VECTORES: RECTAS Y PLANOS

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P\,(3, 1, 0)$ y $Q\,(1, 1, 2)$.

Solución: **I.T.I. 93, I.T.T. 04**

Sea un punto A genérico de la recta de coordenadas (x, y, z), los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son vectores contenidos en la recta y por lo tanto paralelos luego:

$$\overrightarrow{PA} = \lambda\overrightarrow{PQ} \quad \Rightarrow \quad (x-3, y-1, z) = \lambda(-2, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(x, y, z) = (3-2\lambda, 1, 2\lambda)}$$

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P\,(x_1, y_1, z_1)$ y $Q\,(x_2, y_2, z_2)$.

Solución: **I.T.I. 94**

Sea un punto A genérico de la recta de coordenadas (x, y, z), los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son vectores contenidos en la recta y por lo tanto paralelos luego:

$$\overrightarrow{PA} = \lambda\overrightarrow{PQ} \quad \Rightarrow \quad (x-x_1, y-y_1, z-z_1) = \lambda(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(x, y, z) = \left(x_1+\lambda[x_2-x_1], y_1+\lambda[y_2-y_1], z_1+\lambda[z_2-z_1]\right)}$$

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A\,(2, 3, -9)$ y $B\,(0, 6, -1)$.

Solución: **I.T.I. 04**

Sea un punto P genérico de la recta de coordenadas (x, y, z), los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AB}$ son vectores contenidos en la recta y por lo tanto paralelos luego:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\,\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad (x-2, y-3, z+9) = \lambda(-2, 3, 8)$$

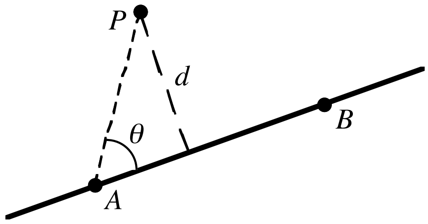
$$\Rightarrow \quad \boxed{(x, y, z) = (2-2\lambda, 3+3\lambda, -9+8\lambda)}$$

Determinar la distancia del punto P de coordenadas $(6, -4, 4)$ a la recta que pasa por los puntos A y B de coordenadas $(2, 1, 2)$ y $(3, -1, 4)$ respectivamente.

Jose Javier Sandonís Ruiz 6/10/04 09:15
Eliminado: –

Solución: **I.T.I. 95, I.T.T. 04**

La distancia que nos piden será, según la figura, $d = \left|\overrightarrow{AP}\right| \operatorname{sen}\theta$. El valor de θ lo podemos obtener a partir del producto vectorial:



$$\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right| \operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = 3 \text{ unid. de longitud}}$$

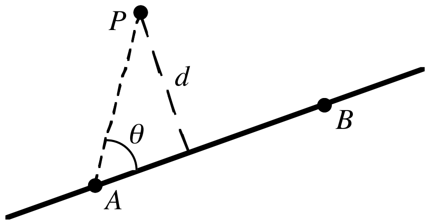
Determinar la distancia del punto P de coordenadas $(5, -5, 3)$ a la recta que pasa por los puntos A y B de coordenadas $(1, 0, 1)$ y $(2, -2, 3)$ respectivamente.

Jose Javier Sandonís Ruiz 6/10/04 09:11
Eliminado:

Jose Javier Sandonís Ruiz 6/10/04 09:13
Eliminado:

Solución: **I.T.I. 96, 00, 06, I.T.T. 96, 00, 03, 06**

La distancia que nos piden será, según la figura, $d = \left|\overrightarrow{AP}\right| \operatorname{sen}\theta$. El valor de θ lo podemos obtener a partir del producto vectorial:



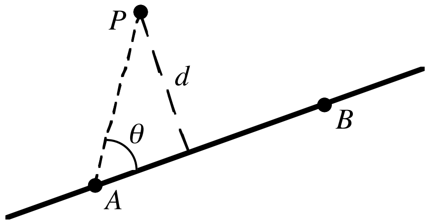
$$\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right| \operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = 3 \text{ unid. de longitud}}$$

Determinar la distancia del punto P (4, –1, 5) a la recta que pasa por los puntos A (1, –2 , 0) y B (1, 1 ,4).

