Problema 1.1 Encontrar el vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{A} = (4, -1, 3)$, $\vec{B} = (-2, 1, -2)$

El vector $\vec{A} \times \vec{B}$ es un vector perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k} - 2\vec{k} - 3\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$= -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Si lo dividimos por su módulo, tendremos un vector unitario:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

El vector opuesto también sería solución.

Problema 2.-1 Determinar los ángulos que el vector de componentes (1,4,3) forma con los ejes coordenados.

El producto escalar de este vector por el vector unitario $\vec{i}$ será:

$$\vec{v}\cdot\vec{i} = v \cdot \cos\alpha = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$$

Realizando la misma operación con las componentes.

$$\vec{v}\cdot\vec{i} = v_x\cdot 1 + v_y\cdot 0 + v_z\cdot 0 = v_x = 1$$

Igualando las dos expresiones:

$$v\cos\alpha = v_x \Rightarrow \cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

Realizando de igual forma con los otros dos ejes:

$$\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{26}}$$

$$\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

Podemos chequear de forma trivial que:

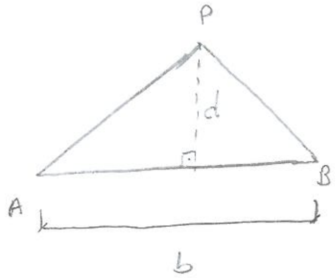
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Problema 3: 1ª Solución.

Determinar la distancia del punto P de coordenadas $(5,-5,3)$ a la recta que pasa por los puntos A y B de coordenadas $(1,0,1)$ y $(2,-2,3)$ respectivamente.

Los puntos A, B y P forman un triángulo.

Podemos calcular el área del triángulo de dos formas diferentes.



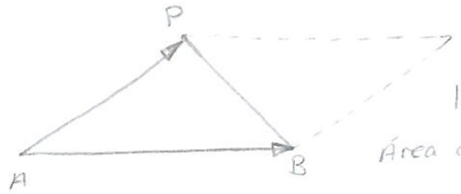
$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot d$$

donde b es la longitud de la base, es decir, la distancia entre los puntos A y B:

$$b = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2 + (3-1)^2}$$

$$= \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

Pero también podemos calcular el área del triángulo la mitad del módulo del producto vectorial de $\vec{AB}$ y $\vec{AP}$.



Área del paralelogramo $|\vec{AB}| \times |\vec{AP}|$

Área del triángulo $\frac{1}{2} |\vec{AB}| \times |\vec{AP}|$

$$\vec{AB} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{AP} = (5-1)\vec{i} + (-5-0)\vec{j} + (3-1)\vec{k} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & +2 \\ 4 & -5 & +2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 5\vec{k} + 8\vec{k} + 10\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$= 6\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AP}| = \sqrt{36+36+9} = \sqrt{81} = 9$$

Luego:

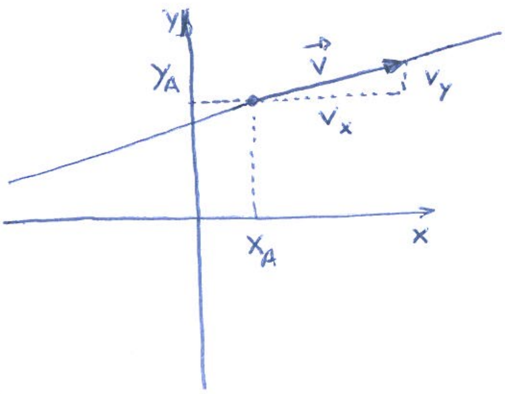
$$\frac{1}{2} b \cdot d = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AP}| \Longrightarrow \frac{1}{2} 3 \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 9 \Rightarrow \boxed{d = 3}$$

2ª Solución

Problema 3.- Determinar la distancia del punto P de coordenadas (5, -5, 3) a la recta que pasa por los puntos A y B de coordenadas (1, 0, 1) y (2, -2, 3) respectivamente

---

- Dadas las coordenadas de un punto (x_A, y_A, z_A) y un vector de componentes $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ queda definida una recta.



