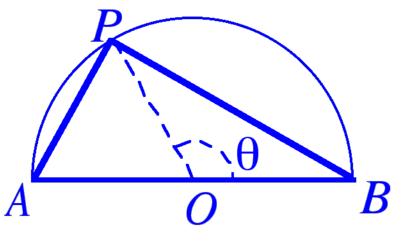
VECTORES: TRIÁNGULOS

Demostrar que en una semicircunferencia cualquier triángulo inscrito con el diámetro como uno de sus lados es un triángulo rectángulo.

Solución: **I.T.I. 96, 98, 02, 05, I.T.T. 96, 99, 01, curso cero de física**

Como el diámetro ha de ser forzosamente el lado más largo del triángulo, lo que nos piden demostrar es que los lados AP y PB son perpendiculares independientemente del punto P escogido para trazar el triángulo.



Los vectores asociados a dichos lados serán:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \left(R\cos\theta, R\,\mathrm{sen}\theta\right) - \left(-R, 0\right) = R\left(1 + \cos\theta, \mathrm{sen}\theta\right)$$

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = \left(R, 0\right) - \left(R\cos\theta, R\,\mathrm{sen}\theta\right) = R\left(1 - \cos\theta, -\,\mathrm{sen}\theta\right)$$

Donde R es el radio de la circunferencia.
Si hacemos el producto escalar de estos dos vectores:

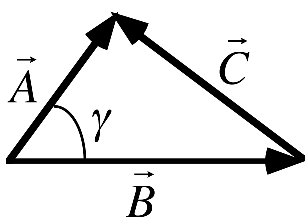
$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} = R^2\left(1 - \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta\right) = 0$$

Lo cual demuestra que dichos vectores son perpendiculares sea cual sea el punto P escogido para trazar el triángulo, y que por lo tanto cualquier triángulo de este tipo será rectángulo.

Sea un triángulo cuyos lados tengan longitud A, B y C respectivamente. Utilizando vectores demuestre el teorema del coseno: $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$, donde γ es el ángulo formado por los lados de longitud A y B.

Solución: **I.T.I. 93, 97, 98, I.T.T. 97, 99, curso cero de física**

Utilizando el hecho de que el producto escalar de un vector por si mismo es el cuadrado de su módulo:

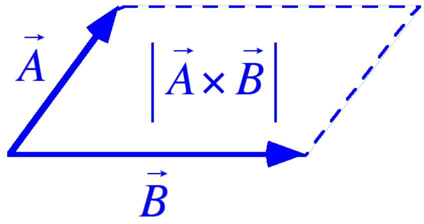


$$C^2 = \left|\vec{A} - \vec{B}\right|^2 = \left(\vec{A} - \vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A} - \vec{B}\right) = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$$

Sea un triángulo cuyos lados tengan longitud A, B y C respectivamente. ¿Cuál sería su área? Demostrar el teorema del seno: para cualquiera de los tres ángulos del triángulo el cociente entre el seno del ángulo y la longitud del lado opuesto tiene el mismo valor.

Solución: **I.T.I. 93, 97, 98, I.T.T. 97, 99, curso cero de física**

Sabemos que el producto vectorial de dos vectores es un vector cuyo módulo es igual al área del paralelogramo formado con ayuda de esos dos vectores. El área del triángulo será justamente la mitad:



$$Area = \frac{1}{2}\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{B}\times\vec{C}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{A}\times\vec{C}\right|$$

Desarrollando la expresión anterior en función de módulos y ángulos:

$$\boxed{Area = \frac{1}{2}A\,B\,\mathrm{sen}\theta_{AB} = \frac{1}{2}B\,C\,\mathrm{sen}\theta_{BC} = \frac{1}{2}A\,C\,\mathrm{sen}\theta_{AC}}$$

Dividiendo por ABC y multiplicando por 2: $\boxed{\frac{\mathrm{sen}\theta_{AB}}{C} = \frac{\mathrm{sen}\theta_{BC}}{A} = \frac{\mathrm{sen}\theta_{AC}}{B}}$

Calcular el área del triángulo formado por los tres puntos siguientes: (4, –1, 5), (–1, 2, 0) y (1, 1, 4).

Solución: **I.T.I. 92, I.T.T. 95, I.I. 94**

Sabemos que el producto vectorial de dos vectores es un vector cuyo módulo es igual al área del paralelogramo formado con ayuda de esos dos vectores. El área del triángulo será justamente la mitad. Si llamamos A, B y C respectivamente a los puntos del enunciado:

$$Area = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \boxed{5\sqrt{\frac{3}{2}}\ \text{unid. long.}^2}$$

Calcular el área del triángulo formado por los tres puntos siguientes: (3, –1, 2), (1, –1, –3) y (4,–3, 1).

Solución: **I.T.I. 95, I.T.T. 05**

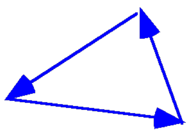
Sabemos que el producto vectorial de dos vectores es un vector cuyo módulo es igual al área del paralelogramo formado con ayuda de esos dos vectores. El área del triángulo será justamente la mitad. Si llamamos A, B y C respectivamente a los puntos del enunciado:

$$Area = \frac{1}{2}\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{165} \quad \text{unid. long.}^2}$$

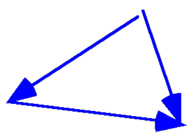
Demostrar que los vectores $\vec{A} = (3, -2, 1)$, $\vec{B} = (1, -3, 5)$ y $\vec{C} = (2, 1, -4)$ forman un triángulo rectángulo. Calcular el valor de los otros dos ángulos del triángulo.

