

# Proyecto MaTeX

## Ecuaciones y Sistemas

Fco Javier González Ortiz

### Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)



MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS



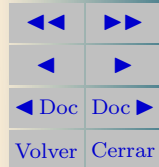
# Tabla de Contenido

1. Ecuaciones
    - 1.1. Cuadráticas
    - 1.2. De grado mayor que 2
      - Bicuadradas • Por Ruffini • Por factorización
    - 1.3. Con radicales
  2. Sistemas
    - 2.1. Sistemas lineales
      - Por reducción • Por sustitución
    - 2.2. Sistemas no lineales
  3. Inecuaciones en la recta real
    - 3.1. Desigualdades
      - Propiedades de las desigualdades
    - 3.2. Inecuaciones lineales
    - 3.3. Inecuaciones no lineales
    - 3.4. Sistemas de inecuaciones
  4. Inecuaciones en el plano
    - 4.1. Sistemas de inecuaciones
- Soluciones a los Ejercicios



MaT<sub>E</sub>X

ECUACIONES  
Y SISTEMAS



## 1. Ecuaciones

### 1.1. Cuadráticas

Recordamos que las ecuaciones de segundo grado o **cuadráticas** son de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0 \quad (1)$$

y sus soluciones se obtienen con la expresión,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

Al radicando  $\Delta = b^2 - 4ac$  se le llama discriminante y según su valor sea o no positivo, la ecuación tendrá una, dos o ninguna solución;

$$\begin{aligned} \Delta > 0 & \quad 2 \text{ soluciones} \\ \Delta = 0 & \quad 2 \text{ soluciones} \\ \Delta < 0 & \quad 2 \text{ sin solución} \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.1.** Resolver la ecuación  $x^2 - 3x - 4 = 0$

*Solución:*

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

□



MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS



**Ejemplo 1.2.** Resolver

$$x^2 + x + 1 = 0$$

*Solución:*

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-2}}{2} \Rightarrow \text{no tiene solución}$$

Cuando en la **ecuación 1** falta algún término se llama **incompleta** y se puede sacar factor común o despejar :

**Ejemplo 1.3.** Resolver la ecuación  $x^2 + x = 0$

*Solución:* Se saca factor común,

$$x(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

**Ejemplo 1.4.** Resolver la ecuación  $x^2 - 4 = 0$

*Solución:* Se despeja

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$



MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





## 1.2. De grado mayor que 2

### • Bicuadradas

Las ecuaciones de cuarto grado sin potencias impares se llaman **bicuadradas** y son de la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad a \neq 0 \quad (3)$$

y sus soluciones se obtienen con la fórmula **ecuación 2**

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4)$$

**Ejemplo 1.5.** Resolver la ecuación

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

*Solución:*

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \quad \boxed{x = \pm 2}$$

□

**EJERCICIO 1.** Resolver las ecuaciones bicuadradas:

$$a) \ x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \quad b) \ x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \quad c) \ x^4 + 4x^2 + 3 = 0$$

MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





## • Por Ruffini

El problema de encontrar métodos directos para resolver las ecuaciones de grado mayor que 2 tiene detrás una gran historia y esfuerzo, (problema que ocupó a generaciones de matemáticos) y acumula unos 400 años de grandes esfuerzos.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a \neq 0 \quad (5)$$

Aquí mostramos un método que es sencillo pero solo funciona en algunas ocasiones. Le conocemos como el método de **RUFFINI**<sup>1</sup>.

El caso más sencillo es cuando  $P(x)$  tenga alguna raíz entera. En este caso la raíz tiene que ser un divisor del término independiente. Esto se debe al siguiente teorema.

### Teorema 1.1. Raíces enteras de un polinomio .

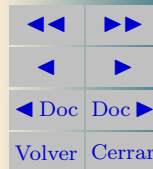
Si  $x = a$  es una raíz entera de

$$P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

entonces  $a$  divide al término independiente  $a_0$

# MaTEX

## ECUACIONES Y SISTEMAS



<sup>1</sup>Paolo RUFFINI (1765 - 1822) Matemático y médico italiano.

