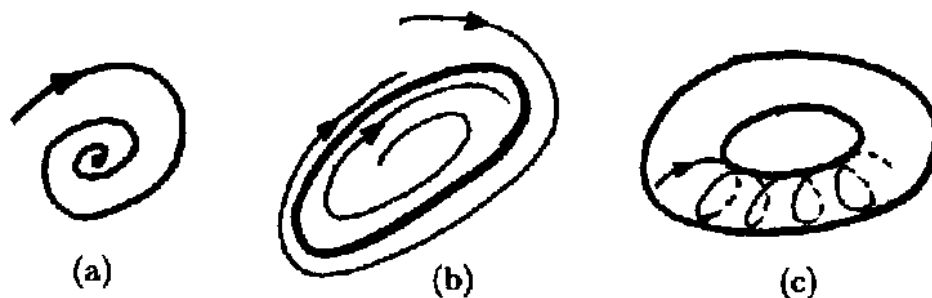


1.- Introducción.

El significado de ‘trabajo’ en física difiere del ordinario. Lo mismo ocurre con **caos** que, en lugar de “confusión, desorden” ha venido a designar en física — como establecemos con precisión en §3.2— una sensibilidad extraordinaria a las condiciones iniciales que caracteriza a algunos sistemas no-lineales —pero no a todos.¹

EJERCICIO 3.1: En algun momento durante esta lección, visitad <http://elcaos.tripod.com/>, y entreteneos una tarde con ejemplos y juegos.

Esta sensibilidad que origina *caos* se manifiesta claramente al investigar las trayectorias (en el espacio de las fases) que describen la variación temporal del estado dinámico de los sistemas disipativos. En presencia de caos, las trayectorias típicas tienden hacia variedades matemáticas con carácter fractal,² esto es, dimensión fraccionaria. A estas variedades —cuyo ejemplo más familiar es la “mariposa de Lorenz”— se les conoce como **atractores extraños**. Por el contrario, los sistemas no-caóticos muestran atractores (ordinarios) con estructuras sencillas y dimensión entera:



Atractores ordinarios en sistemas disipativos: (a) punto ($D = 0$); (b) ciclo límite ($D = 1$) o “ciudad sitiada” —los de fuera quieren entrar; los de dentro, salir—; (c) toro ($D = 2$; otros toros tienen $D > 2$ entera)

¹Esta sensibilidad se ha detectado tanto en sistemas matemáticos (Lam p.257) como en sistemas reales tales como grifos que gotean [Lam p.104; HN Núñez Yépez *et al.*, ‘Chaos in a Dripping Faucet’, *Eur. J. Phys.* **10**, 99-105 (1989)], norias, convección térmica en líquidos, circuitos electrónicos, reacciones químicas y los latidos del corazón.

²Otros aspectos del fenómeno pueden también ser fractales —por ejemplo, las *cuencas de atracción* definidas en §3.2; ver Lam p. 111 y C. Grebogi *et al.*, *Science* **238**, 632 (1987)— pero todavía no comprendemos bien esta relación entre caos y fractales sobre la que volvemos luego.

Para cualificar el tema, noto los siguientes hechos:

- En el régimen caótico, los sistemas deterministas parecen aleatorios, luego es importante identificar y distinguir *ruido* y *caos*.
- Sistemas no-lineales con pocos grados de libertad pueden ser caóticos y mostrárenos muy complejos. Es decir, parte de la complejidad del mundo real puede tener un origen sencillo, luego hay que estudiar la complejidad de sistemas sencillos y no sólo (como hemos hecho en otras lecciones) sistemas con muchos elementos sometidos a reglas dinámicas sencillas.
- Desde una perspectiva general, parece lógico preguntarse:
 - ¿por qué las propiedades emergentes de algunos sistemas (los caóticos) son impredecibles?
 - ¿por qué su estudio matemático analítico es difícil?
 - ¿por qué la física involucrada es no-lineal?,
 - estas preguntas han motivado, de hecho, la aparición de nuevos conceptos matemáticos en física, incluyendo *caos* y *fractal*, luego nos preguntamos también:
 - ¿existe alguna relación esencial entre estos dos conceptos?

Estas cuestiones no son independientes, sino facetas del mismo problema. Puesto que se trata de un problema dinámico (relacionado con la naturaleza de las trayectorias) propongo que empecemos su estudio revisando la historia de la dinámica. Nos encontramos así con respuestas a estas preguntas y, además, con un excelente punto de partida para desarrollar técnicas apropiadas con las que estudiar los sistemas de interés.

Pero antes de seguir esta lógica, empiezo notando que, en el estudio de problemas de sociobiología o dinámica de poblaciones, por ejemplo, hay dos estrategias importantes, que pueden ser complementarias:

- Una, *microscópica*, consiste en diseñar un modelo detallado (como los discutidos en el tema 1 y 2) cuyos elementos representan sujetos sometidos a una regla dinámica que trata de captar lo esencial de su interferencia mutua.

- Otra estrategia, más *fenomenológica*, consiste en tratar de modelar la situación en cuestión mediante un sistema de ecuaciones con parámetros. Uno se encuentra con que estos sistemas de ecuaciones son, de hecho, no-lineales y difíciles de estudiar analíticamente, y el reto consiste en desvelar tantas de sus propiedades como podamos.

La estrategia microscópica ha sido ya investigada con cierto detalle en este curso (en los temas 2 y 3, y se desarrolla con más detalle en Física Estadística); ahora queremos investigar la estrategia ‘fenomenológica’.

Supongamos que el tamaño de una población, y , queda totalmente determinado por su tamaño en la generación anterior, x , de modo que existe una relación funcional $y = f(x)$, generalmente no-lineal, que permite determinar de modo iterativo el tamaño generación tras generación.

¿Implica esta aparente sencillez un comportamiento regular y predecible?

Veamos.

Puesto que $y = f(x)$ describe el crecimiento de una población, es muy posible que sea una función con un solo máximo. La más sencilla es una parábola, como la que describe la trayectoria en el aire de un proyectil. Lo empinado de la trayectoria depende del ángulo de lanzamiento que, en biología de poblaciones, correspondería al mayor ritmo posible de crecimiento en presencia de un mínimo de población. Se corresponde con la fertilidad de una hembra que vive en las mejores condiciones, sin apenas competencia (pequeño x). Esta idea fue explotada por el químico Lotka y el matemático Volterra; quizás volvamos sobre ella. Ahora me interesa resaltar cómo Robert May, un físico australiano cautivado por la ecología, empezó a jugar con esta idea en el ordenador y llegó a proponer un modelo definido por la sencilla ecuación

$$y = rx(1 - x), \quad x, y \in [0, 1]. \quad (1)$$

Esto da el tamaño en una generación sabiendo el tamaño en la generación anterior, y así sucesivamente; r es un parámetro que representa la máxima fertilidad.

Simulemos en el ordenador las iteraciones que sugiere esta fórmula. Pronto vemos que:

- $r < 1$: la población decrece monótonamente hacia cero;
- $1 < r \leq 3$: la población tiende a un equilibrio bien definido, siempre el mismo valor independientemente de la condición inicial;

- $r \nearrow 3$: pasado un transitorio, x_n alterna entre dos valores, siempre los mismos.

En consecuencia,

- en $r = 3$ se pasa del equilibrio a un ciclo entre dos puntos; se dice que $r = 3$ es una *bifurcación* (ver luego).
- Pero ¿qué pasa para mayores valores de r ? :
 - para $r = 3.47$, los dos puntos se transforman en cuatro,
 - que se transforman en ocho para $r = 3.54$, y así sucesivamente.

Esto es, aumentando la fertilidad se produce una especie de *cascada* de bifurcaciones, y los valores que caracterizan las bifurcaciones están cada vez más próximos y se acumulan en $r = 3.57 \dots$

- Más allá de este valor, la situación se hace misteriosa: algunos valores de r producen un régimen periódico, pero las oscilaciones parecen aperiódicas e irregulares para otros valores, y el mínimo cambio en r ó en x_0 puede inducir un comportamiento totalmente diferente.

PROBLEMA 3.2: Confirmad lo anterior estudiando numéricamente —con detalle— el modelo de May.

Si calculamos el tamaño de la población a lo largo de 24 generaciones sucesivas usando dos condiciones iniciales distintas para distintos valores del parámetro r , por ejemplo:

	$r = 2.3$		$r = 3.2$		$r = 4.0$	
x_0	0.23456000	0.78234000	0.23456000	0.78234000	0.98765000	0.98765001

se obtiene:

i	$r = 2.3$		$r = 3.2$		$r = 4.0$	
0	0.23456000	0.78234000	0.23456000	0.78234000	0.98765000	0.98765001
1	0.41294568	0.39165349	0.57453314	0.54490922	0.04878991	0.04878987
2	0.55756954	0.54800037	0.78222340	0.79811693	0.18563782	0.18563768
3	0.56737721	0.56970071	0.54511986	0.52425816	0.60470568	0.60470532
4	0.56455871	0.56382615	0.79348544	0.79922083	0.95614689	0.95614718
5	0.56541399	0.56563030	0.52437216	0.51560414	0.16772007	0.16771899
6	0.56515831	0.56509312	0.79809919	0.79945549	0.55836020	0.55835733
7	0.56523510	0.56525463	0.51563799	0.51349406	0.98637635	0.98637769
8	0.56521207	0.56520621	0.79921745	0.79941731	0.05375220	0.05374697
9	0.56521898	0.56522073	0.51350053	0.51311767	0.20345161	0.20343294
10	0.56521690	0.56521638	0.79941675	0.79944937	0.64823620	0.64819192
11	0.56521753	0.56521768	0.51311874	0.51305625	0.91210412	0.91215662
12	0.56521734	0.56521729	0.79944928	0.79945451	0.32068079	0.32050770
13	0.56521740	0.56521741	0.51305642	0.51304639	0.87137848	0.87113005
14	0.56521738	0.56521737	0.79945450	0.79945533	0.44831210	0.44904993
15	”	←	0.51304642	0.51304639	0.98931345	0.98961636
16	”	←	0.79945533	0.79945547	0.04228940	0.04110327
17	”	←	0.51304481	0.51304456	0.16200405	0.15675516
18	”	←	0.79945546	←	0.54303495	0.53120005
19	”	←	0.51304456	0.51304452	0.99259197	0.99610623
20	”	←	0.79945549	←	0.02941259	0.01551444
21	”	←	0.51304452	0.51304451	0.11418998	0.06109498
22	”	←	0.79945549	←	0.40460251	0.22944952
23	”	←	0.51304451	←.	0.96359727	0.70720976
24	”	←	0.79945549	←	0.14031027	0.82825647

Vemos aquí que, para $r = 2.3$ y 3.2 , condiciones iniciales muy diferentes conducen a los mismos estados, uno convergente y el otro oscilante; sin embargo, para $r = 4$, un cambio en la octava cifra decimal de la condición inicial implica estados totalmente diferentes en 20 generaciones; si cambiamos la cifra decimosexta, el error tarda el doble en explotar.

