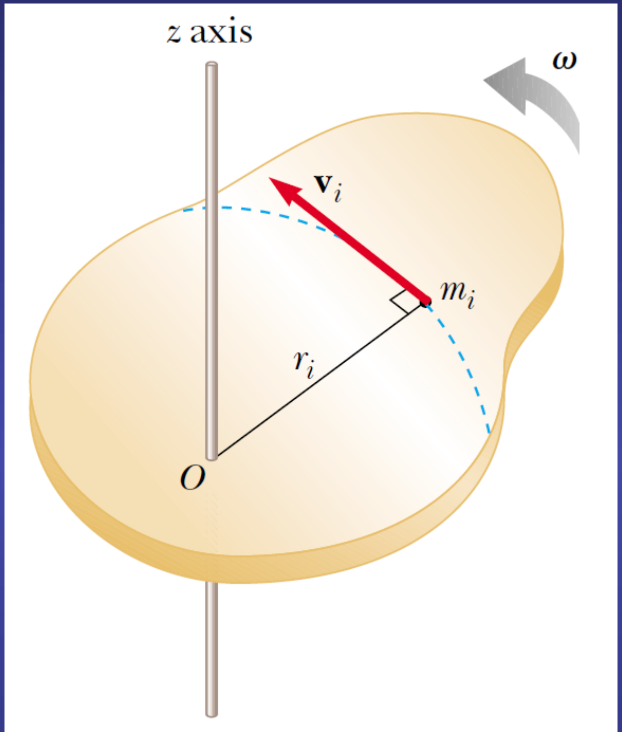
Movimiento de rotación



Javier Junquera

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

CITIMAC

Bibliografía

Física, Volumen 1, 3° edición

Raymod A. Serway y John W. Jewett, Jr.

Ed. Thomson

ISBN: 84-9732-168-5

Capítulo 10

Física, Volumen 1

R. P. Feynman, R. B. Leighton, y M. Sands

Ed. Pearson Eduación

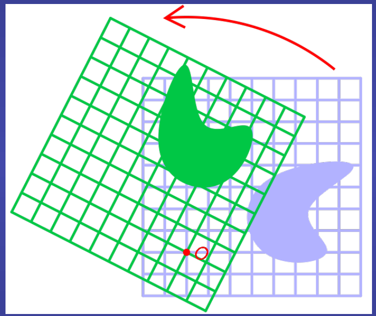
ISBN: 968-444-350-1

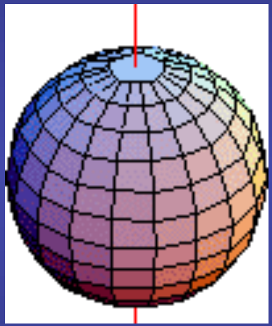
Capítulo 8

Definición de traslación, rotación y vibración

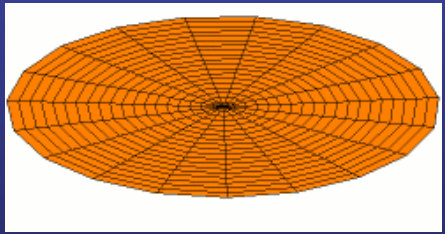
Traslación: las posiciones de todas las partículas del cuerpo se desplazan una misma cantidad.

Rotación: el movimiento de cambio de orientación de un sólido extenso de forma que, dado un punto cualquiera del mismo, este permanece a una distancia constante de un punto fijo.





Vibración: oscilación en torno a una posición de equilibrio



Partícula en un movimiento de rotación.
Posición angular o posición de rotación

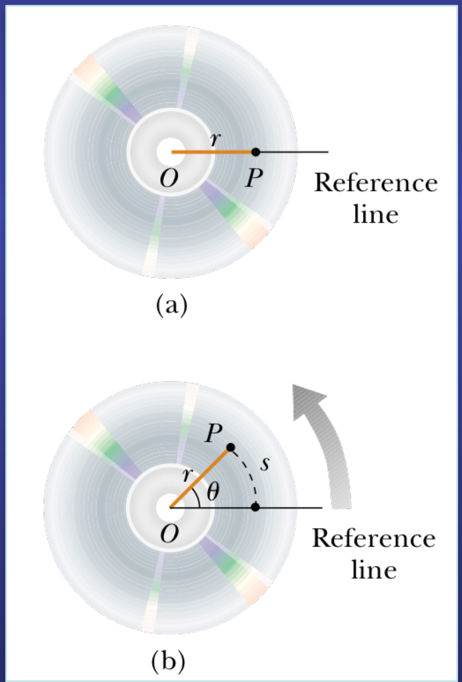
Supongamos una partícula que gira sobre sí misma.

La manera más fácil de describir su posición en ese movimiento de rotación es describiendo su orientación con respecto a alguna dirección de referencia fija.

Podemos utilizar un ángulo, medido a partir de una dirección de referencia, como una medida de la posición de rotación o posición angular.

Partícula en un movimiento de rotación. Posición angular o posición de rotación

Supongamos un objeto plano que gira alrededor de un eje fijo perpendicular al objeto y que pasa por un punto O.



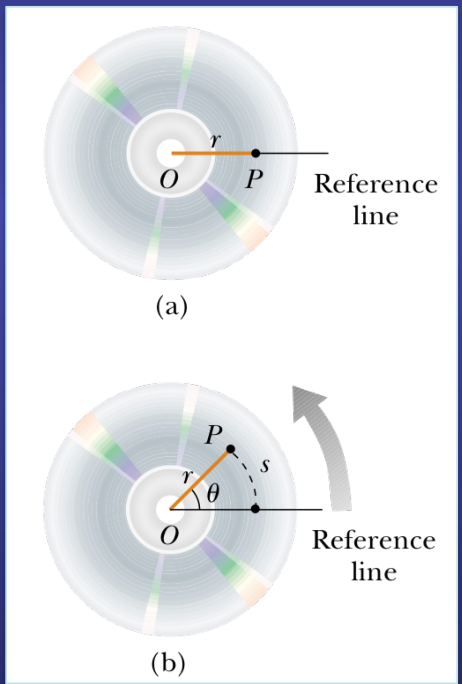
La partícula indicada por el punto negro se encuentra a una distancia fija r del origen y gira alrededor de O describiendo un círculo de radio r.

Todas las partículas del objeto describen un movimiento circular alrededor de O.

Hay una estrecha relación entre el movimiento de rotación del objeto y el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria circular.

