Polinomios ortogonales

- Polinomios de Legendre
- Polinomios de Hermite
- Polinomios de Laguerre

Ec. de Legendre de orden α

$$(1-t^2)x''(t) - 2tx'(t) + \alpha(\alpha+1)x(t) = 0.$$

- α es un parámetro real.
- Surge al resolver la ec. de Laplace en coordenadas esféricas.
- Se resuelve por el método de series de potencias.
- Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se define **el polinomio de Legendre de grado** n como el único polinomio $P_n(t)$ que es solución de la ec. de Legendre de orden n y verifica $P_n(1) = 1$.
- También se utilizan en integración numérica (fórmulas de Gauss).

Propiedades de los polinomios de Legendre

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}, \quad P_3(t) = \frac{5t^3 - 3t}{2},$$

$$P_4(t) = \frac{35t^4 - 30t^2 + 3}{8}, \quad P_5(t) = \frac{63t^5 - 70t^3 + 15t}{8},$$

$$P_6(t) = \frac{231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5}{16}, \ldots$$

- Si n es par, $P_n(t)$ es una función par.
- Si n es impar, $P_n(t)$ es una función impar.
- Se pueden generar usando la **Fórmula de Rodrigues**

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

Problema de Sturm-Liouville

Llamando $\lambda = \alpha(\alpha + 1)$, escribimos la Ec. de Legendre en la forma autodjunta

$$\left((1 - t^2)x'(t)\right)' + \lambda x(t) = 0.$$

Se trata "casi" de un PRSL con $p(t) = 1 - t^2$, $q(t) = 0$ y $s(t) = 1$. Notar que $p(t) > 0$ si $t \in (-1, 1)$, pero $p(-1) = p(1) = 0$. Por ello se requieren las condiciones de que $x(t)$ y $x'(t)$ sean finitas cuando $t \to \pm 1$.

Los valores propios vienen dados por $\lambda_n = n(n + 1)$ con $n = 0, 1, \ldots$, mientras que las funciones propias asociadas son

$$x_n(t) = cP_n(t),$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $c \in \mathbb{R}$.

Series de Fourier-Legendre

i) Dados $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ distintos, se verifica $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt = 0$.

ii) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se verifica $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n^2(t)dt = \frac{2}{2n+1}$.

iii) Dada f una función cualquiera C^1 a trozos en $[-1, 1]$, se verifica que

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n P_n(t) \quad \forall\ t \in (-1, 1),$$

con

$$\delta_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(t)P_n(t)dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

iv) Todo polinomio de grado N se puede escribir como combinación lineal de $P_0(t)$, $P_1(t)$, ..., $P_N(t)$.

Ec. de Hermite de orden α

$$x''(t) - 2tx'(t) + 2\alpha x(t) = 0.$$

- α es un parámetro real.
- Surge en Mecánica Cuántica, al resolver la ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico.
- Se resuelve por el método de series de potencias.
- Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se define **el polinomio de Hermite de grado** n como el único polinomio $H_n(t)$ que es solución de la ec. de Hermite de orden n y con coeficiente de t^n igual a 2^n.
- También se utilizan en integración numérica (fórmulas de Gauss).

Propiedades de los polinomios de Hermite

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2, \quad H_3(t) = 8t^3 - 12t,$$

$$H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12, \; H_5(t) = 32t^5 - 160t^3 + 120t,$$

$$H_6(t) = 64t^6 - 480t^4 + 720t^2 - 120, \ldots$$

- Si n es par, $H_n(t)$ es una función par.
- Si n es impar, $H_n(t)$ es una función impar.
- Se pueden generar usando la **Fórmula de Rodrigues**

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}.$$

Problema de Sturm-Liouville

Llamando $\lambda = 2\alpha$, escribimos la Ec. de Hermite en la forma autodjunta

$$\left(e^{-t^2}x'(t)\right)' + \lambda e^{-t^2}x(t) = 0.$$

Se trata "casi" de un PRSL con $p(t) = e^{-t^2}$, $q(t) = 0$ y $s(t) = e^{-t^2}$. Notar que $p(t) > 0$ si $t \in \mathbb{R}$, pero $\mathbb{R}$ no es un intervalo acotado. Por ello se requieren las condiciones de que $e^{-t^2/2}x(t)$ y $(e^{-t^2/2}x(t))'$ sean finitos cuando $t \to \pm\infty$.

Los valores propios vienen dados por $\lambda_n = 2n$ con $n = 0, 1, \ldots$, mientras que las funciones propias asociadas son

$$x_n(t) = cH_n(t),$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $c \in \mathbb{R}$.