Desde otro punto de vista, imaginad que estamos simulando el lanzamiento de una moneda con el sistema dinámico (1), de modo que llamamos ‘cara’ al resultado si sale $0 < y < 0.5$ y le llamamos ‘cruz’ si sale $0.5 < y < 1$. El *aparato*, con las condiciones iniciales indicadas:

- siempre produce cruces si $r = 2.3$;
- produce caras y cruces, cada una con probabilidad del 50%, si $r = 3.2$;

- para $r = 4$, produce caras y cruces con probabilidades difíciles de intuir, pues el resultado parece depender aleatoriamente del tiempo (generación) y, lo que es más importante, de la condición inicial.

Este fenómeno, evidenciado por May, que ya se presenta para una ecuación determinista tan sencilla como la (1), es lo que conocemos como **caos**. Volveremos sobre este problema de May cuando conozcamos técnicas para analizar el caos. Ahora volvemos al punto de vista dinámico que propusiese antes.

Cápsula histórica.

La dinámica nace con Newton, alrededor de 1666, cuando inventa las ecuaciones diferenciales, descubre sus leyes del movimiento y de la gravitación universal y, combinándolas, explica las leyes de Kepler sobre el movimiento planetario.³ Éste es el *problema de los dos cuerpos*: determinar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol (por ejemplo) sabiendo que sufren una fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia mutua. Desde entonces, muchos físicos y matemáticos se han empeñado seria y esforzadamente en resolver —extendiendo el método analítico de Newton— el *problema de tres cuerpos*, por ejemplo, determinar los movimientos coordinados del Sol, de la Tierra y de la Luna. Una conclusión de este esfuerzo es que —siguiendo ese camino analítico— es esencialmente *imposible* resolver el problema de tres cuerpos.

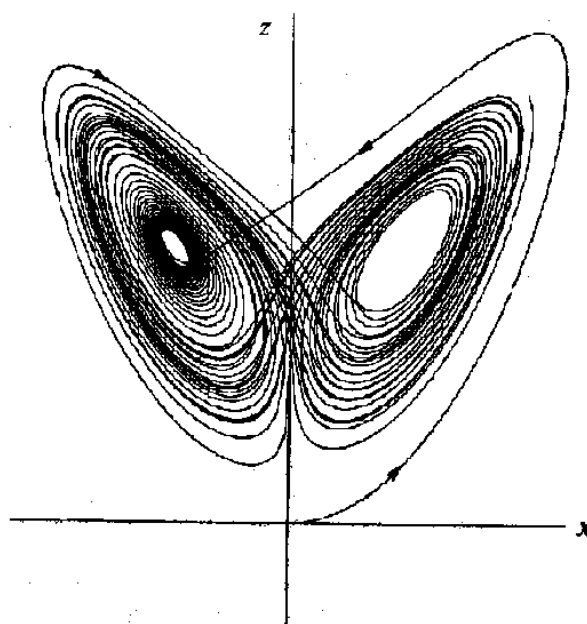
Por los 1890s, Poincaré introdujo un nuevo punto de vista. Por ejemplo, en lugar de buscar la posición exacta de los planetas en todo instante, se pregunta: ¿Es el sistema solar estable para siempre o los planetas pueden —eventualmente— salir volando hacia el infinito? Poincaré estudió este problema desarrollando un poderoso método *geométrico*, que ha dado lugar a la moderna dinámica, y, por primera vez, notó la existencia de sistemas dinámicos deterministas que tenían órbitas no-periódicas tan sensibles a las condiciones iniciales que no podían hacerse predicciones a largo término.

Pero el estudio del **caos** vislumbrado por Poincaré no se acometió hasta mediados de los 1950,⁴ cuando se dispuso de los primeros ordenadores que

³Sigo Strogatz 1994.

⁴Hasta entonces la dinámica se ocupó preferentemente de las aplicaciones en física e ingeniería del concepto de oscilación no-lineal (radio, radar, láser,...), para lo que hubo que desarrollar nuevas matemáticas y generalizar los métodos geométricos de Poincaré (los trabajos de Birkhoff y, luego, Kolmogorov, Arnold y Moser).

permitieron ‘experimentar’ con ecuaciones y desarrollar así intuición. Esto permitió el descubrimiento por Lorenz en 1963 de *movimiento caótico* cuando ‘jugaba’ a simular los fenómenos de convección en nuestra atmósfera tratando de comprender la notoria impredecibilidad del tiempo atmosférico. Lorenz notó que las soluciones de las ecuaciones que él proponía para modelar esa convección no relajaban hacia el equilibrio o hacia un estado periódico, sino que seguían oscilando de modo fuertemente irregular; además, condiciones iniciales ligeramente distintas pronto conducían a estados totalmente diferentes. Esta observación era desalentadora, pues implicaba una impredecibilidad inherente dados los inevitables errores que uno hace al medir el estado presente de la atmósfera. Pero, lo que es más importante, Lorenz también detectó cierto orden o estructura en este caos: un corte bidimensional de sus soluciones tridimensionales, que él describió como “un complejo infinito de superficies”, producían una figura en forma de mariposa. Es el paradigma de lo que hoy conocemos como *atractor extraño*, que resulta ser una variedad —no describible como punto, ni como curva, ni como superficie— que llamamos *fractal*, esto es, que tiene dimensión fraccionaria (entre 2 y 3 en este caso): El trabajo de Lorenz tuvo poco impacto hasta que Ruelle y Tak-



ens (1971) propusieron una nueva teoría para la aparición de turbulencia en fluidos basada en consideraciones abstractas acerca de atractores extraños.

May encontró después ejemplos de caos al estudiar biología de poblaciones con el modelo $y = rx(1 - x)$ discutido antes, y escribió un influyente

resumen⁵ que resalta la importancia pedagógica de estudiar sistemas no-lineales sencillos, con objeto de compensar la *intuición lineal*, inapropiada para tantas situaciones, de la educación tradicional.

Feigenbaum mostró enseguida, para sorpresa de muchos, que hay ciertas **leyes universales** que gobiernan la transición de comportamiento regular a caótico; en pocas palabras, que sistemas diferentes se hacen caóticos de la misma forma. Por aquel entonces, esto ya era familiar en física en las proximidades de puntos críticos, de modo que se había descubierto una relación íntima entre dos tipos de fenómenos aparentemente muy distintos: caos y cambios de fase (comienzo de la condensación, o del ferromagnetismo, superconductividad y superfluidez, etc.). Se hizo enseguida evidente la existencia de caos en fluidos, reacciones químicas, circuitos electrónicos, osciladores mecánicos, semiconductores,...

Simultáneamente, Mandelbrot y otros habían ido estudiando la aparición de *ruido* $1/f$, que es característico de criticalidad en el estado de equilibrio, en otras situaciones mucho menos familiares para la física del momento (por ejemplo, fuera del equilibrio), y habían popularizado el concepto de *objetos con dimensión fraccionaria*, fractales, mostrando que aparecían por doquier, incluso en biología; por ejemplo, se describió comportamiento caótico y fractal en ritmos cardíacos.

⁵RM May, 'Simple mathematical Models with very Complicated Dynamics', *Nature* 261, 459 (1976)

2.- Sistemas dinámicos. No-linealidad.

Confirmando lo dicho al principio, nos interesa la estructura lógica de la dinámica. Empezamos notando que los sistemas dinámicos pueden clasificarse en

- **ecuaciones diferenciales**, que describen la evolución temporal considerando el tiempo como una variable continua; es el caso más familiar en ciencia y tecnología, luego el más frecuente entre los ejemplos que nos interesan; y
- **mapas iterados** (o **dinámicos**), nombre por el que se conocen en este contexto las ecuaciones en diferencias finitas o descripciones en tiempo discreto; el modelo de May descrito arriba es un ejemplo.

Las ecuaciones diferenciales pueden ser:

ecuaciones en derivadas parciales, con el tiempo t y el espacio x como variables independientes, como la *ecuación del calor*,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

ecuaciones diferenciales ordinarias, que sólo involucran derivadas ordinarias, dx/dt y d^2x/dt^2 , con t como única variable independiente, como en el *oscilador armónico amortiguado*,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (2)$$

Estas últimas, las más interesantes en tanto en cuanto no nos preocupe la estructura espacial (que no siempre es el caso), pueden representarse:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$ y las variables $x_1, \dots, x_n$ representan concentraciones de sustancias químicas en un reactor, poblaciones de diferentes especies en un ecosistema, posiciones y velocidades de los planetas en el sistema solar,

etc. Por ejemplo, el oscilador amortiguado puede escribirse de esta forma introduciendo nuevas variables $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$, de donde se sigue:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1\end{aligned}$$

Este sistema se dice **lineal** puesto que las funciones f_i son lineales, esto es, todas las variables a la derecha, $x_1, \dots, x_n$, sólo aparecen elevadas a la primera potencia. El sistema es **no-lineal** si aparecen a la derecha productos, otras potencias y otras funciones de las x_i , como x_1x_2 , $(x_1)^3$ ó $\cos x_2$. Un ejemplo de sistema no-lineal es el péndulo

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0,$$

donde x es el ángulo con la vertical, g la aceleración gravitatoria, y L la longitud del péndulo, que puede escribirse

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{L} \sin x_1.\end{aligned}$$

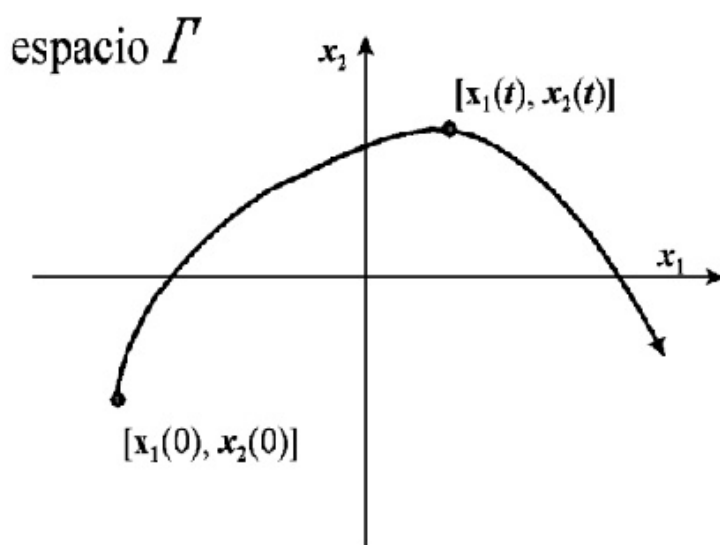
La ausencia en estas ecuaciones de dependencia lineal, esto es, falta de proporcionalidad entre causas y efectos, convierte al péndulo en un problema de difícil solución analítica.

El origen de esta dificultad está en que los sistemas no-lineales no comparten una sencilla propiedad de los lineales: éstos pueden separarse en partes, de modo que puede resolverse cada parte separadamente y luego combinar las soluciones para obtener la respuesta completa. Todo sistema lineal es precisamente igual a la suma de sus partes. Esta propiedad es el alma del concepto de modos normales, de los argumentos de superposición, y de los poderosos métodos de las transformadas de Laplace y análisis de Fourier. Pero esta propiedad es rara en la naturaleza, donde las partes interfieren, cooperan o compiten produciendo efectos no-lineales y dando al traste con el principio de superposición (escuchando dos canciones favoritas a la vez, ¡no sentimos el doble de placer!)