Partícula en un movimiento de rotación. Coordenadas polares

Resulta conveniente representar la posición de una partícula mediantes sus coordenadas polares



Se elige como centro del sistema de coordenadas polares un punto que coinida con el centro de las trayectorias circulares de las partículas

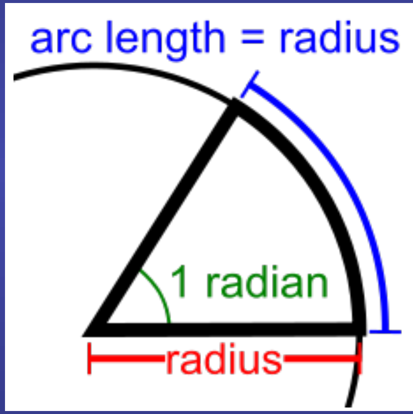
En este sistema de referencia, la única coordenada de una determinada partícula que cambia con el tiempo es θ, permaneciendo r constante

A medida que un partícula del objeto se mueve a lo largo del círculo de radio r desde el eje x positivo ($\theta = 0$) hasta el punto P, se está moviendo a lo largo de un arco de longitud s, que está relacionado con el ángulo θ por la expresión

$$s = r\theta \qquad \theta = \frac{s}{r}$$

Partícula con movimiento circular: definición de radián

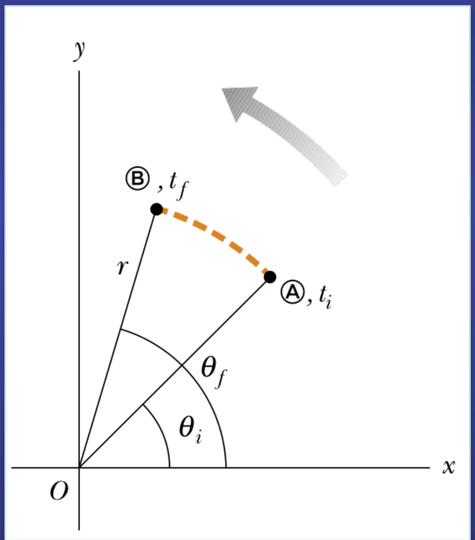
Un radián representa el ángulo central en una circunferencia que subtiende un arco cuya longitud es igual a la del radio.
Su símbolo es rad.



Equivalencia entre grados y radianes

Grados	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
Radianes	**0**	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Partícula con movimiento circular: definición de velocidades angulares



Mientras la partícula se mueve desde A hasta B en un tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, el vector correspondiente al radio barre el ángulo $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$ que equivale al desplazamiento angular durante ese intervalo de tiempo

Vector velocidad angular

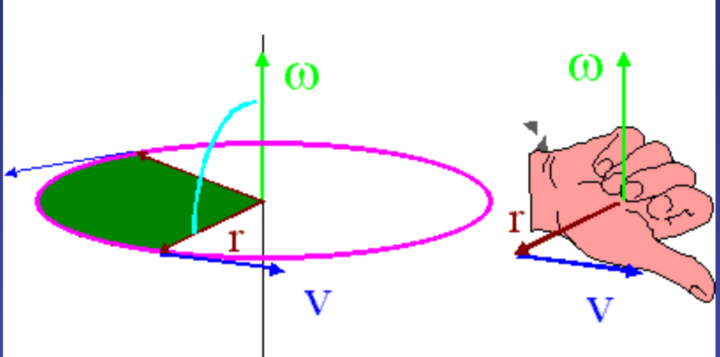


Figura 23

Vector velocidad angular

Módulo: celeridad angular

Dirección: perpendicular al plano del movimiento

Sentido: tornillo a derechas

Como $R = r \ \sin\alpha \Rightarrow v = \omega r \ \sin\alpha$

Podemos escribir $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Derivando el vector velocidad, obtenemos la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_r}$$

Cinemática de rotación:
cuerpo rígido con aceleración angular constante

En el caso de movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, el movimiento acelerado más simple es el movimiento bajo aceleración angular constante

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha dt$$

Y además $\omega = \omega_i \text{ en el instante } t_i = 0$

Podemos integrar esta expresión directamente para calcular la velocidad angular final

$$\int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_0^t \alpha dt \rightarrow \omega_f = \omega_i + \alpha\, t$$

Cinemática de rotación:
cuerpo rígido con aceleración angular constante

Integrando una vez más obtenemos el ángulo en función del tiempo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega\, dt$$

$$\text{con } \theta = \theta_i \text{ en el instante } t_i = 0$$

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_i + \alpha\, t) dt \longrightarrow \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$$

Cinemática de rotación:
cuerpo rígido con aceleración angular constante

$$\omega_f = \omega_i + \alpha\, t \qquad\qquad \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Si eliminamos el tiempo de

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

Y eliminando la aceleración angular

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$$

Cinemática de rotación:
cuerpo rígido con aceleración angular constante

Kinematic Equations for Rotational and Linear Motion Under Constant Acceleration

Rotational Motion About Fixed Axis	Linear Motion
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_f{}^2 = \omega_i{}^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f{}^2 = v_i{}^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

Las expresiones cinemáticas para el movimiento de rotación bajo aceleración angular constante tienen la misma forma matemática que las del movimiento de traslación bajo aceleración de traslación constante, sustituyendo

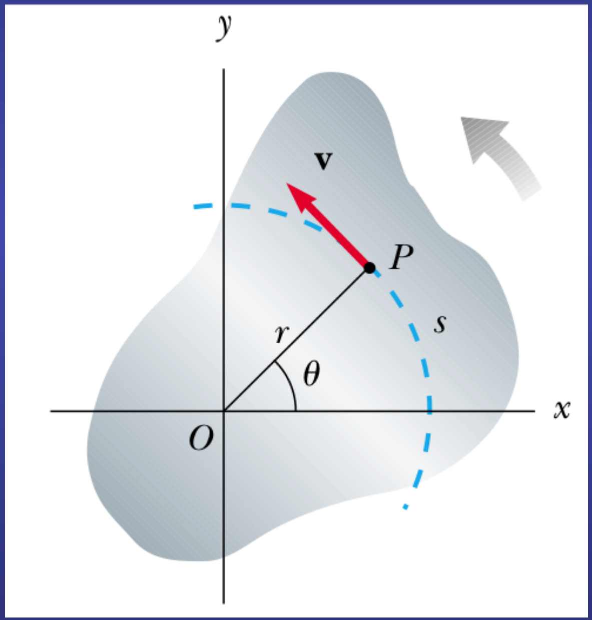
$$x \longrightarrow \theta$$

$$v \longrightarrow \omega$$

$$a \longrightarrow \alpha$$

Relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, cada partícula del cuerpo se mueve alrededor de un círculo cuyo centro es el eje de giro



Una partícula de un cuerpo rígido en rotación se mueve en un círculo de radio r alrededor del eje z

Dado que la partícula se mueve en una trayectoria circular, su vector velocidad es siempre perpendicular a la trayectoria
(a menudo se denomina velocidad tangencial)

El módulo de la velocidad tangencial viene dado por

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Donde s es la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria circular