(Esquema en 2 D)

Los puntos de la recta tendrán como coordenadas (x_r, y_r, z_r) donde

$$x_r = x_A + \lambda v_x \qquad \text{con } \lambda \text{ un parámetro}$$
$$y_r = y_A + \lambda v_y \qquad -\infty < \lambda < +\infty$$
$$z_r = z_A + \lambda v_z$$

En el problema nos dan el punto A : (1, 0, 1)

El vector podemos calcularlo trivialmente, ya que nos dan dos puntos por los que pasa la recta

$$\vec{AB} = (2-1, \ -2-0, \ 3-1) = (1, -2, 2)$$

Luego los puntos de la recta tendrán como componentes

$$x_r = 1 + \lambda \qquad y_r = -2\lambda \qquad z_r = 1 + 2\lambda, \ -\infty < \lambda < +\infty$$

La distancia del punto P a cualquier punto de la recta caracterizado por un parámetro λ es (calcularemos la distancia al cuadrado para simplificar los cálculos analíticos):

$$d^2 = (x_r - x_p)^2 + (y_r - y_p)^2 + (z_r - z_p)^2$$
$$= (1+\lambda-5)^2 + (-2\lambda+5)^2 + (1+2\lambda-3)^2 = (\lambda-4)^2 + (5-2\lambda)^2 + (2\lambda-2)^2$$

$$d^2 = \lambda^2 + 16 - 8\lambda + 25 + 4\lambda^2 - 20\lambda + 4\lambda^2 + 4 - 8\lambda$$

$$= 9\lambda^2 - 36\lambda + 45$$

¿Para que valor de λ la distancia al cuadrado entre el punto P y la recta es mínima?

$$\frac{d}{d\lambda}(d^2) = 0$$

$$18\lambda - 36 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 2}$$

Para ese valor de λ, la distancia al cuadrado toma un valor

$$d^2(\lambda = 2) = 9 \cdot 4 - 36 \cdot 2 + 45 = 9$$

$\Rightarrow$ La distancia mínima del punto a la recta es:

$$\underline{\underline{d = \sqrt{9} = 3}}$$ (en las unidades de longitud utilizadas).

Problema 4.- Encontrar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{v} = (4, -2, -1)$ y que pasa por el punto Q de coordenadas $(2, -1, 5)$. Determinar la distancia del punto P de coordenadas $(3, 0, 4)$ a dicho plano.

- Sea $O(x, y, z)$ un punto genérico del plano perpendicular a $\vec{v} = (4, -2, -1)$

El vector $\vec{OQ} = (2-x, -1-y, 5-z)$ pertenece al plano buscado

Este vector tiene que ser perpendicular a $\vec{v}$, luego:

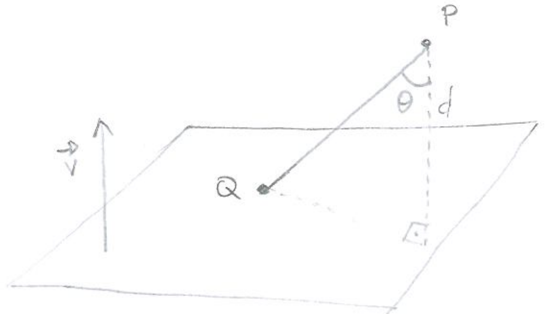
$$\vec{OQ} \cdot \vec{v} = 0$$

$$4 \cdot (2-x) - 2(-1-y) - 1 \cdot (5-z) = 0$$

$$8 - 4x + 2 + 2y - 5 + z = 0$$

$$-4x + 2y + z + 5 = 0$$

$$\boxed{4x - 2y - z = 5}$$

- 

La distancia d del punto Q al plano vendrá dada por

$$\cos\theta = \frac{d}{|\vec{QP}|}$$

$$\Rightarrow d = |\vec{QP}| \cdot \cos\theta$$

donde θ es el ángulo que forma el vector QP con la vertical al plano

Como sabemos que el vector $\vec{v}$ es perpendicular (vertical) al plano:

$$\vec{v} \cdot \vec{QP} = |\vec{v}| \cdot |\vec{QP}| \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{QP}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{QP}|}$$