De hecho, como consecuencia de esa dificultad, vosotros habréis estudiado el problema del péndulo en la aproximación de pequeños ángulos, $\sin x \approx x$ para $x \ll 1$, lo que lo hace lineal y de solución inmediata. Esta aproximación puede ser suficiente para comprender el uso del péndulo en un reloj, por ejemplo, pero olvida mucha de la física del problema original que puede ser fundamental en situaciones realistas. Afortunadamente, aunque difícil, este

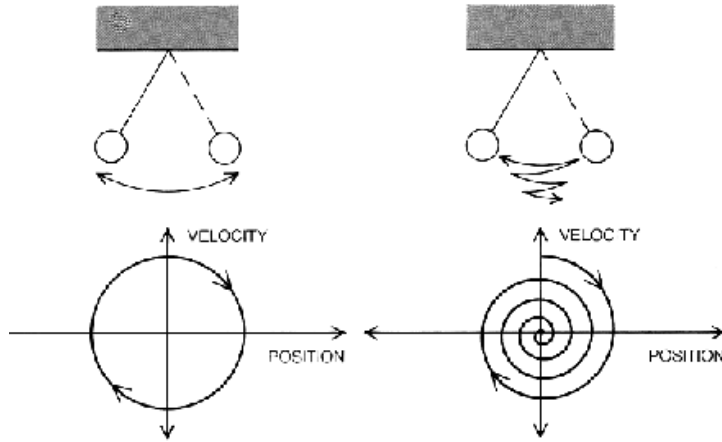
problema tiene solución analítica **exacta** en términos de funciones elípticas pero, dada la sencillez del movimiento (oscilaciones —quizá no armónicas— para pequeñas energías y giros por arriba para altas energías), uno tiene la esperanza de resolverlo más sencillamente usando **métodos geométricos** que fueran aplicables a otros problemas no-lineales, particularmente a aquéllos que no tienen solución analítica exacta.

La idea es como sigue. Suponed que conocemos la solución del péndulo, esto es, las funciones posición $x_1(t)$ y velocidad $x_2(t)$, para una condición inicial particular. Si construimos un espacio abstracto (x_1, x_2) , el llamado **espacio fásico**, Γ , esta solución corresponde a un punto moviéndose a lo largo de una curva, llamada **trayectoria** u **órbita**: Un ejemplo son las



trayectorias en Γ correspondientes a péndulos simples, ideal (izquierda) y con fricción (derecha): Notamos:

- el espacio fásico está lleno de trayectorias, puesto que cada punto es una posible condición inicial.
- En general, Γ es el espacio de coordenadas $x_1, \dots, x_n$, luego tiene dimensión n , y se dice que el **sistema dinámico** es **de orden n** .
- el tiempo no aparece explícitamente en (3) puesto que tampoco aparecía en (2). Si tuviese que aparecer, por ejemplo, si el sistema fuera el oscilador armónico forzado $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos t$, el tiempo se trataría



como una variable más en Γ , esto es, habríamos introducido las variables $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ y $x_3 = t$, de modo que el sistema equivalente sería:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-bx_2 - kx_1 + F \cos x_3) \\ \dot{x}_3 &= 1.\end{aligned}$$

Este sistema se dice **no-autónomo**. Un sistema de n ecuaciones con dependencia temporal explícita es, pues, un sistema no-autónomo de orden $n + 1$: el hacer desaparecer la dependencia temporal añade una dimensión extra a Γ .

Pues bien, estas ideas sugieren que, en lugar de tratar de resolver el conjunto de ecuaciones (3) que caracteriza el sistema, podríamos proceder al revés, siguiendo un método geométrico: dado el sistema, tratamos de dibujar sus trayectorias y todas las propiedades posibles de éstas, lo que nos proporcionará generalmente importante información acerca de la solución.

Caos *vs* ergodicidad.

Desde una perspectiva tradicional en mecánica clásica, al estudiar trayectorias en Γ , se presentan dos casos notables: sistemas completamente integrables y sistemas ergódicos. Se dice que un sistema es **integrable** si sus

constantes del movimiento —funciones (analíticas) de coordenadas y momentos que permanecen invariantes durante el movimiento— son suficientes para determinar la trayectoria por completo. En otro caso, el **sistema** es **no-integrable**.⁶

Es fácil distinguir estos dos casos en la práctica:

- Si el sistema es integrable, las trayectorias quedan determinadas por funciones analíticas de los momentos y coordenadas, luego no puede haber diferencias dramáticas entre trayectorias próximas y, para tiempos cortos, se observan separaciones proporcionales al tiempo.

EJERCICIO 3.3: Demostradlo suponiendo que es posible una transformación a variables acción-ángulo.

- Sin embargo, dos trayectorias próximas divergerán exponencialmente, por lo general, si el sistema es no-integrable.

Si todo el espacio de las fases es patológico en este sentido, esto es, si cualquier trayectoria se separa (diverge) exponencialmente de trayectorias próximas, una trayectoria única pasará arbitrariamente próxima a cualquier punto dado; es el caso de los **sistemas ergódicos y mezcla**.⁷

La estructura de Γ en el caso genérico es mucho más interesante que las de los casos completamente integrable y ergódico. De acuerdo con el teorema KAM,⁸ hay regiones de Γ en las que el sistema es integrable y regiones de no-integrabilidad y, lo que es peor, estas regiones están complicadamente anidadas unas dentro de otras en todas las escalas.

El hamiltoniano de Henon-Heiles,

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3,$$

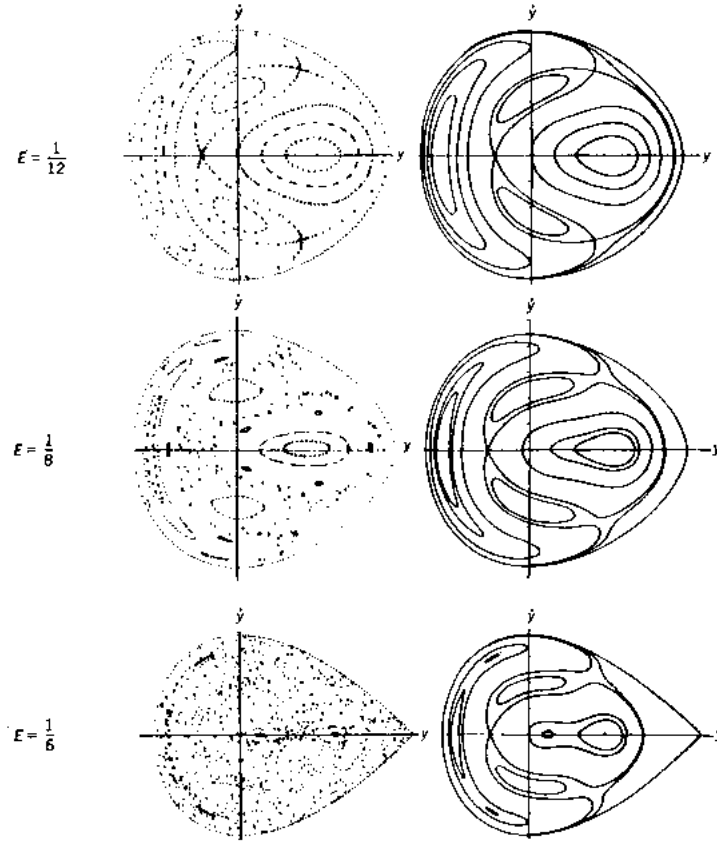
pensado para modelar el movimiento de estrellas en el disco galáctico, permite ilustrar esta situación.

⁶En otros términos, si el sistema es integrable, pueden determinarse (analíticamente o mediante una serie perturbativa canónica) las variables acción-ángulo de la teoría de Hamilton-Jacobi. Si este programa falla, las integrales de acción son funciones no-analíticas y la serie perturbativa canónica no converge, y el **sistema** se dice **no-integrable**.

⁷No tiene mucho interés construir una de estas trayectorias, puesto que un cambio mínimo en las condiciones iniciales produce una trayectoria totalmente distinta (que también llena Γ). Pero la ergodicidad implica otro tipo de sencillez: como muestra la Mecánica Estadística, si el sistema es ergódico, el promedio temporal a lo largo de una trayectoria puede reemplazarse por un promedio en Γ , lo que proporciona un potente método para estudiar este tipo de sistemas.

⁸Kolmogorov, Arnold y Moser; ver referencias 1, 14 y 16 en Creswick *et al*, pág. 68.

Consideremos los **mapas de Poincaré** correspondientes al hamiltoniano de Henon-Heiles, esto es, las intersecciones con un plano de la trayectoria en la superficie (tri-dimensional) de energía —correspondiente al valor E (sin dimensiones) indicado: (las figuras de la izquierda fueron obtenidas con el



ordenador; las de la derecha, mediante teoría perturbativa canónica).

Por conservación de energía, la trayectoria está confinada a una de las (hiper-) superficies de energía, luego atraviesa el plano de intersección dejando un punto como rastro. Cuando la energía es menor ($E = \frac{1}{12}$ en la figura), las trayectorias reales se parecen mucho a las calculadas con teoría de perturbaciones. Al incrementar E , aparecen regiones ‘caóticas’ que coexisten con islas de integrabilidad. En el caso de mayor energía ($E = \frac{1}{6}$ en la figura) los puntos, que corresponden a las intersecciones de una trayectoria única, revelan que ésta es caótica, dando lugar a una distribución aleatoria de puntos en el plano.

Lo anterior parece sugerir que el sistema de Henon-Heiles es integrable para bajas energías, cuando el cálculo perturbativo produce muy buenos

resultados. Sin embargo, siguiendo las trayectorias con más detalle, amplificando esas regiones supuestamente integrables, uno observa finas **capas estocásticas** donde las trayectorias son caóticas. Al aumentar E , aumenta la anchura de estas capas estocásticas y, eventualmente, emerge el comportamiento caótico a larga escala.

El modelo *anillo de almacenamiento*:⁹

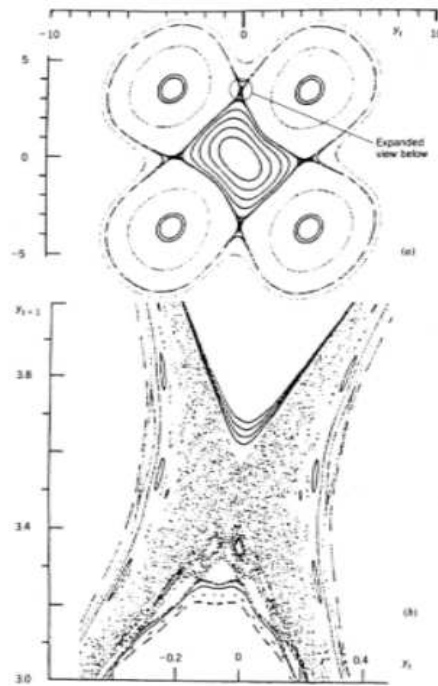
$$y_{t+1} = y_t \cos(2\pi q) + p_t \frac{\sin(2\pi q)}{q}$$

$$p_{t+1} = -y_t q \sin(2\pi q) + p_t \cos(2\pi q) + b f(y_{t+1})$$

donde

$$f(y) = \frac{2}{y} \left[1 - \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \right],$$

permite ilustrar con sencillez una situación de este tipo. Los cortes de una trayectoria única producen el gráfico superior: que sugiere integrabilidad.