Solución: **I.T.I. 92, 93, 94, 03, I.T.T. 95, 99, 02, I.I. 94**

La distancia que nos piden será, según la figura, $d = \left|\overrightarrow{AP}\right| \operatorname{sen}\theta$. El valor de θ lo podemos obtener a partir del producto vectorial:



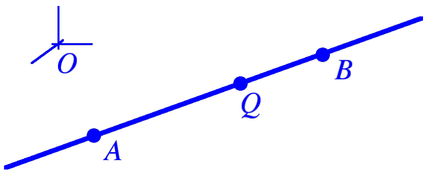
$$\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right| \left|\overrightarrow{AB}\right| \operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\sqrt{346}}{5} \text{ unid. de longitud}}$$

Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (2, –1, 5) y B (3, 0, 4). Determinar la distancia del punto P (1, 2, –1) a dicha recta.

Solución: **I.T.I. 97, I.T.T. 97, 01, 05**

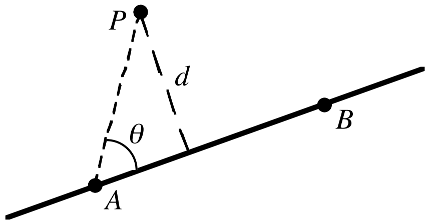
Sea Q un punto cualquiera de la recta, de coordenadas (x, y, z) (respecto del origen de coordenadas en O). La ecuación paramétrica de la recta vendrá dada por:



$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} \\ \overrightarrow{AQ} \parallel \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AQ} = \lambda\, \overrightarrow{AB} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \lambda\, \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \quad (x, y, z) = (2, -1, 5) + \lambda\,(1, 1, -1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \lambda + 2 \qquad y = \lambda - 1 \qquad z = 5 - \lambda}$$

La distancia que nos piden será, según la figura, $d = \left|\overrightarrow{AP}\right| \operatorname{sen}\theta$. El valor de θ lo podemos obtener a partir del producto vectorial:



$$\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right| \left|\overrightarrow{AB}\right| \operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \sqrt{\frac{74}{3}} \text{ unid. de longitud}}$$

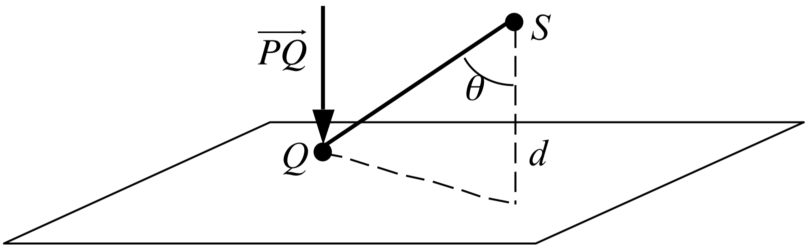
Si $\vec{A}$ = (3, 1, 2) y $\vec{B}$ = (1, –2, 4) son los vectores de posición de los puntos P y Q respectivamente, hallar: a) la ecuación del plano que pasa por Q y es perpendicular a la recta PQ, b) la distancia del punto (–1, 1, 1) al plano.

Solución: I.T.I. 93, 95, I.T.T. 04

a) Sea M de coordenadas (x, y, z) un punto cualquiera del plano. El vector $\overrightarrow{QM}$ es un vector contenido en el plano que nos piden y por lo tanto debe ser perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ} = \vec{B} - \vec{A}$:

$$\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x + 3y - 2z = -12}$$

b) Según la figura la distancia del punto S (cuyas coordenadas nos indican en el enunciado) al plano será: $d = \left| \overrightarrow{QS} \right| \cos\theta$. El valor de θ, ángulo con la vertical al plano, lo podemos obtener a partir del producto escalar:



$$\left| \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QS} \right| = \left| \overrightarrow{PQ} \right| \left| \overrightarrow{QS} \right| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{\left| \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QS} \right|}{\left| \overrightarrow{PQ} \right|} = \frac{11}{\sqrt{17}} \text{ unid. de long.}}$$

Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos P_1 $(2, -1, 1)$, P_2 $(3, 2, -1)$, P_3 $(-1, 3, 2)$

Solución: **I.T.I. 93, 01, I.T.T. 02**

Como los vectores $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 3, -2)$ y $\overrightarrow{P_1P_3} = (-3, 4, 1)$ están contenidos en el plano el vector $\vec{V} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (11, 5, 13)$ será un vector perpendicular al plano.

Sea A de coordenadas (x, y, z) un punto cualquiera del plano. El vector $\overrightarrow{P_1A}$ es un vector contenido en el plano que nos piden y por lo tanto debe ser perpendicular al vector $\vec{V}$:

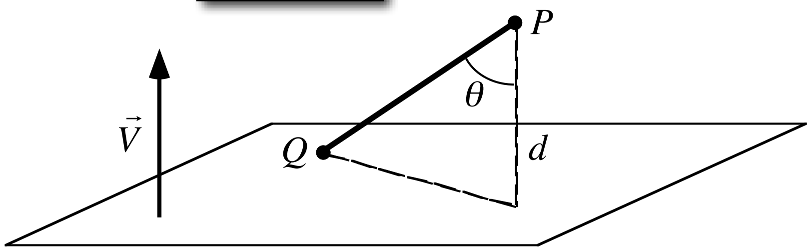
$$\overrightarrow{P_1A} \cdot \vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{11x + 5y + 13z = 30}$$

Encontrar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{V} = (4, -2, -1)$ y que pasa por el punto Q de coordenadas $(2, -1, 5)$. Determinar la distancia del punto P de coordenadas $(3, 0, 4)$ a dicho plano.

Solución: **I.T.I. 96, 00, 02, 05, 06, I.T.T. 96, 00, 03, 06**

Sea A de coordenadas (x, y, z) un punto cualquiera del plano. El vector $\overrightarrow{QA}$ es un vector contenido en el plano que nos piden y por lo tanto debe ser perpendicular al vector $\vec{V}$:

$$\overrightarrow{QA} \cdot \vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{4x - 2y - z = 5}$$



Según la figura la distancia del punto P al plano será: $d = \left|\overrightarrow{QP}\right| \cos\theta$. El valor de θ, ángulo con la vertical al plano, lo podemos obtener a partir del producto escalar:

$$\left|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{V}\right| = \left|\overrightarrow{QP}\right| \left|\vec{V}\right| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|} = \sqrt{\frac{3}{7}} \text{ unid. de longitud}}$$

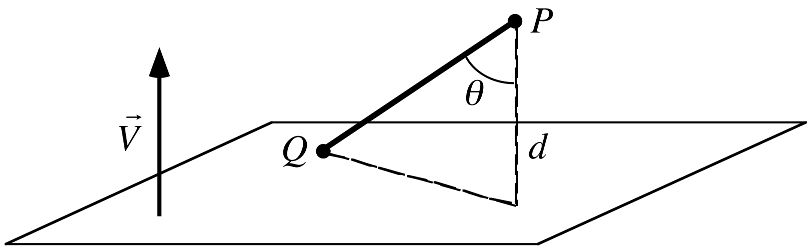
Calcular la ecuación del plano que contiene a los vectores $\vec{A} = (3, -2, 1)$ y $\vec{B} = (1, -3, 5)$ y pasa por el punto Q de coordenadas $(2, -2, 3)$. Determinar la distancia del punto P de coordenadas $(1, 2, -1)$ a dicho plano.

Solución: **I.T.I. 97, I.T.T. 97, 01**

Como los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están contenidos en el plano el vector $\vec{V} = \vec{A} \times \vec{B} = (-7, -14, -7)$ será un vector perpendicular al plano.