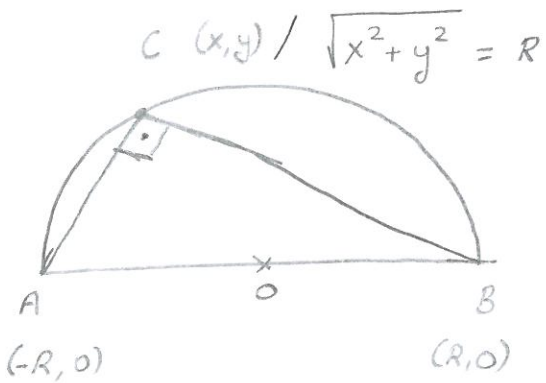
$$\boxed{d = |\vec{QP}| \cdot \cos\theta} = \cancel{|\vec{QP}|} \cdot \frac{|\vec{v} \cdot \vec{QP}|}{|\vec{v}| \cdot \cancel{|\vec{QP}|}} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{QP}|}{|\vec{v}|} = \frac{3}{\sqrt{16+4+1}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{21}}}$$

$\vec{QP} = (3-2, 0-(-1), 4-5) = (+1, 1, -1)$, $\quad \vec{v} \cdot \vec{QP} = 4 \cdot (+1) + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) =$

$= +4 - 2 + 1 = 3$

Problema 5.-

Demostrar que en una semicircunferencia cualquier triángulo inscrito con el diámetro como uno de sus lados es un triángulo rectángulo



Tomamos como origen de coordenadas el centro de la semicircunferencia.

Entonces las coordenadas de los puntos A y B vendrán dadas por:

A $(-R, 0)$

B $(R, 0)$

donde R es el radio de la semicircunferencia

Las coordenadas de un punto genérico C en la semicircunferencia vienen dadas por (x, y) donde las coordenadas verifican la condición

$$\sqrt{x^2+y^2} = R$$

Dados los tres puntos podemos calcular los vectores $\vec{AC}$ y $\vec{BC}$

$$\vec{AC} = (x-(-R),\ y) = (x+R,\ y)$$

$$\vec{BC} = (x-R,\ y)$$

Y el producto escalar de estos dos vectores vale:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = (x+R)\cdot(x-R) + y^2 = x^2 - R^2 + y^2$$

$$= x^2+y^2-R^2$$

$$= R^2-R^2$$

$$= 0$$

Como los módulos de $\vec{AC}$ y $\vec{BC}$ son no nulos, entonces $\vec{AC} \perp \vec{BC}$

Problema 6

Demostrar que los vectores $\vec{A} = (3, -2, 1)$ y $\vec{B} = (1, -3, 5)$ y $\vec{C}\ (2, 1, -4)$ forman un triángulo rectángulo.

Calcular el valor de los otros dos ángulos.

Para probar que es un triángulo rectángulo, calculamos el producto escalar de los vectores entre sí. Si alguno de ellos es cero quiere decir que esos vectores son perpendiculares.

Efectivamente se verifica que:

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = 6 - 2 - 4 = 0.$$

El ángulo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$ vale:

$$\cos \theta_{AB} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{3+6+5}{\sqrt{9+4+1}\ \sqrt{1+9+25}} = \frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}} = \sqrt{\frac{14}{35}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

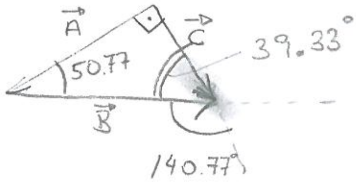
$$\Rightarrow \quad \theta_{AB} = 50.77^\circ$$

Y el formado por $\vec{B}$ y $\vec{C}$:

$$\cos \theta_{BC} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{B}| \cdot |\vec{C}|} = \frac{2 - 3 - 20}{\sqrt{1+9+25}\ \sqrt{4+1+16}} = -\frac{21}{\sqrt{21}\sqrt{35}} = -\sqrt{\frac{21}{35}} = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_{BC} = 140.77^\circ$$

Los ángulos del triángulo serán pues: 90°, 50.77°, $180^\circ - \theta_{BC} = 39.33^\circ$



Problema 7.- Calcular el área del triángulo del problema anterior. Deducir de esta forma el teorema de los senos en trigonometría.