Solución: **I.T.I. 94, 96, 98, 04, I.T.T. 96, 01, curso cero de física**

Existen dos posibilidades para el triángulo:



$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = 0$



$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_3$

Probando se puede demostrar que estamos en el segundo caso y que: $\vec{B} + \vec{C} = \vec{A}$
Como además $\vec{A} \cdot \vec{C} = 0$ estos dos vectores serán perpendiculares verificándose que el triángulo es rectángulo.

El ángulo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$ será: $\cos\theta_{AB} = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A\, B} = \sqrt{\dfrac{2}{5}} \quad \Rightarrow \quad \theta_{AB} = 50.77°$

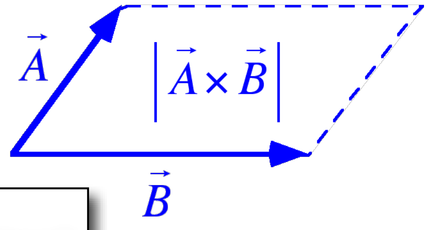
y el formado por $\vec{B}$ y $\vec{C}$ será: $\cos\theta_{BC} = \dfrac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{B\, C} = -\sqrt{\dfrac{3}{5}} \quad \Rightarrow \quad \theta_{BC} = 140.77°$

Los ángulos del triángulo serán por lo tanto: $\boxed{90°, \quad \theta_{AB} = 50.77°, \quad 180° - \theta_{BC} = 39.33°}$

Calcular el área del triángulo formado por los vectores $\vec{A} = (3, -2, 1)$, $\vec{B} = (1, -3, 5)$ y $\vec{C} = (2, 1, -4)$. Deducir a partir de ello el teorema de los senos en trigonometría.

Solución: **I.T.I. 96, 00, 03, 06, I.T.T. 96, 00, 03, 06**

Sabemos que el producto vectorial de dos vectores es un vector cuyo módulo es igual al área del paralelogramo formado con ayuda de esos dos vectores. El área del triángulo será justamente la mitad:



$$Area = \frac{1}{2}\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{B}\times\vec{C}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{A}\times\vec{C}\right| = \boxed{7\sqrt{\frac{3}{2}}\quad \text{unid. long.}^2}$$

Desarrollando la expresión anterior en función de módulos y ángulos:

$$Area = \frac{1}{2}A\,B\,\text{sen}\theta_{AB} = \frac{1}{2}B\,C\,\text{sen}\theta_{BC} = \frac{1}{2}A\,C\,\text{sen}\theta_{AC}$$

Dividiendo por ABC y multiplicando por 2: $$\boxed{\frac{\text{sen}\theta_{AB}}{C} = \frac{\text{sen}\theta_{BC}}{A} = \frac{\text{sen}\theta_{AC}}{B}}$$

Dos lados de un triángulo vienen dados por los vectores $\vec{A} = (3, 6, -2)$ y $\vec{B} = (4, -1, 3)$. Hallar los ángulos del triángulo.

Solución: **I.T.I. 95, I.T.T. 04**

Se puede verificar que el producto escalar entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es nulo, con lo que el ángulo que forman es de 90º. Tomando los dos vectores con el mismo origen el tercer lado vendrá representado por un vector $\vec{C}$ resta de los dos primeros:

$$C = \sqrt{\vec{C}\cdot\vec{C}} = \sqrt{\left(\vec{A}-\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}-\vec{B}\right)} =$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B}} = 5\sqrt{3}$$

El ángulo que forma este vector con $\vec{A}$ será:

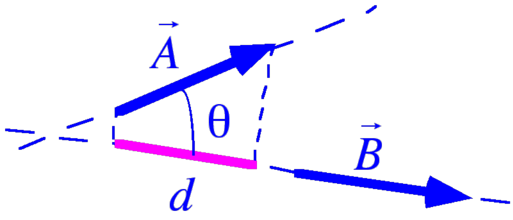
$$\left.\begin{aligned} \vec{A}\cdot\vec{C} &= AC\cos\theta_{AC} \\ \vec{A}\cdot\vec{C} &= \vec{A}\cdot\left(\vec{A}-\vec{B}\right) = A^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \cos\theta_{AC} = \frac{A}{C} \quad \Rightarrow \quad \theta_{AC} = \boxed{36.1^{\circ}}$$

El tercer ángulo del triángulo será: $\varphi = 180^{\circ} - 90^{\circ} - 36.1^{\circ} = \boxed{53.9^{\circ}}$

Dos lados de un triángulo viene dados por los vectores $\vec{A} = (3, 6, -2)$ y $\vec{B} = (4, -1, 3)$. Hallar la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ y el área del triángulo. ¿Qué tipo de triángulo es?

Solución: **I.T.I. 01, I.T.T 01**

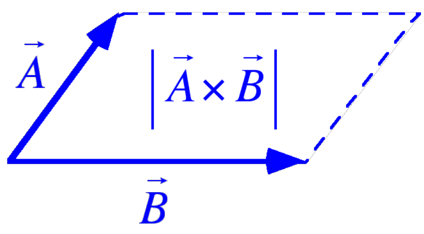
La proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$ será:



$$d = \left| A\cos\theta \right| = \left| \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B} \right| = \boxed{0 \text{ unidades de longitud}}$$

Dado que su producto escalar es nulo, los dos vectores serán perpendiculares entre sí, y el triángulo será rectángulo.

Sabemos que el producto vectorial de dos vectores es un vector cuyo módulo es igual al área del paralelogramo formado con ayuda de esos dos vectores. El área del triángulo será justamente la mitad:



$$Area = \frac{1}{2}\left| \vec{A}\times\vec{B} \right| = \frac{1}{2} A\,B = \boxed{7\sqrt{\frac{13}{2}} \text{ unid. long.}^2}$$