Sin embargo, una observación más detallada de la zona indicada revela comportamiento caótico en el gráfico inferior.

Una de las consecuencias de la no-integrabilidad es, pues, dificultad en la predicción del comportamiento de los sistemas dinámicos para tiempos

⁹M.J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **21**, 699 (1979)

grandes. Un cambio mínimo en la condición inicial tiende a crecer exponencialmente y, eventualmente, no sabremos por dónde discurre su trayectoria. Para extender el tiempo en el que podemos seguir la trayectoria con confianza, hemos de reducir el orden de magnitud del error inicial.

Uno de los problemas de la dinámica no-lineal es pues el de estimar el grado de comportamiento caótico y la escala temporal en la que pueden hacerse predicciones fiables sobre la trayectoria.

Un problema relacionado es el de conocer bien la **transición hacia el caos**, donde emergen las capas estocásticas y desaparecen los últimos vestigios de integrabilidad.¹⁰ El hamiltoniano de Henon–Heiles, donde el grado de comportamiento caótico crece con la energía, sugiere que la transición hacia el caos en sistemas grandes podría ocurrir para un valor de la energía, $E(N)$, donde N es el número de partículas o grados de libertad.¹¹

¹⁰Este problema es fundamental en Mecánica Estadística donde un sistema aislado ha de ser ergódico para que pueda aplicársele la (potente) teoría de colectividades. Se hace la hipótesis de que todo sistema con muchos grados de libertad es ergódico, pero esto sólo se ha demostrado en unos pocos casos.

¹¹El comportamiento de $E(N)$ en el límite termodinámico ($N \rightarrow \infty$) determinaría entonces si el sistema es propiamente ergódico o no.

3.- Las ecuaciones de Lorenz

El sistema tri-dimensional de Lorenz:¹²

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{4}$$

donde $\sigma, r, b > 0$ representan parámetros, es el punto de partida tradicional para estudiar con profundidad comportamiento caótico.

Estas ecuaciones fueron propuestas como un modelo muy simplificado de la convección en forma de anillos que parece ocurrir a veces en la atmósfera. Tratan de describir el comportamiento futuro, a partir del estado presente, de tres magnitudes que caracterizan la corriente de convección en un depósito de fluido que se calienta por debajo.

En estas condiciones, el fluido es arrastrado, formando una especie de carrete de fotos. Esta corriente se estabiliza si la temperatura de la fuente de calor no es muy alta. En otro caso, la velocidad del flujo fluctúa, y puede invertirse, mostrando un comportamiento aleatorio.

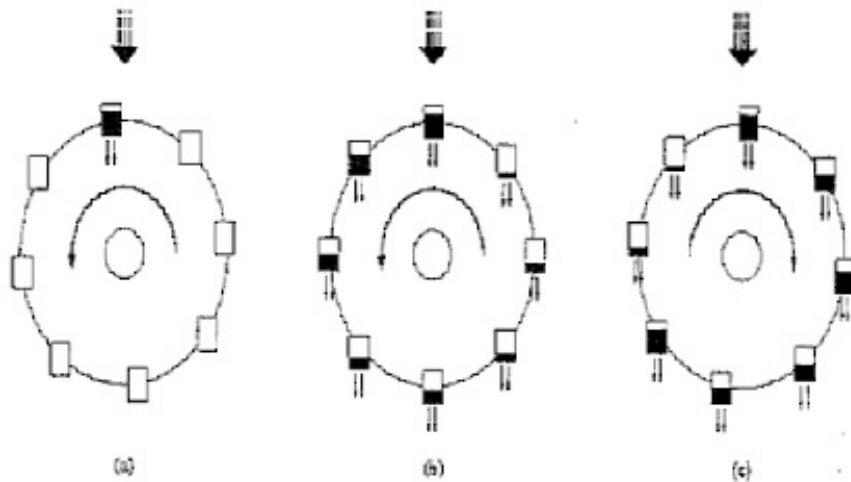
Las tres magnitudes a las que se refiere Lorenz en (4) son:

$$\begin{aligned}x &\rightarrow \text{velocidad del flujo en el carrete} \\ y &\rightarrow \begin{cases} \text{diferencia de } T \text{ entre los elementos} \\ \text{ascendente y descendente del fluido} \end{cases} \\ z &\rightarrow \begin{cases} \text{desviaciones del perfil vertical de } T \\ \text{respecto de su valor de equilibrio} \end{cases}.\end{aligned}$$

Para lo que aquí interesa, es suficiente con imaginar al conjunto (x, y, z) como un punto en un cierto espacio tri-dimensional, de modo que el sistema de Lorenz describe la velocidad en ese espacio.

¹²Edward N. Lorenz, ‘Deterministic nonperiodic flow’, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963). Sigo Strogatz 1994 donde hay otras referencias.

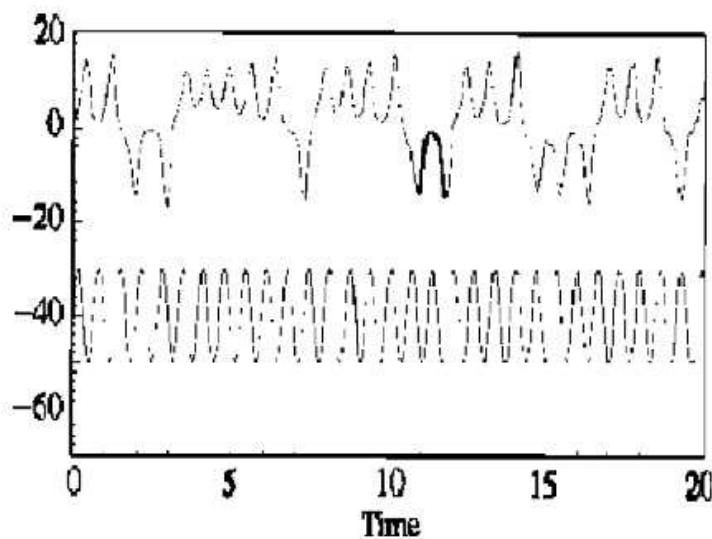
De hecho, hoy día sabemos que el sistema tri-dimensional de Lorentz describe también, aproximadamente, otras situaciones, como el caso de una noria (de juguete) con vasos agujereados:



Imaginad que cae constantemente agua desde arriba:

- Si el flujo es pequeño, los vasos más altos no consiguen llenarse lo suficiente como para vencer la fricción y la noria no llega a funcionar.
- Para mayores flujos, fig. (a), la noria comienza a girar y, eventualmente, logra un movimiento estacionario en una dirección o en la otra, como en fig. (b), dependiendo de la condición inicial.
- Pero se observa que este movimiento estacionario se desestabiliza a veces, haciéndose caótico, al incrementar el flujo, fig. (c): la noria gira en una dirección, pero algunos vasos se llenan demasiado y la rueda no tiene inercia suficiente para subirlos, lo que frena la noria y puede llegar a invertir la dirección de giro, para seguir esa dirección o volver a invertirse, y así sucesivamente, mostrando cambios erráticos de dirección.

Se han hecho realizaciones experimentales de esta idea que confirman su comportamiento caótico acorde con (4). Por ejemplo, midiendo la velocidad



angular de la noria se encuentra algo así (comparado con el caso regular $\sin t$): Queremos saber de dónde viene este comportamiento caótico, y comprender la naturaleza del punto (bifurcación) en el que la rueda es capaz de pasar de un estado estático a uno de rotación estacionaria, y luego a uno con cambios irregulares.

Esto es, estamos en presencia de un sistema en el que, al modificar los parámetros, se producen cambios cualitativos de comportamiento dinámico. Se llama **bifurcación** a un punto en el espacio de parámetros caracterizado por valores para los que ocurre uno de estos cambios.¹³

EJERCICIO 3.4:¹⁴ Usando las pistas dadas a continuación, el alumno ha de convencerse de que el sistema noria que hemos descrito se rige, en efecto, por un conjunto de ecuaciones semejante al de Lorenz.

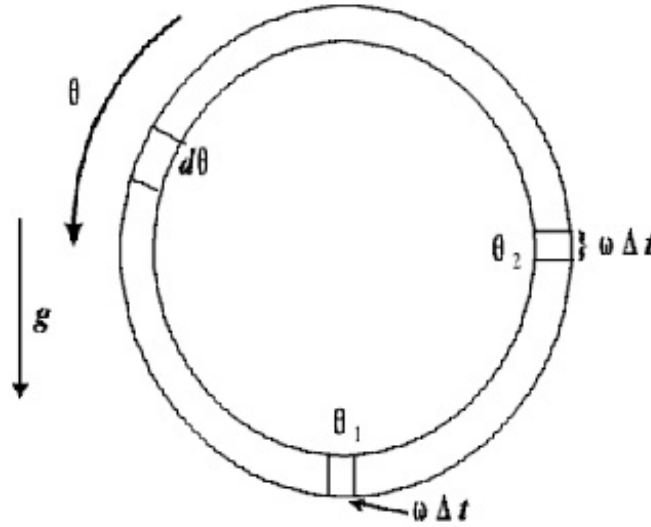
PISTAS: Sea:

- $\theta \in [0, 2\pi]$: ángulo que describe el giro hacia la izquierda de la rueda en sistema laboratorio (no en el sistema adosado a la rueda)

¹³Para más detalles, ver Strogatz 1994 (capítulo 3, pág. 44), por ejemplo.

¹⁴Avanzado para este curso, pero estándar en dinámica.

- $Q(\theta)$: ritmo de entrada de agua por encima de la posición θ
- K : ritmo de pérdida de agua por goteo
- una rueda con radio r , momento de inercia I , en presencia de gravedad g , y con un ritmo de amortiguación rotacional (debido a fricción) $v > 0$.



Las incógnitas son:

- $\omega(t)$: velocidad angular de la rueda, tomada positiva en la dirección contraria a las agujas del reloj, como θ
- $m(\theta, t)$: distribución de masa de agua a lo largo de la rueda, definida de modo que la masa en el sector $[\theta_1, \theta_2]$ es

$$M(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} m(\theta, t) d\theta$$

Por otra parte, notamos que esperamos un movimiento complicado para la noria, luego parece lógico involucrar un análisis de Fourier. En particular, puesto que $m(\theta, t)$ ha de tener cierta periodicidad en θ proponemos escribirla como una serie de Fourier:

$$m(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta]. \quad (5)$$

Aparecen así $a_n(t)$ y $b_n(t)$, esto es, las amplitudes de los diferentes armónicos o modos, como nuevas incógnitas. Escribimos también el ritmo de entrada de agua como serie de Fourier:

$$Q(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos n\theta, \quad (6)$$

que no contiene términos $\sin n\theta$ puesto que suponemos que el agua se añade por arriba de forma simétrica.¹⁵

Se llega finalmente al sistema:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \omega b_1 - K a_1 \\ \dot{b}_1 &= -\omega a_1 - K b_1 + q_1 \\ \dot{\omega} &= -\frac{v}{I} \omega + \frac{\pi g r}{I} a_1, \end{aligned} \quad (7)$$

puesto que se consiguen desacoplar las variables a_1 , b_1 y ω de los otros modos.