Series de Fourier-Hermite

i) Dados $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ distintos, se verifica
$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) H_m(t) e^{-t^2}\, dt = 0.$$

ii) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se verifica $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(t) e^{-t^2}\, dt = 2^n n! \sqrt{\pi}$.

iii) Dada f una función cualquiera C^1 a trozos en cada intervalo $[-L, L]$ tal que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) e^{-t^2}\, dt < +\infty,$$
se verifica que
$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n H_n(t) \quad \forall\ t \in (-\infty, +\infty),$$
con
$$\rho_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) H_n(t) e^{-t^2}\, dt \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

iv) Todo polinomio de grado N se puede escribir como combinación lineal de $H_0(t)$, $H_1(t)$, $\ldots$, $H_N(t)$.

Ec. de Laguerre de orden α

$$tx''(t) + (1 - t)x'(t) + \alpha x(t) = 0$$

- α es un parámetro real.
- Surge en Mecánica Cuántica, al resolver la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno.
- Se resuelve por el método de Frobenius.
- Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se define **el polinomio de Laguerre de grado** n como el único polinomio $L_n(t)$ que es solución de la ec. de Laguerre de orden n y verifica $L_n(0) = 1$.
- También se utilizan en integración numérica (fórmulas de Gauss).

Propiedades de los polinomios de Laguerre

$$L_0(t) = 1, \quad L_1(t) = -t + 1, \quad L_2(t) = \frac{1}{2!}(t^2 - 4t + 2),$$

$$L_3(t) = \frac{1}{3!}(-t^3 + 9t^2 - 18t + 6),$$

$$L_4(t) = \frac{1}{4!}(t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24),$$

$$L_5(t) = \frac{1}{5!}(-t^5 + 25t^4 - 200t^3 + 600t^2 - 600t + 120),$$

$$L_6(t) = \frac{1}{6!}(t^6 - 36t^5 + 450t^4 - 2400t^3 + 5400t^2 - 4320t + 720), \ldots$$

- No tienen simetría (par ni impar).
- Se pueden generar usando la **Fórmula de Rodrigues**

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right).$$

Problema de Sturm-Liouville

Llamando $\lambda = \alpha$, escribimos la Ec. de Laguerre en la forma autodjunta

$$\left(te^{-t}x'(t)\right)' + \lambda e^{-t}x(t) = 0.$$

Se trata "casi" de un PRSL con $p(t) = te^{-t}$, $q(t) = 0$ y $s(t) = e^{-t}$. Notar que $p(t) > 0$ si $t \in (0, +\infty)$, pero $(0, +\infty)$ no es un intervalo acotado. Por ello se requieren las condiciones de que $x(t)$ sea finita cuando $t \to 0^+$ y que $e^{-t}x(t)$ también sea finita cuando $t \to +\infty$.

Los valores propios vienen dados por $\lambda_n = n$ con $n = 0, 1, \ldots,$ mientras que las funciones propias asociadas son

$$x_n(t) = cL_n(t),$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $c \in \mathbb{R}$.

Series de Fourier-Laguerre

i) Dados $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ distintos, se verifica
$\int_0^{+\infty} L_n(t) L_m(t) e^{-t} dt = 0.$

ii) Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se verifica $\int_0^{+\infty} L_n^2(t) e^{-t} dt = 1.$

iii) Dada f una función cualquiera C^1 a trozos en cada intervalo $[a, b] \subset (0, +\infty)$ tal que

$$\int_0^{+\infty} f^2(t) e^{-t} dt < +\infty,$$

se verifica que

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n L_n(t) \quad \forall\ t \in (0, +\infty),$$

con

$$\sigma_n = \int_0^{+\infty} f(t) L_n(t) e^{-t} dt \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

iv) Todo polinomio de grado N se puede escribir como combinación lineal de $L_0(t)$, $L_1(t)$, ..., $L_N(t)$.