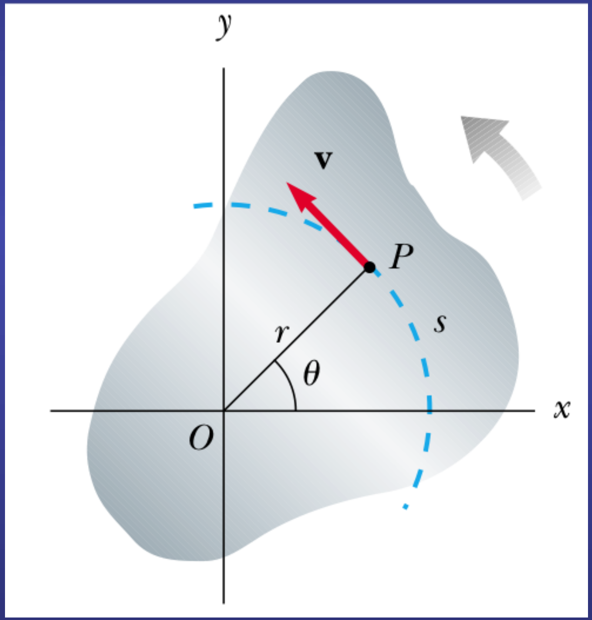
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

El módulo de la velocidad tangencial de la partícula es igual a la distancia de la partícula al eje de giro multiplicada por la velocidad angular de la partícula

$$v = r\omega$$

Relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

Cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, cada partícula del cuerpo se mueve alrededor de un círculo cuyo centro es el eje de giro



Una partícula de un cuerpo rígido en rotación se mueve en un círculo de radio r alrededor del eje z

El módulo de la velocidad tangencial de la partícula es igual a la distancia de la partícula al eje de giro multiplicada por la velocidad angular de la partícula

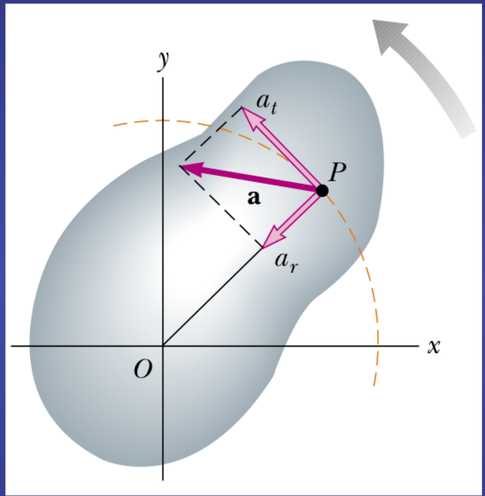
$$v = r\omega$$

Aunque cada punto del sólido rígido tenga la misma velocidad angular, no todos los puntos tienen la misma velocidad tangencial, puesto que r cambia de punto a punto.

La velocidad tangencial de un punto en un objeto que rota aumenta según nos separamos del eje de giro

Relaciones entre las magnitudes de rotación y traslación

Podemos establecer una relación entre la aceleración angular de la partícula y su aceleración tangencial a_t , cuya componente es tangente a la trayectoria del movimiento



$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha$$

La componente tangencial de la aceleración de traslación de una partícula que experimenta un movimiento circular es igual a la distancia de la partícula al eje de giro multiplicada por la aceleración angular

Pero la aceleración de traslación también tiene una componente centrípeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$

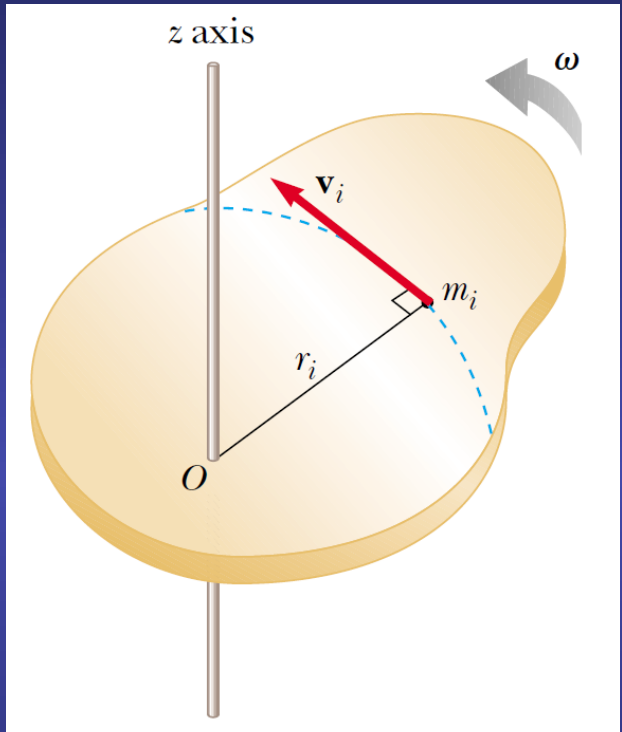
Aceleración de traslación total

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_c}$$

Módulo de la aceleración de traslación total

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Energía cinética rotacional



Supongamos que podemos considerar el objeto como un conjunto de partículas que rotan alrededor del eje z con una celeridad angular ω

Cada una de esas partículas tiene una energía cinética caracterizada por su masa y el módulo de su velocidad tangencial

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Aunque todas las partículas tengan la misma celeridad angular, las celeridades tangenciales individuales dependerán de su distancia al eje de rotación

$$v_i = r_i \omega$$

La energía cinética total del sólido rígido vendrá dada por la suma de las energías cinéticas de todas las partículas que lo componen

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

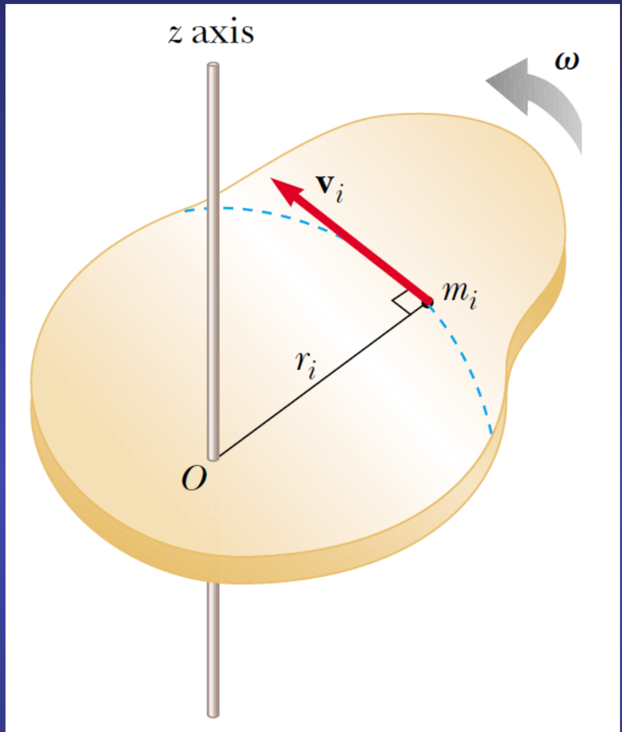
Momento de inercia

El momento de inercia se define como

$$I \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Tiene por dimensiones ML^2, siendo sus unidades en el SI (kg • m^2)

Energía cinética rotacional



La energía cinética rotacional toma el valor

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

La energía cinética rotacional no es una nueva forma de energía.