Sabemos que el producto vectorial de dos vectores es otro vector cuyo módulo es igual al área del paralelogramo formado con ayuda de esos dos vectores. El área del triángulo será la mitad

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}| = \frac{1}{2}|\vec{B}\times\vec{C}| = \frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{C}| \qquad (1)$$

Desarrollando la expresión anterior en función de módulos y senos de los ángulos:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} AB \operatorname{sen}\theta_{AB} = \frac{1}{2} BC \operatorname{sen}\theta_{BC} = \frac{1}{2} AC \operatorname{sen}\theta_{AC}$$

Dividiendo por ABC y multiplicando por 2:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_{AB}}{C} = \frac{\operatorname{sen}\theta_{BC}}{A} = \frac{\operatorname{sen}\theta_{AC}}{B}$$

Para conocer finalmente el área, hacemos las operaciones indicadas en (1):

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k} + 2\vec{k} + 3\vec{i} - 15\vec{j} =$$

$$= -7\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{7^2 + (2\cdot 7)^2 + 7^2} = \sqrt{6\cdot 7^2} = 7\cdot\sqrt{6}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}| = \frac{7}{2}\sqrt{6} = 7\sqrt{\frac{6}{4}} = 7\sqrt{\frac{3}{2}} \quad (\text{unidades longitud})^2$$

Problema 8.

Hallar el valor de la expresión $\vec{A} \times \overrightarrow{M_oB}$ siendo

$\vec{A} = (2, -1, 2)$, $\vec{B}(1, -2, -1)$ y estando aplicado este último vector

en el punto $P = (1, 2, 0)$

Primero calculamos el momento del vector $\vec{B}$ con respecto al origen:

$$\overrightarrow{M_oB} = \vec{r} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{k} - 2\vec{k} + \vec{j}$$

$$= -2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$

Finalmente calculamos

$$\vec{A} \times \overrightarrow{M_oB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & +1 & -4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} - 2\vec{k} - 2\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$= 2\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$$

Problema 9.- Los vectores $\vec{A} = (-3, 2, -1)$, $\vec{B} = (1, -3, 5)$ y $\vec{C} = (2, 1, -4)$ están aplicados en los puntos $(2, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ y $(1, 2, 0)$ respectivamente.

a) ¿Cuál es la resultante del conjunto de vectores?

b) ¿Cuál es el momento resultante de todo el sistema calculado respecto del origen de coordenadas?

c) ¿Y si lo calculamos con respecto al punto $(3, -2, -1)$?

a) La resultante del sistema será la suma de todos los vectores

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (-3+1+2)\,\vec{i} + (2-3+1)\cdot\vec{j} + (-1+5-4)\cdot\vec{k} = 0$$

b) El momento resultante de todo el sistema será la suma de los momentos de todos los vectores. Si el punto respecto al cual calculamos los momentos es el origen O

$$\vec{Oa} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\bar{i} - 6\bar{j} + 4\bar{k} + 3\bar{k} - 4\bar{i} + 2\bar{j} =$$

$$= \underline{-5\bar{i} - 4\bar{j} + 7\bar{k}}$$

$$\vec{ob} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \vec{j} + 3\vec{k} + 3\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$= \underline{3\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}$$

$$\vec{Oc} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -8\bar{i} + \bar{k} - 4\bar{k} + 4\bar{j}$$

$$= \underline{-8\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}}$$

$$\boxed{\vec{M}_o = \vec{Oa} \times \vec{A} + \vec{ob} \times \vec{B} + \vec{Oc} \times \vec{C} =} \; (-5+3-8)\,\vec{i} + (-4+6+4)\,\bar{j} + (7+3-3)\,\bar{k}$$

$$= \boxed{-10\,\vec{i} + 6\,\vec{j} + 7\,\vec{k}}$$

c) Si cambiamos el punto con respecto al cuál calculamos los momentos podemos calcular el momento resultante utilizando los resultados de los apartados (a) y (b)

El vector que une el punto P con el punto de aplicación del vector $\vec{A}$ es:

$$\vec{Pa} = \vec{PO} + \vec{Oa}$$

Para el resto de los puntos de aplicación se sigue la misma forma.