Abramowitz and Stegun: Handbook of Mathematical Functions

Mucha más información en el Capítulo 22. Versión online:. Link

22.2. Orthogonality Relations

	$f_n(x)$	Name of Polynomial	a	b	$w(x)$	Standardization	h_n	Remarks
22.2.1	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi	-1	1	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}$	$\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\alpha>-1,\ \beta>-1$
22.2.2	$G_n(p,q,x)$	Jacobi	0	1	$(1-x)^{p-q}x^{q-1}$	$k_n=1$	$\frac{n!\Gamma(n+q)\Gamma(n+p)\Gamma(n+p-q+1)}{(2n+p)\Gamma^2(2n+p)}$	$p-q>-1,\ q>0$
22.2.3	$C_n^{(\alpha)}(x)$	Ultraspherical (Gegenbauer)	-1	1	$(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$	$C_n^{(\alpha)}(1)=\binom{n+2\alpha-1}{n}$ $(\alpha\neq 0)$	$\frac{\pi 2^{1-2\alpha}\Gamma(n+2\alpha)}{n!(n+\alpha)[\Gamma(\alpha)]^2}$ $\alpha\neq 0$	$\alpha>-\frac{1}{2}$
						$C_n^{(0)}(1)=\frac{2}{n}$, $C_0^{(0)}(1)=1$	$\frac{2\pi}{n^2}$ $\alpha=0$	
22.2.4	$T_n(x)$	Chebyshev of the first kind	-1	1	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$T_n(1)=1$	$\begin{cases}\frac{\pi}{2} & n\neq 0\\ \pi & n=0\end{cases}$	
22.2.5	$U_n(x)$	Chebyshev of the second kind	-1	1	$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$	$U_n(1)=n+1$	$\frac{\pi}{2}$	
• **22.2.6**	$C_n(x)$	Chebyshev of the first kind	-2	2	$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$C_n(2)=2$	$\begin{cases}4\pi & n\neq 0\\ 8\pi & n=0\end{cases}$	
• **22.2.7**	$S_n(x)$	Chebyshev of the second kind	-2	2	$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$	$S_n(2)=n+1$	π	
22.2.8	$T_n^*(x)$	Shifted Chebyshev of the first kind	0	1	$(x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$T_n^*(1)=1$	$\begin{cases}\frac{\pi}{2} & n\neq 0\\ \pi & n=0\end{cases}$	
22.2.9	$U_n^*(x)$	Shifted Chebyshev of the second kind	0	1	$(x-x^2)^{\frac{1}{2}}$	$U_n^*(1)=n+1$	$\frac{\pi}{8}$	
22.2.10	$P_n(x)$	Legendre (Spherical)	-1	1	1	$P_n(1)=1$	$\frac{2}{2n+1}$	
22.2.11	$P_n^*(x)$	Shifted Legendre	0	1	1		$\frac{1}{2n+1}$	

*See page II.

ORTHOGONAL POLYNOMIALS

<< To page 774 | Table of Contents | Subject Index | To page 776 >>

22.2. Orthogonality Relations—Continued

22.2.12	$L_n^{(\alpha)}(x)$	Generalized Laguerre	0	∞	$e^{-x}x^{\alpha}$	$k_n=\frac{(-1)^n}{n!}$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}$	$\alpha>-1$
22.2.13	$L_n(x)$	Laguerre	0	∞	e^{-x}	$k_n=\frac{(-1)^n}{n!}$	1	
* 22.2.14	$H_n(x)$	Hermite	$-\infty$	∞	e^{-x^2}	$e_n=(-1)^n$	$\sqrt{\pi}2^n n!$	
* 22.2.15	$He_n(x)$	Hermite	$-\infty$	∞	$e^{-\frac{x^2}{2}}$	$e_n=(-1)^n$	$\sqrt{2\pi}n!$	

*See page II.

22.3. Explicit Expressions

$$f_n(x)=d_n\sum_{m=0}^{N}c_m g_m(x)$$

	$f_n(x)$	N	d_n	c_m	$g_m(x)$	k_n	Remarks
22.3.1	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	n	$\frac{1}{2^n}$	$\binom{n+\alpha}{m}\binom{n+\beta}{n-m}$	$(x-1)^{n-m}(x+1)^m$	$\frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}$	$\alpha>-1,\ \beta>-1$
22.3.2	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	n	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$	$\binom{n}{m}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+m+1)}{2^m\Gamma(\alpha+m+1)}$	$(x-1)^m$	$\frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}$	$\alpha>-1,\ \beta>-1$
22.3.3	$G_n(p,q,x)$	n	$\frac{\Gamma(q+n)}{\Gamma(p+2n)}$	$(-1)^m\binom{n}{m}\frac{\Gamma(p+2n-m)}{\Gamma(q+n-m)}$	x^{n-m}	1	$p-q>-1,\ q>0$
22.3.4	$C_n^{(\alpha)}(x)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$	$(-1)^m\frac{\Gamma(\alpha+n-m)}{m!(n-2m)!}$	$(2x)^{n-2m}$	$\frac{2^n}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$	$\alpha>-\frac{1}{2},\ \alpha\neq 0$
22.3.5	$C_n^{(0)}(x)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	1	$(-1)^m\frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}$	$(2x)^{n-2m}$	$\frac{2^n}{n}\quad n\neq 0$	$n\neq 0,\ C_0^{(0)}(1)=1$
22.3.6	$T_n(x)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\frac{n}{2}$	$(-1)^m\frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}$	$(2x)^{n-2m}$	2^{n-1}	
22.3.7	$U_n(x)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	1	$(-1)^m\frac{(n-m)!}{m!(n-2m)!}$	$(2x)^{n-2m}$	2^n	
22.3.8	$P_n(x)$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\frac{1}{2^n}$	$(-1)^m\binom{n}{m}\binom{2n-2m}{n}$	x^{n-2m}	$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$	