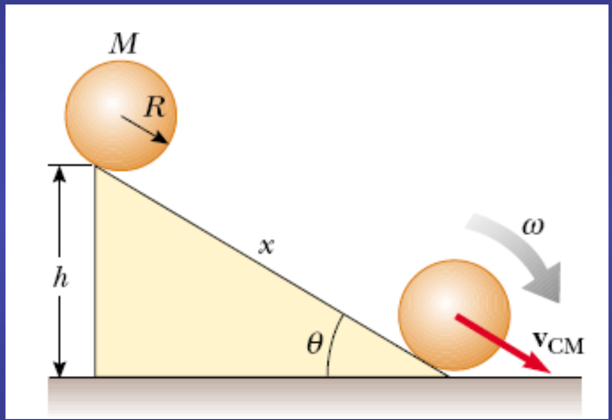
Simplemente se trata de energía cinética ordinaria (se ha calculado como la suma de la energía cinética de las partículas contenidas en el sólido rígido).

Sin embargo, la nueva expresión matemática es más conveniente cuando tratamos con rotaciones (siempre que sepamos como calcular el momento de inercia)

Ahora, en el lado correspondiente al almacenamiento, dentro de la ecuación de conservación de la energía, deberemos ahora considerar que el término de la energía cinética es la suma de los cambios tanto en la energía cinética de traslación como de rotación.

Energía cinética rotacional

La energía cinética total de un cuerpo que rota es la suma de la energía cinética de rotación y la energía cinética traslacional del centro de masas



$$K = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\omega^2$$

Si las fuerzas que actúan sobre un sistema son conservativas, la energía mecánica del sistema se conserva (es una constante)

$$\frac{1}{2}Mv_{\mathrm{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\omega^2 + Mgy_{\mathrm{CM}} = \mathrm{constante}$$

Analogía entre la energía cinética asociada con las rotaciones y la energía cinética asociada con movimiento lineal

La energía cinética de traslación

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

El papel de …

m

v

La energía cinética rotacional

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

… lo juega

I

ω

Esto va a ocurrir cada vez que comparemos una ecuación del movimiento lineal con su correspondiente análogo en el movimiento rotacional

El momento de inercia es una medida de la resistencia de un objeto a cambiar su estado de movimiento rotacional

Analogías y diferencias entre masa y momento de inercia

Masa	Momento de inercia
Analogías	
Es una medida de la resistencia de un objeto a cambiar su estado de movimiento lineal	Es una medida de la resistencia de un objeto a cambiar su estado de movimiento rotacional
Diferencias	
Es una propiedad intrínseca del objeto (asumiendo velocidades no relativistas)	Depende de la elección del eje de rotación (no hay un valor único del momento de inercia de un objeto). No sólo depende de la masa, sino de cómo está distribuida la masa alrededor del eje de giro.
Es un escalar	Es un tensor

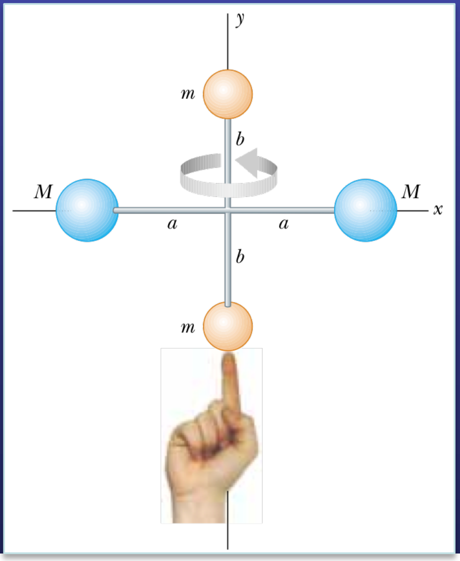
Cálculo del momento de inercia en un sistema discreto

Sistema discreto $$I \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Ejemplo: cuatro pequeñas esferas están unidas a las cuatro esquinas de un marco de masa despreciable que está situado sobre el plano xy.

Si la rotación se produce alrededor del eje y con celeridad angular ω, calcular:

- **el momento de inercia I_y con respecto al eje y**
- **la energía cinética de rotación con respecto a dicho eje.**



Las dos esferas de masa m que están situadas en el eje y no contribuyen a I_y

$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2}\left(2Ma^2\right)\omega^2 = Ma^2\omega^2$$

Las dos esferas de masa m no se mueven alrededor del eje y y, por tanto, no tienen energía cinética

Cálculo del momento de inercia en un sistema discreto

Sistema discreto

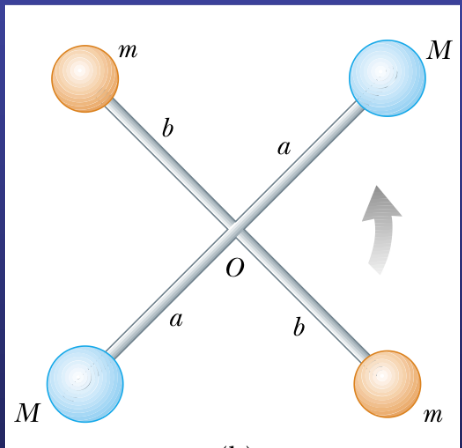
$$I \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Ejemplo: cuatro pequeñas esferas están unidas a las cuatro esquinas de un marco de masa despreciable que está situado sobre el plano xy.

Si la rotación se produce alrededor del eje z con celeridad angular ω, calcular:

- el momento de inercia I_z con respecto al eje z

- la energía cinética de rotación con respecto a dicho eje.