Luego.

$$\vec{M}_P = \vec{Pa} \times \vec{A} + \vec{Pb} \times \vec{B} + \vec{Pc} \times \vec{C}$$

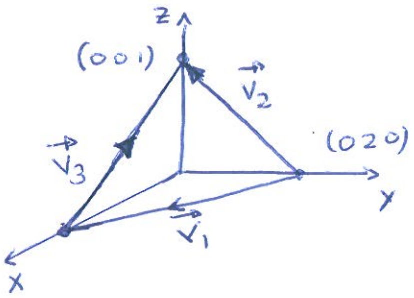
$$= (\vec{PO} + \vec{Oa}) \times \vec{A} + (\vec{PO} + \vec{Ob}) \times \vec{B} + (\vec{PO} + \vec{Oc}) \times \vec{C}$$

$$= \vec{PO} \times (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) + (\vec{Oa} \times \vec{A} + \vec{Ob} \times \vec{B} + \vec{Oc} \times \vec{C})$$

$$= \vec{PO} \times \vec{R} + \vec{M}_O \underset{\vec{R}=0}{=} \vec{M}_O$$

En el caso en que la resultante $\vec{R}$ del sistema sea nula, el momento resultante de todo el sistema de vectores no depende del punto respecto al cual se calcule.

Problema 10| Los vectores de la figura tienen módulos que guardan relación



$|\vec{v}_2| = 2|\vec{v}_1| = 2|\vec{v}_3|$. Calcular

a) La resultante del sistema

b) El momento resultante respecto al origen

c) El campo de momentos.

El primer paso es calcular las componentes de los vectores.

Para el vector $\vec{V}_2$ conocemos el punto origen (0 2 0) y el extremo (0 0 1), luego:

$$\vec{V}_2 = (0-0)\cdot\vec{i} + (0-2)\,\vec{j} + (1-0)\,\vec{k} = -2\vec{j} + \vec{k}$$

$$|\vec{V}_2| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

- La dirección del vector $\vec{V}_3$ también puede ser conocida: tiene como origen un punto $(x, 0, 0)$ y como extremo el punto (0 0 1) luego un vector en la dirección de $\vec{V}_3$ será el $(-x, 0, 1)$.

Para conocer esa coordenada x atendemos a la figura. En ella vemos como $2\vec{V}_3$ conecta los puntos origen y extremo anteriormente citados, luego

$$2|\vec{V}_3| = \sqrt{x^2+1} = \sqrt{5} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

Así el vector que lleva la dirección de $\vec{V}_3$ es $(-2 \quad 0 \quad 1)$

$\vec{V}_3$ es un vector en esa dirección de módulo $|\vec{v}_3| = \frac{|\vec{v}_1|}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Para conocer las componentes de $\vec{V}_3$ hay que reescalar el vector que lleva su dirección para que tenga módulo $\sqrt{5}/2$

$$\vec{V}_3 = (\lambda\cdot(-2), \lambda 0, \lambda) \Rightarrow |\vec{V}_3| = \sqrt{(2\lambda)^2 + \lambda^2} = \sqrt{5\lambda^2} = \sqrt{5}\cdot\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Luego $\quad \vec{v}_3 = \frac{1}{2}(-2 \quad 0 \quad 1) = (-1 \quad 0 \quad \frac{1}{2})$

- También podemos conocer el vector que lleva la dirección de $\vec{v}_1$:

  - origen: $(0 \quad 2 \quad 0)$
  - extremo: $(2 \quad 0 \quad 0)$

Vector en la dirección de $\vec{v}_1$: $(2 \quad -2 \quad 0)$

Reescalamos este vector para que tenga como módulo $|\vec{v}_1| = \frac{|\vec{v}_2|}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\vec{v}_1 = (2\lambda, \; -2\lambda, \; 0) \Rightarrow |\vec{v}_1| = \sqrt{4\lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{8\lambda^2} = 2\sqrt{2}\,\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$$