OTRAS INDICACIONES: _____

(1) Establecemos primero la conservación de masa:

(Usamos un argumento estándar.) El cambio ΔM en la masa durante un intervalo infinitesimal Δt tiene cuatro contribuciones:

- la masa que entra desde arriba, $\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q d\theta \right] \Delta t$;
- la masa que sale por los agujeros, $\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} K m d\theta \right] \Delta t$, suponiendo que el ritmo de pérdida es proporcional a la masa en esa parte de la noria;¹⁶
- al girar la rueda, aparece un nuevo bloque de agua en el sector en consideración cuya masa es $m(\theta_1) \omega \Delta t$, donde $m(\theta_1)$ es su masa por unidad de ángulo, y

¹⁵Tanto en θ como en $-\theta$, en lo que difiere de una noria de verdad, en la que se rompe esta simetría para que sea útil.

¹⁶Es razonable pensar —como hace Malkus al proponer este modelo— que, en efecto, mayor presión en los vasos produce una mayor pérdida, pero los procesos de pérdida son complicados y podrían imaginarse otras reglas, que harían más complejo el modelo.

- se pierde una masa de agua igual a $-m(\theta_2)\omega\Delta t$.

En consecuencia,

$$\Delta M = \Delta t \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} Km d\theta \right] + m(\theta_1)\omega\Delta t - m(\theta_2)\omega\Delta t.$$

Si escribimos $m(\theta_1) - m(\theta_2) = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial m}{\partial \theta} d\theta$, se sigue:

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(Q - Km - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \right) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial m}{\partial t} d\theta,$$

donde la última igualdad es una expresión de dM/dt consecuencia de la definición de M , luego

$$\frac{\partial m}{\partial t} = Q - Km - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \quad (8)$$

conocida como **ecuación de continuidad**. Notad que, en contra de lo más habitual, se trata de una ecuación no-ordinaria, en derivadas parciales.

(2) A continuación, queremos obtener una ecuación para $\omega(t)$:

La rotación está gobernada por la ley de Newton $F = ma$ expresada como la igualdad entre las torsiones aplicadas y el cambio en el momento angular. El momento de inercia I depende de t , puesto que cambia la distribución de agua, pero esta complicación desaparece si esperamos suficientemente (literalmente un tiempo $t \rightarrow \infty$) para que $I(t) \rightarrow \text{constante}$.¹⁷ Así, después de un tiempo transitorio, la ecuación de movimiento es

$$I\dot{\omega} = \text{torsión de amortiguación} + \text{torsión gravitatoria}$$

¹⁷PROBLEMA 3.4.1: Demostrad que $I(t) \rightarrow \text{constante}$ cuando $t \rightarrow \infty$ para esta noria, y calcular el valor de esa constante, notando para ello que:

- (a) $I = I_{\text{rueda}} + I_{\text{agua}}$, donde I_{agua} ha de expresarse en función de $M(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} m(\theta, t) d\theta$.
(b) Hay que probar entonces que $\dot{M} = Q_{\text{total}} - KM$ con $Q_{\text{total}} \equiv \int_0^{2\pi} Q(\theta) d\theta$.

La hipótesis es que la rueda tiene un ritmo de amortiguación rotacional v , de modo que ‘torsión de amortiguación’ $= -v\omega$, que se opone al movimiento.¹⁸ La torsión gravitacional es como la de un péndulo invertido, pues el agua entra por la parte alta de la rueda (ver figura arriba). Esto es, un sector infinitesimal $d\theta$ tiene una masa de agua $dM = m d\theta$ que produce una torsión gravitacional $d\tau = (dM) g r \sin \theta = m g r \sin \theta d\theta$.¹⁹

Integrando, ‘torsión gravitatoria’ $= g r \int_0^{2\pi} m(\theta, t) \sin \theta d\theta$. Se sigue

$$I\dot{\omega} = -v\omega + g r \int_0^{2\pi} m(\theta, t) \sin \theta d\theta, \quad (9)$$

ecuación integrodiferencial que da la información requerida. Esto es, conocidos los valores actuales de $m(\theta, t)$ y $\omega(t)$, (8) y (9) resuelven nuestro problema, pues determinan m y ω en cualquier otro t .

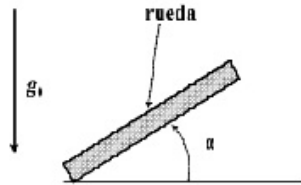
(3) Introducimos el análisis de Fourier sugerido en "pistas":

Si llevamos las series (5) y (6) para m y Q , respectivamente, a (8) y (9), obtenemos ecuaciones —que resultan ser diferenciales ordinarias— para las nuevas incógnitas, $a_n(t)$, $b_n(t)$ y $q_n(t)$. En particular, se tiene de (8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta] &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos n\theta \\ &- \left(K + \omega \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta]. \end{aligned}$$

¹⁸Esta hipótesis encierra el hecho de que hay dos fuentes de amortiguación: la viscosa debida al aceite involucrado en el mecanismo que permite la rotación de la rueda, y una amortiguación ‘inercial’ más sutil debida a que el agua entra a velocidad angular nula pero alcanza la ω de la rueda antes de abandonarla. Estos dos efectos se saben proporcionales a ω (igual que la fricción puede ser proporcional a la velocidad en movimientos lineales).

¹⁹Para asegurarnos del signo notamos que esta torsión tiende a incrementar ω para $\sin \theta > 0$, como en un péndulo invertido. Por otra parte, si suponemos el caso más general en el que la rueda puede estar inclinada respecto de la vertical:



g es aquí la constante gravitacional efectiva, esto es, $g = g_0 \sin \alpha$ con g_0 la constante usual.

Aquí hemos de hacer las derivadas indicadas y ordenar términos; notamos entonces que, por ortogonalidad de las funciones $\sin n\theta$ y $\cos n\theta$, podemos igualar los coeficientes de cada armónico por separado, luego

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= n\omega b_n - K a_n \\ \dot{b}_n &= -n\omega a_n - K b_n + q_n \end{aligned} \quad (10)$$

para todo $n = 0, 1, \dots$. Seguidamente, sustituimos la serie para $m(\theta, t)$ en (9) e, inesperadamente, resulta que sólo un término de la integral sobrevive por ortogonalidad:

$$\begin{aligned} I\dot{\omega} &= -v\omega + gr \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta] \sin \theta \, d\theta \\ &= -v\omega + gr \int_0^{2\pi} a_1 \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= -v\omega + \pi gra_1. \end{aligned}$$

(4) Finalmente, usando (10), se tiene el sistema (7).

Notamos que el sistema resultante es cerrado (las variables a_1 , b_1 y ω se han desacoplado de los otros modos).²⁰ Es un buen ejemplo de cómo un tratamiento adecuado (descomposición en series de Fourier) simplifica el problema hasta el punto de que las ecuaciones originales, una en derivadas parciales y otra integrodiferencial, se reducen a un (aparentemente sencillo) sistema tridimensional.

²⁰PROBLEMA 3.4.2: Determinad cómo se comportan los modos restantes:

Si $Q(\theta) = q_1 \cos \theta$, la respuesta es que $a_n, b_n \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$ y $n \neq 1$.

El caso general $Q(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos n\theta$ es difícil. Tratar de concluir algo. Está hecho en M Kolar & G Gumbs, 'Theory for the experimental observation of chaos in a rotating waterwheel', Phys. Rev. A 45, 626 (1992)

Dos cuestiones interesantes:

1. Puede ahora comprobarse cómo el sistema noria es equivalente al de Lorenz (4):

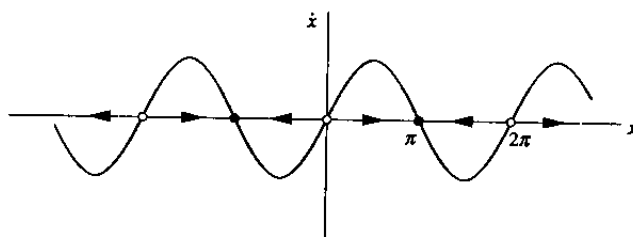
PROBLEMA 3.5: Encontrad un cambio de variables que transforme las ecuaciones para la noria de juguete en las ecuaciones de Lorenz.

Hay que ser sistemático para no perderse. Ha de llegarse a las equivalencias $x \longleftrightarrow \omega$, $y \longleftrightarrow a_1$ y $z \longleftrightarrow b_1$. También se llegará a que el parámetro b de Lorenz es $b = 1$ (de modo que las ecuaciones de Lorenz son más generales), y a expresiones para los números de Prandtl, σ , y Rayleigh, r , en términos de los parámetros de la noria.

2. ¡No nos dejemos engañar por la aparente sencillez de las ecuaciones resultantes! Nunca nadie ha llegado todavía a entenderlas por completo: su comportamiento es fantásticamente complejo. A continuación repasamos lo que puede decirse con un esfuerzo razonable.

Empezamos definiendo el concepto de **punto fijo** y buscaremos luego los de (7).

Imaginemos un sistema unidimensional, $\dot{x} = f(x)$, por ejemplo, el caso no-lineal $\dot{x} = \sin x$. Su representación en el espacio de las fases, Γ , nos es familiar desde el colegio: La novedad es que propongo imaginar esto como la



representación de un flujo estacionario a lo largo del eje x con velocidad en cada punto que varía de acuerdo con $\dot{x} = \sin x$, esto es, la velocidad viene dada por la ordenada en esta representación. En estas condiciones:

- son **puntos fijos** aquellos en los que no hay flujo, es decir, aquellos para los que $\dot{x} = 0$. Notamos dos tipos de éstos:

- **estables**, también llamados **atractores** o sumideros, señalados con puntos negros (π y $-\pi$), hacia los que nos conduce la trayectoria, e
- **inestables**, llamados **repelentes** o fuentes, identificados con puntos vacíos (2π y -2π), de los que nos separa la trayectoria.

Es evidente que estos conceptos aplican a flujos más generales en Γ y que el estudio de los puntos fijos de un sistema dinámico proporcionará importante información acerca de las propiedades de éste.²¹ En este contexto los

- **puntos de bifurcación** —en el espacio de parámetros—, a los que ya nos hemos referido antes, se corresponden con cambios en la estructura cualitativa de estos flujos, tales como creación o destrucción de puntos fijos o cambios en sus propiedades de estabilidad, al cambiar el valor de los parámetros del sistema.

Volviendo a las ecuaciones (7), exigiendo la estacionaridad que los caracteriza, $\dot{a}_1 = \dot{b}_1 = \dot{\omega} = 0$, se tiene para los **puntos fijos**:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\omega}{K} b_1 \\ \omega a_1 &= q_1 - K b_1 \\ a_1 &= \frac{v}{\pi g r} \omega \end{aligned} \tag{11}$$

Se siguen dos tipos de puntos fijos a considerar:

1. Si $\omega = 0$, se tiene de (11) que $a_1 = 0$ y $b_1 = q_1/K$. Este punto fijo,

$$(a_1^*, b_1^*, \omega^*) = \left(0, \frac{q_1}{K}, 0\right),$$

se corresponde con un estado *sin rotación*: la noria está en reposo puesto que la entrada de agua iguala las pérdidas. No digo que este estado sea estable —luego estudiamos estabilidad—, sino que existe.