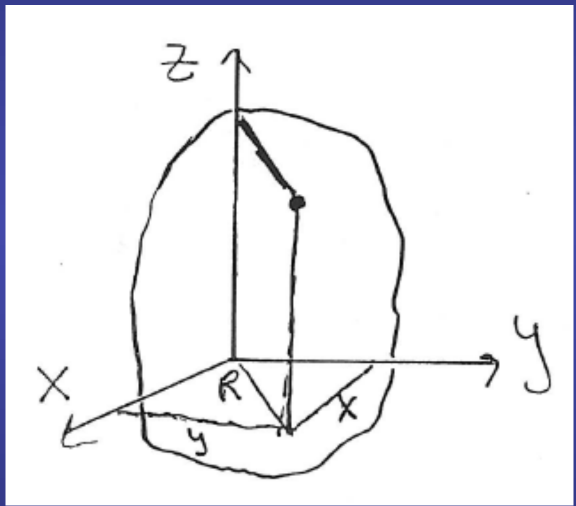
Dado que r_i representa la distancia perpendicular al eje de giro

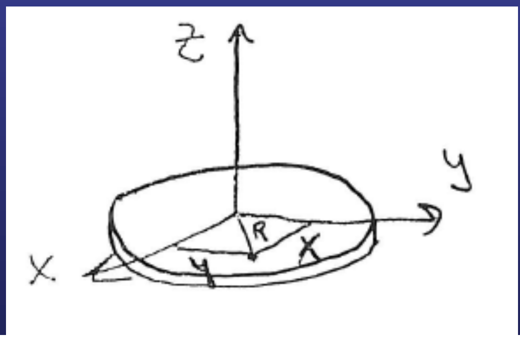
$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2}\left(2Ma^2 + 2mb^2\right)\omega^2 = \left(Ma^2 + mb^2\right)\omega^2$$

El momento de inercia y la energía cinética de rotación asociada a una celeridad angular determinada cambia con respecto al eje de giro

Cálculos de momentos de inercia





Sistema discreto

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$$

Sistema continuo

$$I_z = \int dm R^2 = \int dm \left(x^2 + y^2\right)$$

Placa plana

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int dm \;\; y^2 \\ I_y &= \int dm \;\; x^2 \end{aligned}\right\} \quad I_z = \int dm \left(x^2 + y^2\right) = I_y + I_x$$

Cálculo del momento de inercia en un sistema continuo

En el caso de un objeto continuo:

1. Se divide el objeto en muchos elementos infinitesimales de masa Δm_i

2. Aproximamos el momento de inercia del sólido continuo a partir de la expresión para un sistema discreto

$$I \approx \sum_i r_i^2 \Delta m_i$$

donde r_i^2 es el cuadrado de la distancia entre el elemento de masa finita y el eje de giro

3. Tomamos el límite de la suma cuando $\Delta m_i \to 0$. En este caso, la suma se convierte en una integral.

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

4. Generalmente es más fácil calcular momentos de inercia en términos de volumen de los elementos, más que en sus masas. Podemos hacer la transformación ya que $\rho = m/V$

$$dm = \rho dV \Rightarrow I = \int \rho r^2 dV$$

Si el sistema es homogéneo ρ es contante y la integral se puede evaluar para una geometría dada.

Momentos de inercia de diferentes sólidos rígidos con respecto a determinados ejes

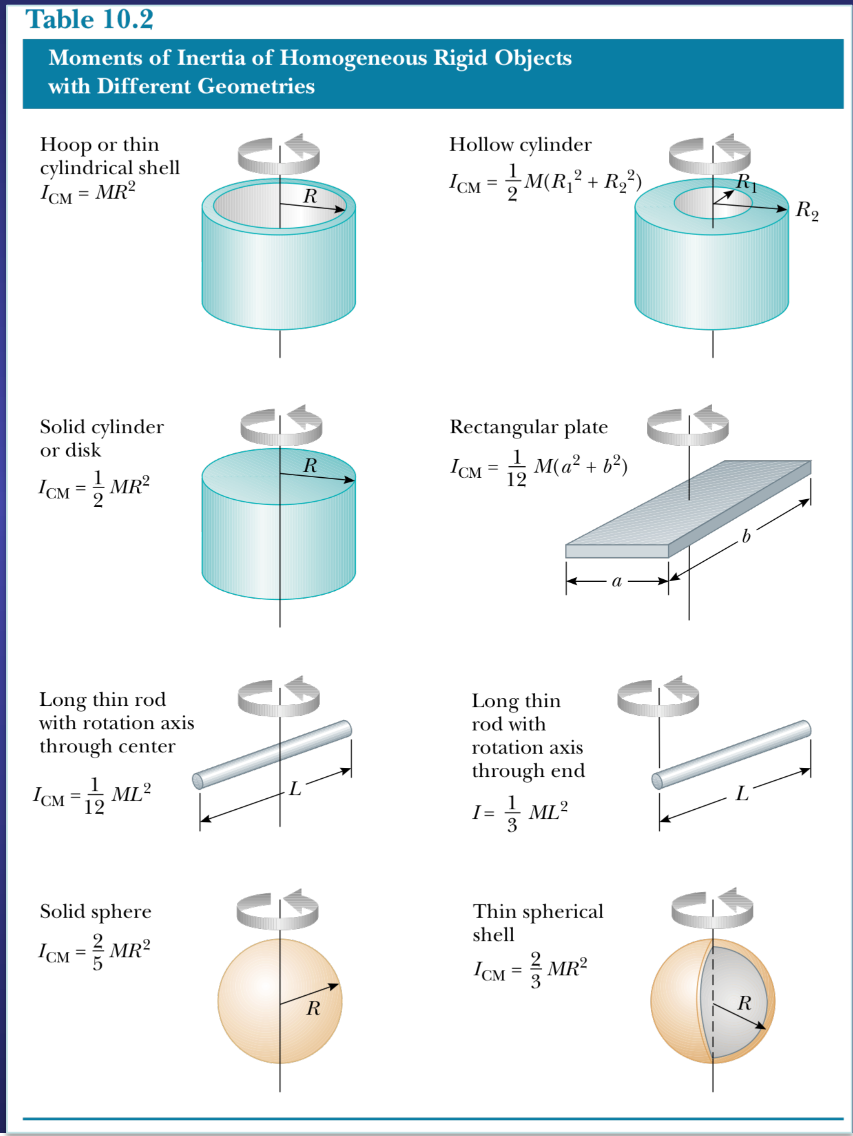


Table 10.2

Moments of Inertia of Homogeneous Rigid Objects with Different Geometries

Hoop or thin cylindrical shell
$I_{CM} = MR^2$

Hollow cylinder
$I_{CM} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

Solid cylinder or disk
$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$

Rectangular plate
$I_{CM} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

Long thin rod with rotation axis through center
$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$

Long thin rod with rotation axis through end
$I = \frac{1}{3}ML^2$

Solid sphere
$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$

Thin spherical shell
$I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$

Teorema de Steiner

Los momentos de inercia de sólidos rígidos con una geometría simple (alta simetría) son relativamente fáciles de calcular si el eje de rotación coincide con un eje de simetría.

Sin embargo, los cálculos de momentos de inercia con respecto a un eje arbitrario puede ser engorroso, incluso para sólidos con alta simetría.