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}, \; -\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}, \; 0\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \; -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \; 0\right)$$

- Ya conocemos los tres vectores

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \; -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \; 0\right)$$

$$\vec{v}_2 = (0, \; -2, \; 1)$$

$$\vec{v}_3 = \left(-1, \; 0, \; \frac{1}{2}\right)$$

La resultante será la suma vectorial de los tres vectores:

$$\underline{\underline{\vec{R}}} = \vec{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 = \underline{\underline{\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} - 1, \; -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} - 2, \; \frac{3}{2}\right)}}$$

b) El momento resultante de todo el sistema será la suma de los momentos de todos los vectores. Si el punto con respecto al cual calculamos los momentos es el origen O

$$\vec{Oa} \times \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\vec{k} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

$$\vec{Ob} \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i}$$

$$\vec{Oc} \times \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -2 \cdot \frac{1}{2}\vec{j} = -\vec{j}$$

$$\vec{M}_o = \vec{Oa} \times \vec{v}_1 + \vec{Ob} \times \vec{v}_2 + \vec{Oc} \times \vec{v}_3 = 2\vec{i} - \vec{j} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

c) Si cambiamos el punto con respecto al cual calculamos los momentos podemos calcular el momento resultante utilizando los resultados de los apartados (a) y (b)

El vector que une el punto P con el punto de aplicación del vector $\vec{v}_1$ es:

$$\vec{Pa} \quad \vec{PO} + \vec{Oa}$$

Para el resto de los puntos de aplicación se sigue la misma forma.

Luego:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{M}_P} &= \vec{Pa} \times \vec{v}_1 + \vec{Pb} \times \vec{B} + \vec{Pc} \times \vec{C} \\ &= (\vec{PO} + \vec{Oa}) \times \vec{v}_1 + (\vec{PO} + \vec{Ob}) \times \vec{v}_2 + (\vec{PO} + \vec{Oc}) \times \vec{v}_3 \\ &= \vec{PO} \times (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) + (\vec{Oa} \times \vec{v}_1 + \vec{Ob} \times \vec{v}_2 + \vec{Oc} \times \vec{v}_3) \\ &= \underline{\vec{PO} \times \vec{R} + \vec{M}_o} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Problema 11}}$

Siendo $\vec{R}$ el vector de componentes $\left(\frac{1}{t}, t^2, e^{-t}\right)$, calcular:

$$\frac{d\vec{R}}{dt}, \quad \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}, \quad \frac{dR}{dt}, \quad \left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right|, \quad \left|\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right|, \quad \int \vec{R}\, dt$$

a) $$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dt}\vec{i} + \frac{dt^2}{dt}\vec{j} + \frac{de^{-t}}{dt}\cdot\vec{k}$$

$$= -\frac{1}{t^2}\vec{i} + 2t\,\vec{j} - e^{-t}\,\vec{k}$$

b) $$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right) = \frac{d(-t^{-2})}{dt^2}\vec{i} + \frac{d(2t)}{dt}\vec{j} - \frac{d(e^{-t})}{dt}\vec{k}$$

$$= \frac{2}{t^3}\vec{i} + 2\vec{j} + e^{-t}\vec{k}$$

c) $$R = |\vec{R}| = \sqrt{\frac{1}{t^2} + t^4 + e^{-2t}}$$

$$\frac{d|\vec{R}|}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1}{t^2} + t^4 + e^{-2t}\right)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{t^2} + t^4 + e^{-2t}\right)^{-1/2}\right]\cdot\left(-\frac{2}{t^3} + 4t^3 - 2e\right.$$

$$= \frac{-\frac{1}{t^3} + 2t^3 - e^{-2t}}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + t^4 + e^{-2t}}}$$

d) $$\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \sqrt{\frac{1}{t^4} + 4t^2 + e^{-2t}}$$

e) $$\left|\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\right| = \sqrt{\frac{4}{t^6} + 4 + e^{-2t}}$$

f) $$\int \vec{R}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt\ \vec{i} + \int t^2\, dt\ \vec{j} + \int e^{-t}\, dt\ \vec{k} = \ln t\ \vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} - e^{-t}\vec{k} + C$$

constante de integración

Problema 12. a)

Siendo $\vec{A} = (3x^2+6y)\cdot\vec{i} - 14yz\cdot\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$ hallar $\int_c \vec{A}\cdot d\vec{r}$

a lo largo de las siguientes trayectorias:

a) $x=t$, $y=t^2$; $z=t^3$ desde $t=0$ hasta $t=1$.

