de la función

$$x(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [-3,-1) \\ 5 & \text{si } t \in [-1,1] \\ t^2 + 4 & \text{si } t \in (1,5]. \end{cases}$$

b) Determinar justificadamente la transformada de Fourier de $\delta'(t-8)$, en el sentido de las distribuciones.

Tiempo: Una hora y cuarenta minutos

Introducción a las EDP
12 de Septiembre de 2011
Primera Parte

Ejercicio 1 [0.8 puntos] Determinar (si es posible) una EDP lineal de primer orden que admita como soluciones a $u_1(x,y) = 2 + e^{-x}(4x+y)^8$, $u_2(x,y) = 2 + e^{-x}\log(4x+y)$ y $u_3(x,y) = 2$.

Ejercicio 2 [1.2 puntos] Reducir la siguiente EDP lineal de segundo orden a su forma canónica, <u>haciendo todos los cambios en detalle</u> y resolverla (si es posible):

$$2u_{xx}(x,y) - 5u_{xy}(x,y) - 3u_{yy}(x,y) + 5u_x(x,y) - u_y(x,y) + 2u(x,y) = 0.$$

Ejercicio 3 [1.2 puntos] Resolver el siguiente problema, utilizando el método de separación de variables

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,2), \end{cases}$$

en los casos $f(x) = \sin(3\pi x) + 4$ y $f(x) = \cos(5x)$.

Ejercicio 4 [1 punto] Determinar <u>justificadamente</u> el valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2 - 100},$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \cos(5x)$ en $[-2,2]$.

Ejercicio 5 [0.7 puntos] Calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

Ejercicio 6 [0.8 puntos] Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{e^{-4s}}{s^2 + 4s + 13}.$$

<u>**Tiempo: Dos horas y veinte minutos.**</u>

Introducción a las EDP
12 de Septiembre de 2011
Segunda Parte

Ejercicio 7 [0.8 + 0.7 puntos] Determinar los siguientes valores:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3t^2} t^5 dt.$ **b)** $\left(-\dfrac{5}{2}\right)!.$

Ejercicio 8 [0.6 puntos] Determinar la solución general de la siguiente EDO para $t > 0$, utilizando funciones de Bessel:

$$t^2 x''(t) + t x'(t) + \left(7t^2 - 9\right) x(t) = 0.$$

Ejercicio 9 [0.8 puntos] Suponiendo que $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ son los ceros positivos de $J_1(t)$, desarrollar la función $f(t) = 5t^3 - 8t$ en serie de Fourier-Bessel del tipo $\sum_{n=1}^\infty \gamma_k J_1(\mu_k t)$ en el intervalo $[0,1]$.

Ejercicio 10 [0.7 puntos] Desarrollar en serie de Fourier-Legendre, la función

$$f(t) = t^4 - 2t^3 + 6.$$

Ejercicio 11 [0.7 puntos] Calcular **las derivadas primera y segunda** en el sentido de las distribuciones de la función

$$x(t) = |t| \cos(t), \qquad t \in (-16, 16),$$

haciendo los cálculos en detalle.

Tiempo: Una hora y cuarenta minutos.