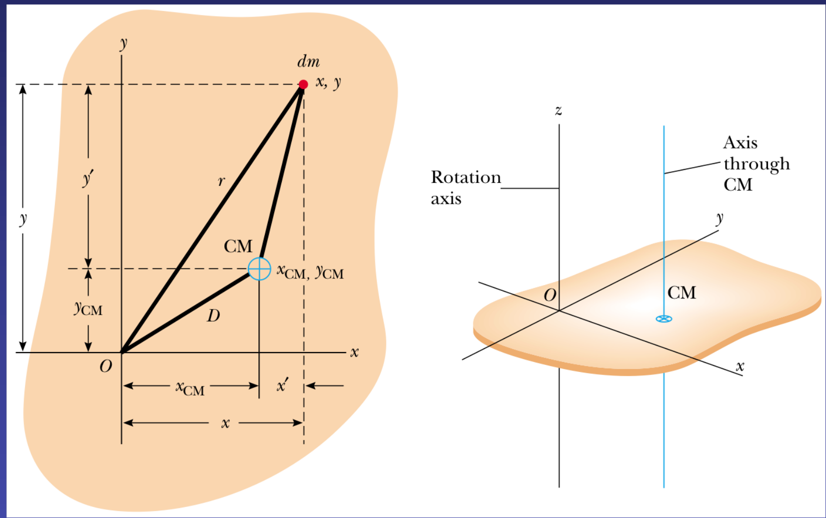
El **Teorema de Steiner** (o teorema del eje-paralelo) a menudo simplifican los cálculos.

Premisa: Supongamos que conocemos el momento de inercia con respecto a un eje que pase por el centro de masas de un objeto, I_{CM}

Teorema: Entonces podemos conocer el momento de inercia con respecto a cualquier otro eje paralelo al primero y que se encuentra a una distancia D

$$I = I_{\mathrm{CM}} + MD^2$$

Teorema de Steiner: demostración



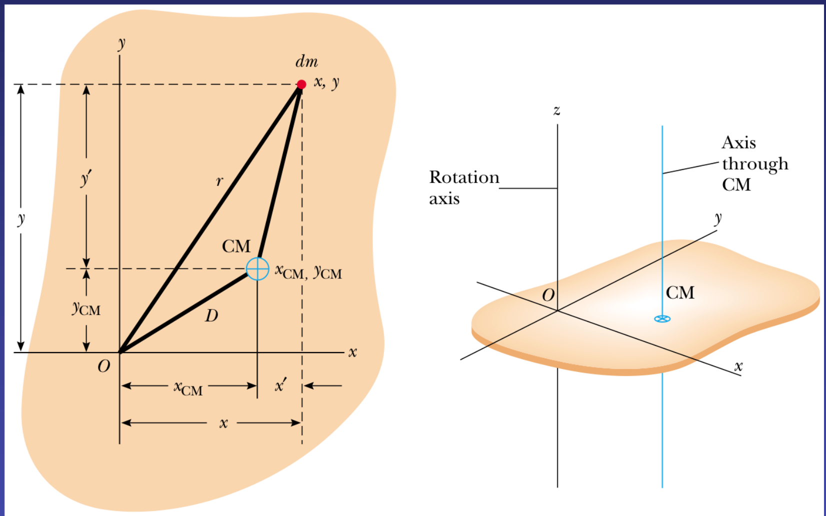
Supongamos que un objeto rota en el plano xy alrededor del eje z.
Supongamos además que las coordenadas del centro de masas son x_{CM} e y_{CM}

Tomemos un elemento de masa dm situado en las coordenadas (x, y)

La distancia desde este elemento al eje de rotación (eje z) es $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Y el momento de inercia con respecto al eje z vale $I_z = \int r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm$

Teorema de Steiner: demostración



Tomemos un elemento de masa dm situado en las coordenadas (x, y)

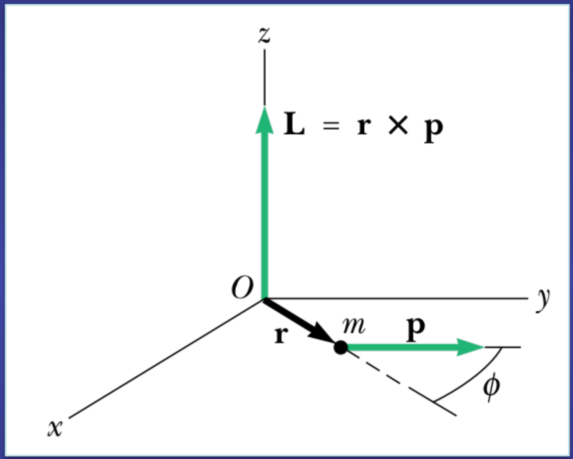
Si ahora escogemos un sistema de coordenadas con origen en el centro de masas del objeto, las nuevas coordenadas del elemento de masa serán (x', y')

$$x = x' + x_{\mathrm{CM}} \qquad y = y' + y_{\mathrm{CM}}$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int \left[\left(x' + x_{\mathrm{CM}}\right)^2 + \left(y' + y_{\mathrm{CM}}\right)^2 \right] dm \\ &= \int \left[\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2 \right] dm + 2x_{\mathrm{CM}} \int x' \, dm + 2y_{\mathrm{CM}} \int y' \, dm + (x_{\mathrm{CM}}^2 + y_{\mathrm{CM}}^2) \int dm \\ &= I_{\mathrm{CM}} + MD^2 \end{aligned}$$

Definición de momento angular o cinético

Consideremos una partícula de masa m, con un vector de posición $\vec{r}$
y que se mueve con una cantidad de movimiento $\vec{p}$



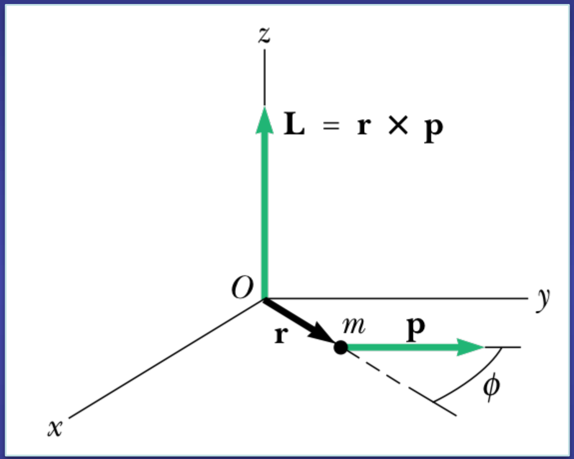
El momento angular instantáneo $\vec{L}$ de la partícula relativo al origen O se define como el producto vectorial de su vector posición instantáneo y del momento lineal instantáneo

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Definición de momento angular o cinético

Consideremos una partícula de masa m, con un vector de posición $\vec{r}$
y que se mueve con una cantidad de movimiento $\vec{p}$

Tanto el módulo, la dirección como el sentido del momento angular dependen del origen que se elija



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m\,(\vec{r} \times \vec{v})$$

Dirección: perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{p}$

Sentido: regla de la mano derecha

Módulo: $|\vec{L}| = m|\vec{r}||\vec{v}|\sin\phi$

Unidades SI: kg • m^2/s

Momento angular o cinético:
Casos particulares

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$\vec{L} = 0$ **cuando** $\vec{r}$ **es paralelo a** $\vec{p}$ **. Es decir, cuando la partícula se mueve a lo largo de una línea recta que pasa por el origen tiene un momento angular nulo con respecto a ese origen**

$|\vec{L}|$ **máxima cuando** $\vec{r}$ **es perpendicular a** $\vec{p}$ **. En ese momento la partícula se mueve exactamente igual que si estuviera en el borde de una rueda que gira alrededor del origen en el plano definido por** $\vec{r}$ **y** $\vec{p}$ **(movimiento circular).**

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{Módulo} & L = mvr = m\omega r^2 \\ \textbf{Dirección y sentido} & \vec{L} \parallel \vec{\omega} \end{array}\right\} \quad \vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$

Conservación del momento angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \cancel{\vec{v} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

En general, si sobre la partícula actuase más de una fuerza

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Ecuación análoga para las rotaciones de las segunda ley de Newton para las traslaciones

Esta ecuación es válida:

- sólo si los momentos de todas las fuerzas involucradas y el momento angular se miden con respecto al mismo origen.
- válida para cualquier origen fijo en un sistema de referencia inercial.