2. Si $\omega \neq 0$, se tiene de (11) que $b_1 = K q_1 / (\omega^2 + K^2)$ y también $b_1 = K v / \pi g r$. Puesto que $K \neq 0$, igualando estas expresiones, $q_1 / (\omega^2 + K^2) = v / \pi g r$, de donde

$$(\omega^*)^2 = \frac{\pi g r q_1}{v} - K^2.$$

²¹Pueden verse detalles sobre puntos fijos y cuestiones relacionadas en Strogatz 1994 (capítulo 2, pág. 15), por ejemplo.

Si esto es positivo, es decir, sii

$$R \equiv \frac{\pi g r q_1}{K^2 v} > 1,$$

hay dos soluciones, $\pm\omega^*$, correspondientes a rotación estacionaria en cada una de las dos posibles direcciones.

A R , que no tiene dimensiones, se le llama **número de Rayleigh**. Caracteriza la relación o competencia entre:

- el arrastre —medido por g y q_1 , que se corresponden con la gravedad y con la entrada de agua, respectivamente, que tienden a hacer girar la rueda— y
- la disipación en el sistema —medida por K y v , que se corresponden con las pérdidas de agua y con la fricción, que tienden a parar la rueda.

Tiene pues sentido que la rotación estacionaria requiera un número R suficientemente grande (más arrastre que fricción).

R aparece en otras partes de la mecánica de fluidos. Por ejemplo, en la convección cuando un fluido laminar se calienta por abajo, en cuyo caso R es proporcional a la diferencia de temperaturas abajo y arriba. Para gradientes pequeños, hay conducción vertical de calor pero el fluido permanece sin movimiento. Cuando R sobrepasa un cierto valor crítico, aparece una inestabilidad: el fluido calentado es menos denso y empieza a subir, mientras que el frío arriba empieza a bajar, formándose *anillos de convección*.

Esta situación, que estudiamos en fnl.01, es análoga a la de rotación estacionaria en la noria. Al seguir aumentando R , los anillos se ondulan y, eventualmente, se hacen caóticos. La analogía desaparece al seguir aumentando R , cuando se forma turbulencia y el movimiento convectivo se hace complejo en el espacio y en el tiempo, mientras que la noria describe un movimiento pendular.

Propiedades del sistema de Lorenz; caos en atractor extraño

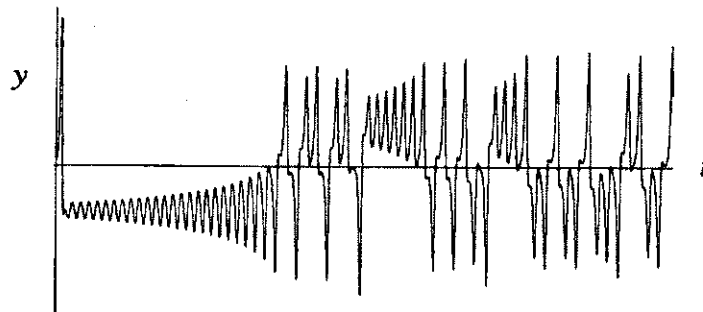
Lorenz hizo un estudio sistemático de las propiedades de sus ecuaciones usando métodos tradicionales hasta encontrarse con comportamientos inusuales. Evitamos aquí este estudio;²² sólo mencionamos que, como para la noria, aparecen dos tipos de puntos fijos:

- el origen, $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$, que es punto fijo para todos los valores de los parámetros, correspondiendo al estado sin movimiento de la noria, y
- para $r > 1$, hay también una pareja simétrica de puntos fijos, $x^* = y^* = \pm \sqrt{b(r-1)}$, $z^* = r-1$, que Lorenz llamó C^+ y C^- , que representan anillos de convección girando a la derecha o a la izquierda, análogos a las rotaciones estacionarias de la noria.

Lorenz estudió la estabilidad lineal y global del origen (Strogatz 1994, pág. 314-317) concluyendo, entre otras cosas, que:

- para $r \rightarrow 1^+$, C^+ y C^- tienden hacia el origen transformándose en una bifurcación tipo horquilla.
- en $r = r_H > 1$, C^+ y C^- pierden estabilidad; $r = r_H \equiv \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$ se conoce como bifurcación de Hopf.²³

Con objeto de conocer el comportamiento de las trayectorias a tiempos largos, estudió el caso particular $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$, valores para los que esperaba algo raro (en particular, implican $r_H = 24.74$). Integrando a partir de la condición inicial $(0, 1, 0)$, encontró para $y(t)$:

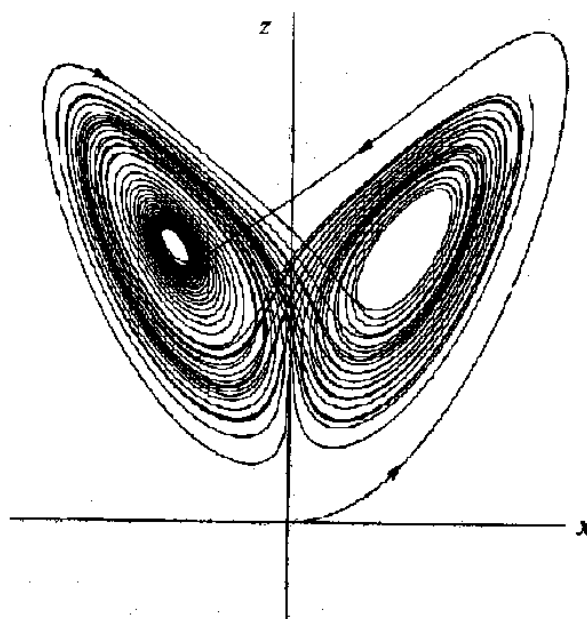


²²Ver “última nota” en esta sección, página 33.

²³Suponemos que $\sigma - b - 1$.

Esto es, pasado un transitorio inicial, el movimiento es **aperiódico**: la solución muestra una oscilación irregular que persiste para $t \rightarrow \infty$ sin repetirse nunca exactamente.

Representando $z(t)$ en función de $x(t)$, obtuvo el gráfico mostrado en página 7:

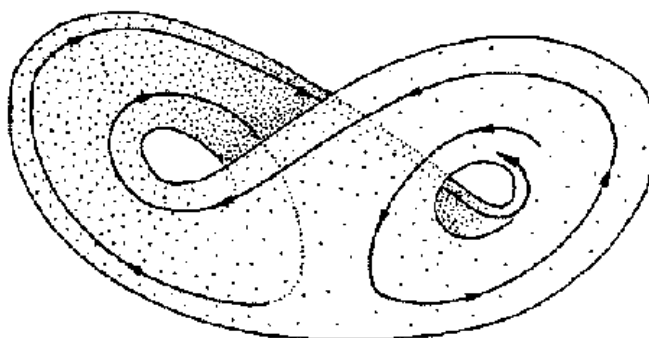


La trayectoria parece entonces cruzarse así misma repetidamente, pero se trata de un artificio debido a que estamos proyectando una trayectoria tridimensional en un plano.

Si seguimos la trayectoria en este plano, vemos que empieza en el origen, va a la derecha, luego a la izquierda, donde forma el centro de una espiral y, después de seguir el movimiento espiral durante unas cuantas vueltas, se mueve hacia la derecha, donde da unas cuantas vueltas, para volver a la izquierda y así sucesivamente.

El número de vueltas en cada lado es impredecible, como una secuencia aleatoria. (Estos saltos de izquierda a derecha son como los cambios irregulares de orientación en la noria de juguete.)

Haciendo el dibujo en tres dimensiones se observa (Abraham & Shaw 1983, p.88):

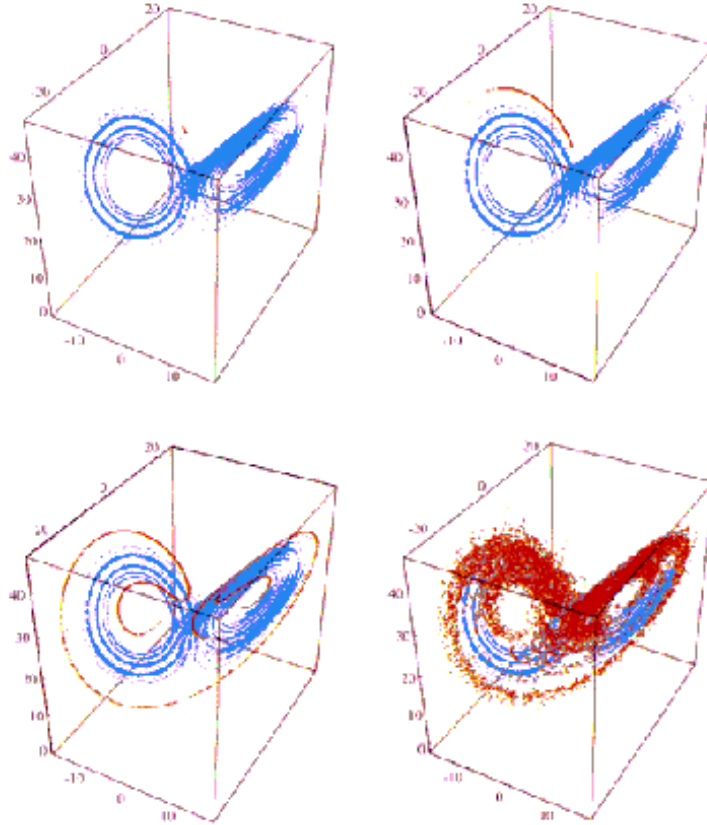


Este **atractor extraño**, como sería llamado por Ruelle y Takens (1971), es el conjunto atractor límite de volumen cero cuya existencia puede demostrarse (ver nota en página 33).

Proviene de una fuerte contracción de volumen lo que, unido a una resolución numérica que —inevitablemente— es insuficiente, lo hace difícil de interpretar.

No hay trayectorias que se corten, confundan o desdoblen —lo cual es imposible— sino, probablemente, *un complejo infinito de superficies distintas* que constituye un conjunto de puntos con volumen cero pero superficie infinita, lo que hoy llamamos fractal, que resulta tener dimensión 2.05, como veremos.

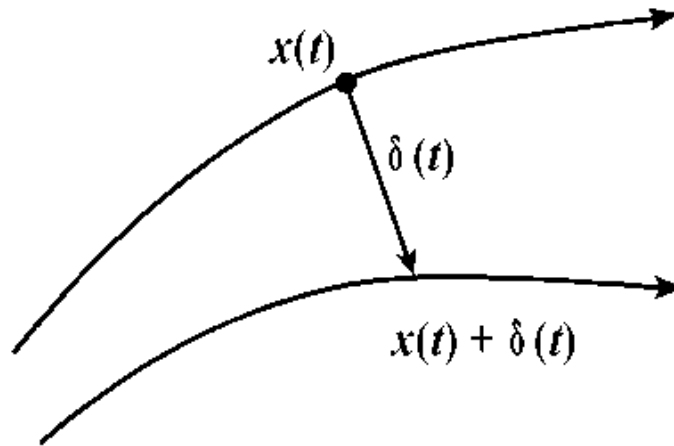
El movimiento en el atractor es **muy sensible a las condiciones iniciales**, como ilustra esta figura para $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$:



El atractor de Lorenz se muestra estático en azul. Los puntos rojos muestran la evolución para $t = 3, 6, 9$ y 15 de un pequeño conjunto de 10,000 condiciones iniciales próximas. Al moverse éstas de acuerdo con las ecuaciones de Lorenz, la manchita inicial se transforma (enseguida) en un filamento, que luego se enreda por el atractor y, finalmente, los puntos se distribuyen por todo el atractor, de modo que dos puntos inicialmente próximos pueden acabar “infinitamente” separados.