Sea C de coordenadas (x, y, z) un punto cualquiera del plano. El vector $\overrightarrow{QC}$ es un vector contenido en el plano que nos piden y por lo tanto debe ser perpendicular al vector $\vec{V}$:

$$\overrightarrow{QC} \cdot \vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x + 2y + z = 1}$$



Según la figura la distancia del punto P al plano será: $d = \left|\overrightarrow{QP}\right| \cos\theta$. El valor de θ, ángulo con la vertical al plano, lo podemos obtener a partir del producto escalar:

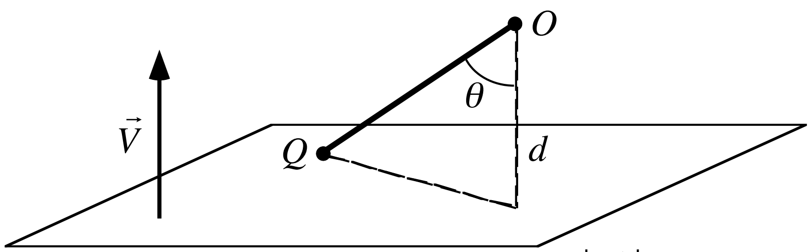
$$\left|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{V}\right| = \left|\overrightarrow{QP}\right| \left|\vec{V}\right| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ unid. de longitud}}$$

Obtener la ecuación del plano que pasa por el punto Q de coordenadas (1, 1, 1) y es perpendicular al vector $\vec{V}$ de componentes (1, –3, –2). Determinar la distancia del origen a dicho plano.

Solución: **I.T.I. 99, 03, 05, I.T.T. 99, 02**

Sea A de coordenadas (x, y, z) un punto cualquiera del plano. El vector $\overrightarrow{QA}$ es un vector contenido en el plano que nos piden y por lo tanto debe ser perpendicular al vector $\vec{V}$:

$$\overrightarrow{QA}\cdot\vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x - 3y - 2z = -4}$$



Según la figura la distancia del origen O al plano será: $d = \left|\overrightarrow{OQ}\right|\cos\theta$. El valor de θ, ángulo con la vertical al plano, lo podemos obtener a partir del producto escalar:

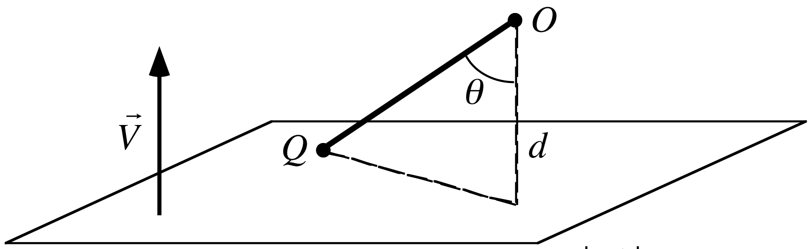
$$\left|\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{V}\right| = \left|\overrightarrow{OQ}\right|\left|\vec{V}\right|\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{\left|\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|} = \frac{4}{\sqrt{14}} \text{ unid. de longitud}}$$

Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{V} = (2, 3, 6)$ y que pasa por el punto Q de coordenadas $(1, 5, 3)$. Determinar la distancia del origen a dicho plano.

Solución: I.T.I. 92, 94, 98, 01, I.T.T. 95, 05, I.I. 94

Sea A de coordenadas (x, y, z) un punto cualquiera del plano. El vector $\overrightarrow{QA}$ es un vector contenido en el plano que nos piden y por lo tanto debe ser perpendicular al vector $\vec{V}$:

$$\overrightarrow{QA} \cdot \vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x + 3y + 6z = 35}$$



Según la figura la distancia del origen O al plano será: $d = \left|\overrightarrow{OQ}\right| \cos\theta$. El valor de θ, ángulo con la vertical al plano, lo podemos obtener a partir del producto escalar:

$$\left|\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{V}\right| = \left|\overrightarrow{OQ}\right| \left|\vec{V}\right| \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{\left|\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{V}\right|}{\left|\vec{V}\right|} = \frac{35}{7} \text{ unid. de longitud}}$$