Conservación del momento angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \cancel{\vec{v} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Si $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \mathrm{constante}$

Esto se verifica si:

La fuerza se anula $\vec{F} = 0$ **(caso, por ejemplo, de la partícula libre)**

La fuerza es paralela a la posición $\vec{F} \parallel \vec{r}$ **(fuerzas centrales)**

$\vec{F}_{12} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}$ **(ley de Gravitación Universal)**

Analogías entre rotaciones y traslaciones

Traslaciones

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Una fuerza neta sobre una partícula produce un cambio en el momento lineal de la misma

Una fuerza neta actuando sobre una partícula es igual a la razón de cambio temporal del momento lineal de la partícula

Rotaciones

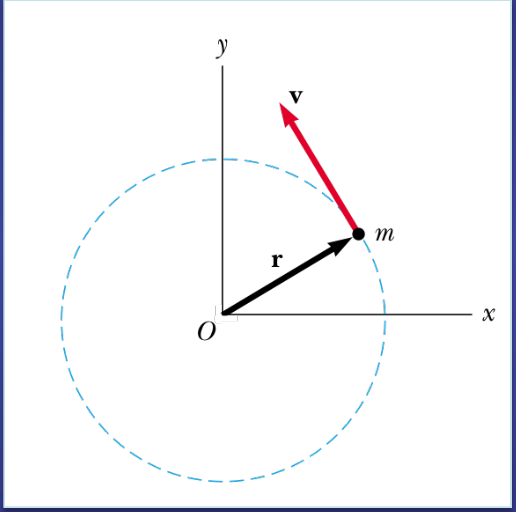
$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Un torque neto sobre una partícula produce un cambio en el momento angular de la misma

Una torque neto actuando sobre una partícula es igual a la razón de cambio temporal del momento angular de la partícula

Momento angular de una partícula en un movimiento circular

Supongamos una partícula que se mueve en el plano xy en un movimiento circular de radio r. Hallar la magnitud y dirección de su momento angular con respecto al origen O si su velocidad lineal es $\vec{v}$



Como el momento lineal de la partícula está en constante cambio (en dirección, no en magnitud), podríamos pensar que el momento angular de la partícula también cambia de manera contínua con el tiempo

Sin embargo este no es el caso

Magnitud

$$L = mvr \sin 90^\circ = mvr$$

Dirección

Perpendicular al plano de la pantalla y saliendo hacia fuera (regla de la mano derecha)

Una partícula en un movimiento circular uniforme tiene un momento angular constante con respecto a un eje que pase por el centro de la trayectoria

Momento angular total de un sistema de partículas

El momento angular total de un sistema de partículas con respecto a un determinado punto se define como la suma vectorial de los momento angulares de las partículas individuales con respecto a ese punto.

$$\vec{L}_{\mathrm{tot}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$$

En un sistema continuo habría que reemplazar la suma por una integral

Momento angular total de un sistema de partículas

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i$$

A priori, para cada partícula i tendríamos que calcular el torque asociado con:

- fuerzas internas entre las partículas que componen el sistema

- fuerzas externas

Sin embargo, debido al principio de acción y reacción, el torque neto debido a las fuerzas internas se anula.

Se puede concluir que el momento angular total de un sistema de partículas puede variar con el tiempo si y sólo si existe un torque neto debido a las fuerzas externas que actúan sobre el sistema

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt}$$

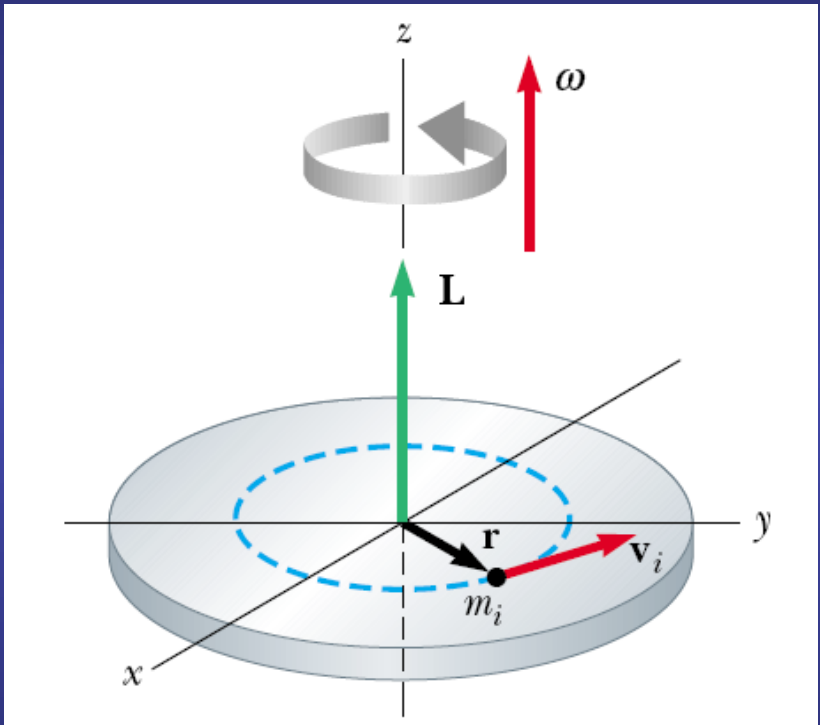
Momento angular total de un sistema de partículas

$$\sum \vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\mathrm{tot}}}{dt}$$

EL torque neto (con respecto a un eje que pase por un origen en un sistema de referencia inercial) debido a las fuerzas externas que actúan sobre un sistema es igual al ritmo de variación del momento angular total del sistema con respecto a dicho origen

Momento angular de un sólido rígido en rotación

Consideremos una placa que rota alrededor de un eje perpendicular y que coincide con el eje z de un sistema de coordenadas



Cada partícula del objeto rota en el plano xy alrededor del eje z con una celeridad angular ω