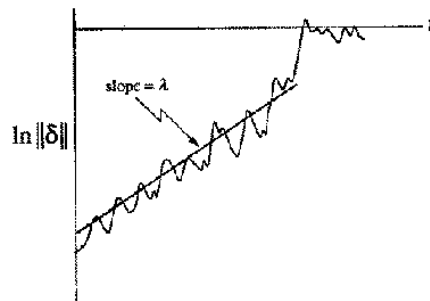
En definitiva, es imposible predecir a largo plazo, puesto que pequeñas imprecisiones tienden a ser amplificadas con extraordinaria rapidez.

Para hacer estas ideas más precisas, imaginemos una trayectoria **en** el atractor, una vez pasado el transitorio. Consideramos un punto en el atractor en el instante t , $x(t)$, y un punto muy próximo, $x(t) + \delta(t)$, por ejemplo, $\|\delta_0\| = 10^{-15}$ inicialmente: En el caso de Lorenz se observa que



$$\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\| e^{\lambda t} \quad (12)$$

con $\lambda \approx 0.9$, esto es, **separación exponencialmente rápida** de trayectorias próximas. El número λ , llamado **exponente de Liapunov**, se calcula:



Notamos:

1. no se obtiene un comportamiento recto, sino (12) en promedio, esto es, hay fluctuaciones alrededor de ese comportamiento a lo largo del atractor;
2. el comportamiento exponencial cesa cuando la separación es comparable al “diámetro” del atractor, pues las curvas ya no pueden separarse más, lo que se manifiesta por cierta *saturación* de la curva en la figura anterior para grandes t
3. llamar exponente de Liapunov a λ es poco riguroso, por dos razones:

- (a) un sistema n -dimensional tiene n **exponentes de Liapunov**, definidos como sigue:

Sea una esfera infinitesimal de condiciones iniciales perturbadas que, durante la evolución, se distorsiona en una elipse infinitesimal con $\delta_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ la longitud de su eje principal k . Se tiene que $\delta_k(t) \sim \delta_k(0) e^{\lambda_k t}$, donde λ_k son los n exponentes de Liapunov del sistema. Para t grande, el diámetro del elipsoide está controlado por el λ_k más positivo, de modo que λ resulta ser el mayor exponente de Liapunov.

- (b) λ depende (ligeramente) de la trayectoria en consideración, de modo que el verdadero λ se obtiene como promedio sobre muchos puntos a lo largo de la misma trayectoria.

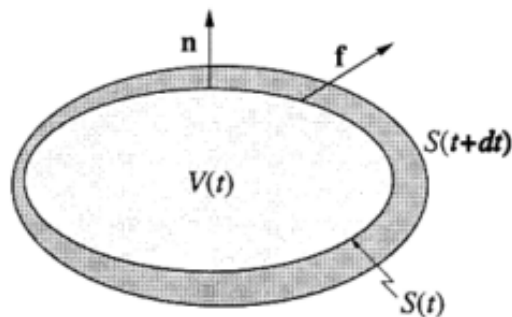
Última nota: _____

PROBLEMA 3.6: Los alumnos pueden estudiar, al menos en parte, el sistema de Lorenz por su cuenta, o bien pueden consultar alguna de las referencias que indico.

A continuación señalo dos partes de este estudio.

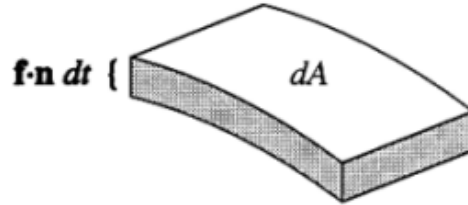
- (1) Veamos (para el que no lo recuerde del curso de mecánica) cómo evolucionan los volúmenes en Γ . Luego lo aplicamos al caso de Lorenz.

Sea cualquier sistema tridimensional $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Sea una superficie cerrada arbitraria $S(t)$ de volumen $V(t)$ en Γ : Los puntos en S pueden interpretarse



como condiciones iniciales para las trayectorias, y los dejamos evolucionar un instante infinitesimal dt , de modo que $S(t) \rightarrow S(t+dt)$. Nos preguntamos por el volumen transformado, $V(t+dt)$

Sea $\mathbf{n}$ la normal a S , $\mathbf{f} \equiv (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ la velocidad instantánea de los puntos y, por tanto, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ es la componente normal de la velocidad, luego el área dA barre un volumen $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dt) dA$, como muestra la figura:



Se sigue:

$$\begin{aligned} V(t + dt) &= V(t) + \left\{ \begin{array}{l} \text{volumen barrido por peque-} \\ \text{ños parches de } S, \text{ integrado} \end{array} \right\} \\ &= V(t) + \int_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dt) dA, \end{aligned}$$

luego:

$$\dot{V} = \frac{V(t + dt) - V(t)}{dt} = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \mathbf{f} dV,$$

donde la última igualdad es consecuencia del teorema de la divergencia.

En el caso de Lorenz, la divergencia es constante,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{f} &= \frac{\partial}{\partial x} [\sigma(y - x)] + \frac{\partial}{\partial y} [rx - y - xz] + \frac{\partial}{\partial z} [xy - bz] \\ &= -\sigma - 1 - b < 0, \end{aligned}$$

luego

$$\dot{V} = -(\sigma + 1 + b)V \implies V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t},$$

esto es, el volumen en Γ se contrae con rapidez exponencial.²⁴ En consecuencia:

- cualquier región que contenga un conjunto de condiciones iniciales tiende a reducirse a una de volumen cero, como un globo al desinflarse, luego todas las trayectorias que comiencen en esa región han de terminar en este conjunto límite, lo que impone serias restricciones a las soluciones de las ecuaciones de Lorenz.

²⁴La contracción del volumen en Γ bajo el flujo es una propiedad de los **sistemas disipativos**.

- Resulta que este conjunto límite consiste de puntos fijos (que, puede verse, han de ser atractores o silla; ver ejemplo 3.7), órbitas cerradas o ciclos límites o, para ciertos valores de los parámetros, un atractor extraño.

(2) Resulta que el sistema de Lorenz (4):

- es invariante bajo el cambio $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$, de modo que, si $[x(t), y(t), z(t)]$ es una solución, también lo es $[-x(t), -y(t), z(t)]$ o, dicho de otro modo, todas las soluciones son simétricas o tienen una pareja simétrica
- sólo tiene dos no-linealidades, xy y xz .

En consecuencia (con objeto de estudiar la estabilidad lineal del origen), las ecuaciones (4) pueden linealizarse alrededor del origen omitiendo las no-linealidades xy y xz , quedando:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y, \\ \dot{z} &= -bz.\end{aligned}\tag{13}$$

La ecuación para z queda desacoplada de las otras e implica que $z(t) \rightarrow 0$ exponencialmente. Las otras dos son equivalentes a

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

de traza $\tau = -\sigma - 1 < 0$ y determinante $\Delta = \sigma(1 - r) \dots$ pág. 314-317.

Fin última nota._____

Algunas definiciones y conclusiones básicas.

Es conveniente en este punto recopilar algunos de los resultados básicos. No existe una definición universalmente aceptada, pero casi todo científico activo en el campo admitiría los tres ingredientes en la siguiente *definición de trabajo*:

Definición: CAOS es **comportamiento aperiódico para tiempos grandes** en un sistema **determinista** que presente **dependencia muy sensible a las condiciones iniciales**. Esto es:

- Las trayectorias no van hacia puntos fijos ni órbitas periódicas o cuasi-periódicas para $t \rightarrow \infty$. (Ha de entenderse que éste es el comportamiento típico a, al menos, que no es muy raro, esto es, que, dada una condición inicial al azar, ese comportamiento aperiódico ocurre con probabilidad no-nula.)
- El sistema es determinista en el sentido de que no contiene parámetros u otros elementos aleatorios o ruidosos, esto es, su comportamiento irregular no es consecuencia de fuerzas de arrastre ruidosas sino de su falta de linealidad.
- Trayectorias próximas se separan con rapidez exponencial o, dicho de otro modo, el sistema tiene un exponente de Liapunov positivo.

Tampoco hay acuerdo universal, pero vamos a convenir que un **atractor** es un conjunto, por ejemplo, puntos fijos estables y ciclos límites estables, al que convergen todas las trayectorias próximas o, más precisamente:

Definición: ATRACTOR es un conjunto cerrado A :

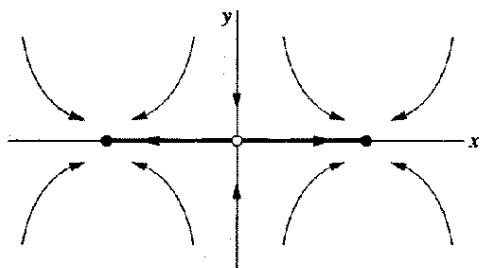
1. *invariante*: toda trayectoria $\mathbf{x}(t)$ que parte de A permanece en A para todo t ;
2. que *atrae un conjunto abierto de condiciones iniciales*: $\exists$ un conjunto abierto U que contiene A tal que si $\mathbf{x}(0) \in U$, la distancia entre $\mathbf{x}(t)$ y A tiende a cero para $t \rightarrow \infty$.
Esto quiere decir que A atrae a todas las trayectorias que empiezan suficientemente próximas a él. El máximo U se conoce como **cuenca de atracción** de A ;
3. *mínimo*: no hay un subconjunto propio de A que satisfaga las condiciones 1 y 2.

EJEMPLO 3.7: Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - x^3 \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Sea el intervalo $\mathbf{I} = [-1 \leq x \leq 1, \quad y = 0]$: Se pregunta: (a) ¿Es $\mathbf{I}$ un conjunto invariante? (b) ¿Atrae $\mathbf{I}$ a un conjunto abierto de condiciones iniciales? (c) ¿Es $\mathbf{I}$ un atractor?

Solución: El espacio fásico es:



que muestra un ‘punto de silla’ en el origen y puntos fijos estables en los extremos $(\pm 1, 0)$. Se sigue que $\mathbf{I}$, limitado por éstos, es un conjunto invariante (cualquier trayectoria que empieza en $\mathbf{I}$ ha de seguir allí; de hecho, todo el eje x es invariante puesto que $y(0) = 0$ implica $y(t) = 0 \forall t$), luego se cumple (a). También es cierta (b), puesto que $\mathbf{I}$ atrae a toda trayectoria en el plano xy . Pero no se satisface (c) puesto que $\mathbf{I}$ no es mínimo; los puntos fijos estables $(\pm 1, 0)$ son subconjuntos propios de $\mathbf{I}$ que también satisfacen las propiedades 1 y 2. Estos puntos son los únicos atractores para el sistema.