El elemento diferencial de trayectoria tendrá un valor:

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

Si nos movemos en la trayectoria un elemento dt, ¿cómo cambian dx, dy, dz?

Simplemente tomamos las derivadas:

$$x(t) = t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow dx = dt$$

$$y(t) = t^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2t \Rightarrow dy = 2t\,dt$$

$$z(t) = t^3 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 3t^2 \Rightarrow dz = 3t^2\,dt$$

Luego el elemento diferencial de trayectoria vale:

$$d\vec{r} = dt\;\vec{i} + 2t\,dt\;\vec{j} + 3t^2\,dt\;\vec{k}$$

A lo largo de la trayectoria, el campo vectorial tomará un valor:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (3x^2+6y)\,\vec{i} - 14yz\,\vec{j} + 20xz^2\,\vec{k} \\ &= (3t^2+6t^2)\,\vec{i} - 14t^2\cdot t^3\,\vec{j} + 20\,t\cdot t^6\,\vec{k} \\ &= 9t^2\,\vec{i} - 14t^5\,\vec{j} + 20t^7\,\vec{k}\end{aligned}$$

El producto escalar $\vec{A}\cdot d\vec{r}$ vale:

$$\vec{A}\cdot d\vec{r} = 9t^2\,dt - 28t^6\,dt + 60t^9\,dt$$

Y la circulación:

$$\int_c \vec{A}\,d\vec{r} = \int_0^1 9t^2 dt - \int_0^1 28t^6 dt + \int_0^1 60t^9 dt = \left.\frac{9t^3}{3} - \frac{28t^7}{7} + \frac{60t^{10}}{10}\right]_0^1$$

$$= 3 - 4 + 6 = 5 /\!/$$

Problema 12. b.- Siendo $\vec{A} = (3x^2+6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$

hallar $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$ a lo largo de la trayectoria:

b) La quebrada que une los puntos (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1,

Podemos dividir la trayectoria total C en tres trayectorias:

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

donde:

- C_1 es la línea recta que va desde (0, 0, 0) hasta (1, 0, 0)
- C_2 " (1, 0, 0) hasta (1, 1, 0)
- C_3 " (1, 1, 0) hasta (1, 1, 1)

La circulación del vector $\vec{A}$ a lo largo de la trayectoria C se puede descomponer en la suma de la circulación de A a lo largo de la trayectoria C_1, más " " " " " "
" " C_2, " " " "
" C_3:

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{A}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{A}\cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

- Calculemos la primera de estas integrales:

$$\int_{C_1} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} A_x\, dx + \int_{C_1} A_y\, dy + \int_{C_2} A_z\, dz$$

La trayectoria se puede parametrizar como:

$$x(t) = t \qquad 0 \le t \le 1$$
$$y(t) = 0$$
$$z(t) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} A_x\, dx = \int_{C_1} (3x^2 + 6y)\, dx \underset{\uparrow}{=} \int_{t=0}^{t=1} 3t^2\, dt = 3\frac{t^3}{3}\Big]_0^1 = 1$$

particularizando a la trayectoria C_1

— o —— o —

- Calculemos la segunda de las circulaciones.