El momento angular de una partícula de masa m_i que rota en torno al eje z es

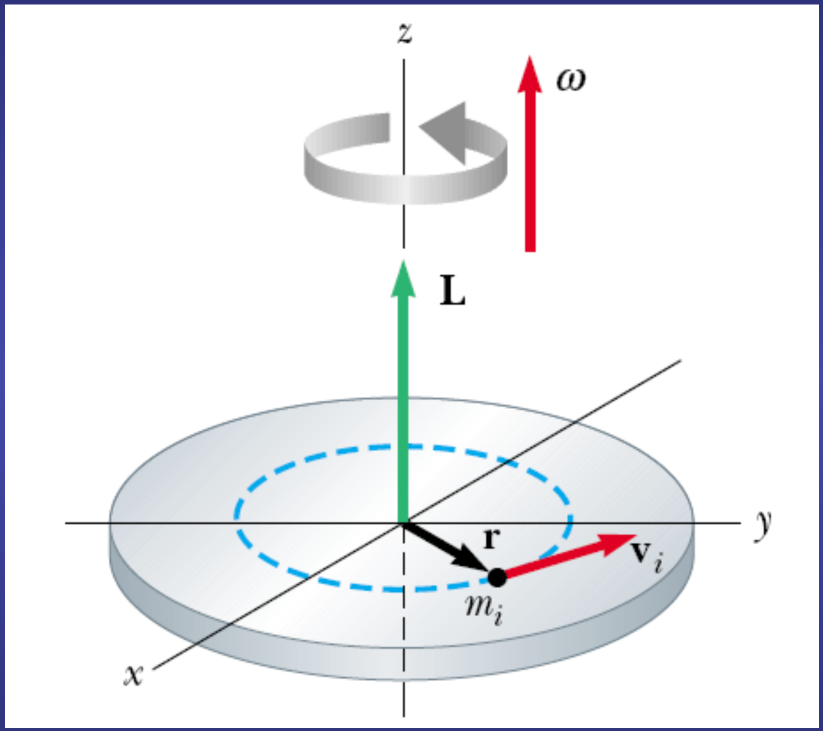
$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i \left[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\right]$$

$$= m_i \left[\vec{\omega}\left(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i\right) - \vec{r}_i \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i\right)\right] = m_i r_i^2 \vec{\omega}$$

Y el momento angular del sistema angular (que en este caso particular sólo tiene componente a lo largo de z)

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i r_i^2 \vec{\omega}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right) \vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

Momento angular de un sólido rígido en rotación



Y el momento angular del sistema angular (que en este caso particular sólo tiene componente a lo largo de z)

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i r_i^2 \vec{\omega} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) \vec{\omega} = I \vec{\omega}$$

Donde se ha definido el momento de inercia del objeto con respecto al eje z como

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

En este caso particular, el momento angular tiene la misma dirección que la velocidad angular

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

Momento angular de un sólido rígido en rotación

En general, la expresión $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ no siempre es válida.

Si un objeto rígido rota alrededor de un eje arbitrario, el momento angular y la velocidad angular podrían apuntar en direcciones diferentes.

En este caso, el momento de inercia no puede ser tratado como un escalar.

Estrictamente hablando, $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ se aplica sólo en el caso de un sólido rígido de cualquier forma que rota con respecto a uno de los tres ejes mutuamente perpendiculares (denominados ejes principales de inercia) y que pasan por su centro de masa.

Ecuación del movimiento para la rotación de un sólido rígido

Supongamos que el eje de rotación del sólido coincide con uno de sus ejes principales, de modo que el momento angular tiene la misma dirección que la velocidad angular

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Derivando esta expresión con respecto al tiempo

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \frac{dI}{dt}\vec{\omega} + I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{dI}{dt}\vec{\omega} + I\vec{\alpha}$$

Si asumimos que el momento de inercia no cambia con el tiempo

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

$$\text{Si } \ \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \text{constante}$$

Ecuación del movimiento para la rotación de un sólido rígido

Supongamos que el eje de rotación del sólido no coincide con uno de sus ejes principales, de modo que el momento angular tiene la misma dirección que la velocidad angular

$$\vec{L} \neq I\vec{\omega}$$

$$\text{si } \ \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{constante}$$

Pero como el momento angular ya no es paralelo a la velocidad angular, ésta no tiene por qué ser constante

$$\vec{\omega} \ \text{ no } \ \text{es } \ \text{constante}$$

Conservación del momento angular

El momento angular total de un sistema es contante, tanto en dirección como en módulo si el torque resultante debido a las fuerzas externas se anula

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{\text{tot}} = \text{ constante} \qquad \text{o} \qquad \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

Tercera ley de conservación: en un sistema aislado se conserva:

- **energía total**
- **el momento lineal**
- **el momento angular**

El principio de conservación del momento angular es un resultado general que se puede aplicar a cualquier sistema aislado.
El momento angular de un sistema aislado se conserva tanto si el sistema es un cuerpo rígido como si no lo es.

Conservación del momento angular

El momento angular total de un sistema es contante, tanto en dirección como en módulo si el torque resultante debido a las fuerzas externas se anula

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{\text{tot}} = \quad \text{constante} \qquad \text{o} \qquad \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

Para un sistema aislado consistente en un conjunto de partículas, la ley de conservación se escribe como

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{constante}$$

Conservación del momento angular

Si la masa de un sistema aislado que rota sufre un redistribución, el momento de inercia cambia

Como la magnitud del momento angular del sistema es

$$L = I\omega$$

La ley de conservación del momento angular requiere que el producto de I por ω permanezca constante

Es decir, para un sistema aislado, un cambio en I requiere un cambio en ω

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f = \text{constante}$$

Esta expresión es válida para:

- una rotación en torno a un eje fijo.
- una rotación alrededor de un eje que pase por el centro de masas de un sistema que rota.

Lo único que se requiere es que el torque neto de la fuerza externa se anule

Comparación de los movimientos lineales y movimientos rotacionales

Table 8-2 Comparison of Linear Motion and Rotational Motion

Linear motion		Rotational motion	
Displacement	Δx	Angular displacement	$\Delta\theta$
Velocity	$v = \frac{dx}{dt}$	Angular velocity	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Acceleration	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Angular acceleration	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
Constant-acceleration equations	$v = v_0 + at$ $\Delta x = v_{av}\,\Delta t$ $v_{av} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta x$	Constant-angular-acceleration equations	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta\theta = \omega_{av}\,\Delta t$ $\omega_{av} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\,\Delta\theta$
Mass	m	Moment of inertia	I
Momentum	$p = mv$	Angular momentum	$L = I\omega$
Force	F	Torque	τ
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Power	$P = Fv$	Power	$P = \tau\omega$
Newton's second law	$F_{net} = \frac{dp}{dt} = ma$	Newton's second law	$\tau_{net} = \frac{dL}{dt} = I\alpha$