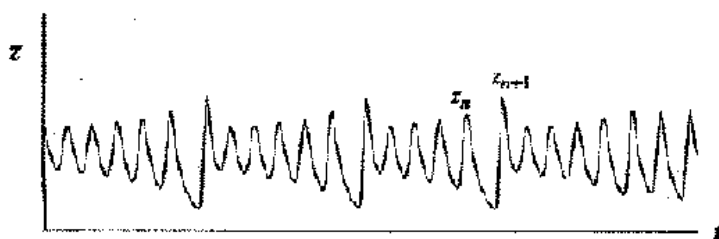
Conclusión (de este ejemplo): Un conjunto que atraiga todas las trayectorias puede no ser un atractor, sino contener uno o más atractores más pequeños. ¡Ha de ser mínimo! Podría ser éste el caso de la ‘mariposa’ de Lorenz. Casi todo el mundo piensa que ésta es un verdadero atractor, pero no ha sido probado todavía.

Definición: ATRACTOR EXTRAÑO es el que muestra dependencia muy sensible a las condiciones iniciales. El adjetivo extraño tiene su origen (histórico) en la observación de que tenían propiedades geométricas ‘raras’, lo que hoy llamamos propiedades fractales.

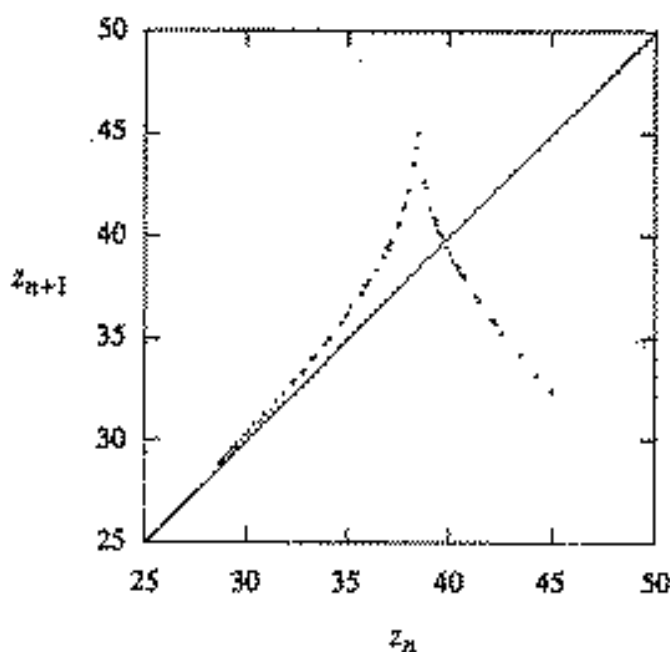
No puede concluirse todavía acerca de la **relación entre comportamientos caóticos y fractales**, pero parece que esta propiedad geométrica es menos relevante que la propiedad dinámica de sensibilidad a las condiciones iniciales. Se habla de **atractores caóticos** y de **atractores fractales** cuando se quiere resaltar uno u otro de estos aspectos.

Mapa de Lorenz

Como señalé, la contribución de Lorenz no sólo consistió en descubrir comportamiento caótico en sus ecuaciones, sino en llegar a reconocer orden en este caos. En particular, observando con detalle el movimiento de una trayectoria en las espirales de la mariposa, y sus saltos de una a la otra, llegó a sospechar que z_n , el máximo local n -simo de $z(t)$,



tendría que permitir predecir z_{n+1} . Tratando de confirmarlo, integró numéricamente sus ecuaciones para un largo tiempo, midió los máximos locales de $z(t)$, y dibujó los puntos (z_n, z_{n+1}) para distintos valores de n :



Vemos que, a pesar de corresponder a una serie temporal caótica (la de la figura anterior), estos datos determinan limpiamente una curva única.

A la función $z_{n+1} = f(z_n)$ que representa esta gráfica se le conoce como **mapa** (o ‘mapeo’) **de Lorenz**. Nos indica una importante propiedad dinámica del atractor: dado z_0 podemos predecir $z_1 = f(z_0)$ y luego $z_2 = f(z_1)$ y así sucesivamente.

Antes de sacar conclusiones de la existencia de este mapa iterado, conviene aclarar algunos puntos:

- En realidad, los puntos en la figura anterior determinan una curva relativamente gruesa, de modo que, estrictamente, $f(z)$ no es una función bien definida (no proporciona un z_{n+1} único para cada z_n dado); sin embargo, vamos a olvidar esta complicación (lo cual reduce a plausible —no riguroso— el análisis subsecuente).
- Aquí, de hecho, estamos simplificando el análisis de una ecuación diferencial reduciéndola a un mapa iterado, pero con el problema de que nos quedamos con un solo número —no dos— para caracterizar la trayectoria,²⁵ lo que sólo funcionará si el atractor es muy ‘delgado’; para nuestra suerte, el de Lorenz es casi bi-dimensional.
- ¿Cómo estar seguros de que el atractor de Lorenz no es un ciclo límite estable? Quizá las trayectorias no se repiten porque no hemos integrado lo suficientemente lejos; quizás hay comportamiento periódico pero con un periodo muy largo.

Nunca se ha podido demostrar que éste no sea el caso, pero existe un argumento de Lorenz en contra de ello.²⁶

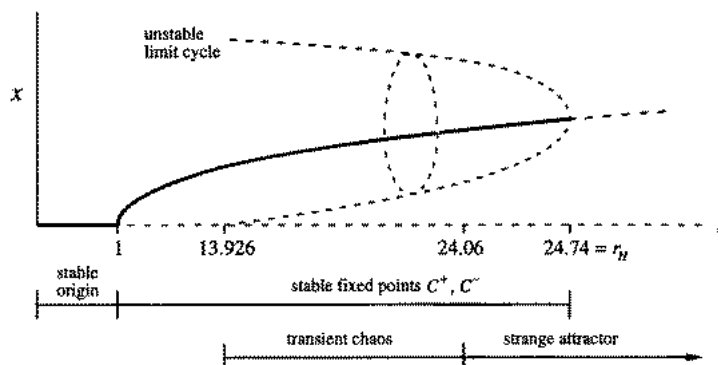
- **Espacio de parámetros:** Nos venimos refiriendo al caso $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$ estudiado con detalle por Lorenz. Pero ¿qué pasa para otros valores? Es *como un paseo por la jungla*: uno puede encontrarse con ciclos límites exóticos, caos intermitente, periodicidad con ruido, y con otros atractores extraños.

²⁵En otros caso, por ejemplo con el **mapa de Poincaré** (ver luego y Strogatz 1994, pág. 278) se hace una simplificación similar pero sin esta inconsistencia.

²⁶Está basado en la observación de que la pendiente en el dibujo de (z_{n+1}, z_n) satisface $|f'(z)| > 1$ por todas partes, de donde puede verse que se sigue que, si existen ciclos límites, han de ser necesariamente **inestables**; ver Strogatz 1994 pág. 328-329.

Ver C Sparrow, ‘The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors’, Springer-Verlag, NY 1982 (*Appl. Math. Sci.* **41**)

Por ejemplo, fijando $\sigma = 10$ y $b = \frac{8}{3}$, uno encuentra para quequeños valores de r :



que, en parte, nos es familiar: El origen es globalmente estable para $r < 1$. En $r = 1$, se pierde esta estabilidad por bifurcación de horquilla supercrítica, y aparece una pareja simétrica de puntos fijos atractores (de los que sólo se muestra uno en el esquema). En $r_H = 24.74$, estos puntos fijos pierden estabilidad por absorción de un ciclo límite inestable en una bifurcación de Hopf subcrítica. Otros aspectos pueden verse en Strogatz 1994, pág. 330-333.

PROBLEMA 3.8: Usad el ordenador para investigar el sistema de Lorenz —esto es, dibujar $x(t)$, $y(t)$ y $x(z)$ — con $\sigma = 10$ y $b = 8/3$ cuando:

1. $r = 28$
2. $r = 21$ (caos transitorio, también llamado metastable o pre-turbulencia, que no es verdadero caos pues no resulta aperiódico para tiempos largos, aunque sí que es sensible a la condición inicial)
3. $r = 166.3$ (caos intermitente)
4. $r = 212$ (periodicidad con ruido)
5. $145 < r < 166$ (dobladura del período)
6. $r = 350$ (ciclo límite globalmente atractor, correspondiendo a la noria girando a izquierda y derecha como un péndulo)

7. $r = 24.4 + \sin \omega t$, con ω pequeña comparada con la frecuencia orbital típica en el atractor, como si fuéramos cambiando la *palanca* r lentamente arriba y abajo.
(Sorprendente efecto de histéresis entre el equilibrio y un estado caótico.)

Utilidad del caos

Muchos sistemas naturales tienen comportamiento caótico, desde la atmósfera hasta el mercado de valores. La cuestión es qué tipo de caos presentan. Los casos (sencillos) que hemos estudiado pueden servirnos como pauta para poder clasificar ese caos fenomenológico.

Por ejemplo, pensemos en juegos de azar como el lanzamiento de un dado. Son ejemplos de caos transitorio (como para $r = 21$ en los experimentos propuestos). Por loco que parezca un dado, siempre se para en una de sus seis caras estables. La razón por la que no podemos predecir el resultado es que éste depende muy sensiblemente de la condición inicial, difícil de conocer.

No es necesario, pues, como hemos visto, tener atractores extraños para generar efectivamente comportamiento aleatorio.

Por otra parte, hay sistemas en la naturaleza que parecen usar el caos para realizar de modo eficaz sus funciones. Éste podría ser el caso del cerebro y otros sistemas biológicos cuyas extraordinarias dotes para recordar y regenerar imágenes, por ejemplo, serían quizás consecuencia de que un proceso de *resonancia estocástica* permitiría una especie de filtrado selectivo de la información disponible.

Es notable el uso práctico que puede hacerse de los actuales conocimientos sobre caos. Por ejemplo, para enmascarar mensajes secretos. La estrategia consiste en transmitir el mensaje (quizás cifrado con alguna clave) enmascarado mediante un pesado ruido caótico. Parecerá simple ruido salvo para el receptor que conozca el sistema de ecuaciones “enmascaradas” —y los valores usados para sus parámetros— y sepa cómo sincronizarlo con el emisor.²⁷ Esto puede hacerse, por ejemplo, con un sencillo circuito electrónico que funciona como una realización de las ecuaciones de Lorenz (o similares).

²⁷Strogatz 1994, pág. 335-339, explica una realización experimental y el principio que permite sincronizar los circuitos emisor y receptor.

También es útil saber acerca de caos para

- aprender a controlarlo:

Hemos visto que hay muchas órbitas periódicas inestables en un atractor extraño y una de éstas, si se desea, puede hacerse estable y alcanzable aplicando una pequeña perturbación al sistema caótico sin necesidad de conocer la dinámica de antemano. Esta técnica se está aplicando con éxito para controlar sistemas mecánicos, químicos y electrónicos, láseres, y tejidos biológicos. Ver E. Ott & M. Spano, ‘Controlling Chaos’, *Physics Today* **48**(5), 34–40 (1995), en Lam p.125.

- distinguirlo de ruido, por ejemplo, el debido a errores de medida en una señal:

Ver G. Sigihara & R.M. May, ‘Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series’, *Nature* **344**, 734-741 (1990), en Lam p. 118.

NOTA: Hay una serie de **problemas** propuestos sobre caos (en particular, sobre aspectos discutidos aquí, pero también sobre otros no discutidos) en Strogatz 1994, páginas 341-347. Las soluciones vienen en página 462.