La segunda trayectoria se puede parametrizar como:

$$x(t) = 1$$
$$y(t) = t \qquad 0 \le t \le 1$$
$$z(t) = 0$$

$$\int_{C_2} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2} A_y\, dy = \int_{C_2} (-14yz)\, dy \underset{\uparrow}{=} 0$$

particularizando a la trayectoria C_2

• Calculemos la tercera de las circulaciones:

La tercera trayectoria se puede parametrizar como:

$$x(t) = 1$$
$$y(t) = 1$$
$$z(t) = t \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\int_{C_3} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{C_3} A_z \, dz = \int_{C_3} 20\, x z^2 \, dz = \int_{t=0}^{t=1} 20\, t^2 \, dt = \left. \frac{20\, t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{20}{3}$$

particularizando a la trayectoria C_3

Sumando las tres circulaciones:

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$= 1 + 0 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

Problema 13.-1 Hallar $\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$ extendida a la superficies S

del cubo limitado por los planos $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=1,$

siendo $\vec{A} = 2yz\ \vec{i} - (x+3y-2)\vec{j} + (x^2+z)\vec{k}.$

Tenemos que calcular 6 integrales, una para cada una de las caras.

- Empezamos por el plano $x=1$.

Un vector unitario a ese plano es $\hat{n} = \vec{i}$

Los puntos de ese plano tienen por coordenadas $(x=1,\ y,\ z) \Big/ \begin{matrix} 0\leq y\leq 1 \\ 0\leq z\leq 1\end{matrix}$

Por lo tanto, el campo vectorial toma el valor:

$$\vec{A} = 2yz\ \vec{i} - (1+3y-2)\vec{j} + (1+z)\vec{k}$$
$$= 2yz\ \vec{i} - (3y-1)\vec{j} + (1+z)\vec{k}$$

Y la integral finalmente es:

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1} dy\,dz \left[2yz\ \vec{i} - (3y-1)\vec{j} + (1+z)\vec{k}\right]\cdot\vec{i}$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1} dy\,dz\ 2yz = 2\ \frac{y^2}{2}\Big]_0^1\ \frac{z^2}{2}\Big]_0^1 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Para el resto de los planos:

- $x = 0$

$\hat{n} = -\vec{i}$

$\vec{A} = 2yz\,\vec{i} - (3y-2)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^1 dy\,dz\;(-2yz) = -\frac{1}{2}$$

- $y = 0$

$\hat{n} = -\vec{j}$

$\vec{A} = -(x-2)\,\vec{j} + (x^2+z)\,\vec{k}$

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^1 dx\,dz\;(x-2) = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)_0^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

- $y = 1$

$\hat{n} = \vec{j}$

$\vec{A} = 2z\,\vec{i} - (x+3-2)\,\vec{j} + (x^2+z)\,\vec{k}$

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^1 dx\,dz\;(-x-1) = -\frac{x^2}{2} - x\Big]_0^1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

- $z = 0$

$\hat{n} = -\vec{k}$

$\vec{A} = -(x+3y-2)\,\vec{j} + x^2\,\vec{k}$

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_0^1 \int_0^1 dx\,dy\,(-x^2) = -\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

· $z = 1$

$\hat{n} = \vec{k}$

$\vec{A} = 2yz\,\vec{i} - (x+3y-2)\,\vec{j} + (x^2+1)\,\vec{k}$

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_0^1\int_0^1 (x^2+1)\,dx\,dy = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)_0^1 = \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$$

El resultado final será la suma de los 6 resultados parciales:

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{6}{2} + \frac{3}{3}$$

$$= -3+1 = \underline{-2}$$

Problema 14.

Determinar el gradiente de las funciones escalares

(a) $$F_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(b) $$F_2 = 3x^2y^4 + z^3 \cos y$$

$$\vec{\nabla}\cdot F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

(a) Simplemente tomando las derivadas anteriores:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right] = -\frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot(2x) = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Idénticos resultados se obtendrían para las componentes y, z (simplemente habría que cambiar el numerador por la coordenada correspondiente).

$$\vec{\nabla}\cdot F_1 = -\frac{x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\cdot\frac{1}{|\vec{r}|^2} = -\frac{\vec{u}_{\vec{r}}}{|\vec{r}|^2}$$

(b)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 6xy^4 \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} &= 12x^2y^3 - z^3 \operatorname{sen} y \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= 3z^2 \cos y \end{aligned}\right\} \quad \vec{\nabla} F_2 = 6xy^4\,\vec{i} + (12x^2y^3 - z^3 \operatorname{sen} y)\,\vec{j} + 3z^2\cos y\,\vec{k}$$