**Ejemplo 1.6.** Resolver la ecuación  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ .

*Solución:* Si hay una solución entera estará entre los divisores de 30.

Aplicamos Ruffini con $x = 1$ ▷		1	-2	-5	6
Cociente $x^2 - x - 6$ ▷	1	1	-1	-6	
Aplicamos Ruffini con $x = -2$ ▷	-2	-2	6		
Cociente $x - 3$ ▷	1	-3	0		
Aplicamos Ruffini con $x = 3$ ▷	3	3			
	1	0			

Luego la factorización de  $P(x)$  tiene tres factores lineales:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3).$$

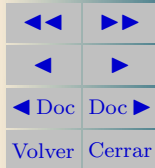
y las raíces son  $x_1 = 1$   $x_2 = -2$   $x_3 = 3$ .

□



MaTEX

EQUACIONES  
Y SISTEMAS



**Ejemplo 1.7.** Resolver la ecuación  $x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30 = 0$ .

*Solución:* Si hay una solución entera estará entre los divisores de 30.

		1	1	-19	11	30
Aplicamos Ruffini con $x = -1 \triangleright$	-1		-1	0	19	-30
Cociente $x^3 - 19x + 30 \triangleright$		1	0	-19	30	0
Aplicamos Ruffini con $x = 2 \triangleright$	2		2	4	-30	
Cociente $x^2 + 2x - 15 \triangleright$		1	2	-15		0
Aplicamos Ruffini con $x = 3 \triangleright$	3		3	15		
Cociente $x + 5 \triangleright$		1	5			0
Aplicamos Ruffini con $x = -5 \triangleright$	-5		-5			
		1				0

Luego la factorización de  $P(x)$  tiene cuatro factores lineales:

$$P(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x + 5)$$

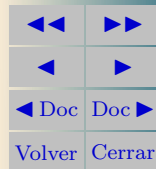
y las raíces son  $x_1 = -1, \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = -5$ .

□



# MaT<sub>E</sub>X

## ECUACIONES Y SISTEMAS





**Ejemplo 1.8.** Resolver la ecuación

$$x^3 - 8x^2 + 18x - 11 = 0$$

*Solución:* Si hay una solución entera estará entre los divisores de 11 que son  $\pm 1$  y  $\pm 11$ . Probamos con  $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -8 & 18 & -11 \\ & & & & \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{-7} & \mathbf{11} & \mathbf{0} \end{array}$$

En el recuadro final está el resto. Cuando éste vale 0 hemos encontrado una raíz o solución. En este caso  $x_1 = 1$ .

Los números en negrita son los coeficientes del polinomio de 2º grado  $x^2 - 7x + 11 = 0$ . Cuyas soluciones ya sabemos hallar.

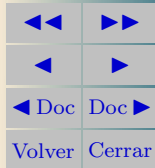
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(11)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

□



MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS



**Ejemplo 1.9.** Resolver la ecuación  $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

*Solución:* Probamos con  $x = 2$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ 2 & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-9} & \boxed{0} \end{array}$$

Hemos encontrado una raíz o solución. En este caso  $x_1 = 2$ . Los números en negrita son los coeficientes del polinomio de 2º grado  $x^2 - 9 = 0$ . Cuyas soluciones son.

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

□

**Ejemplo 1.10.** Resolver la ecuación

$$2x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0$$

*Solución:* Probamos con  $x = 3$

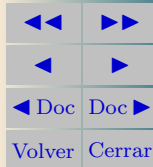
$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -6 & 1 & -3 \\ 3 & & 6 & 0 & 3 \\ \hline & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boxed{0} \end{array}$$

Hemos encontrado una raíz o solución. En este caso  $x_1 = 3$ . Los números en negrita son los coeficientes del polinomio de 2º grado  $2x^2 + 1 = 0$ , que no tiene solución. □



MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





## ● Por factorización

Algunas ecuaciones de grado mayor que 2 que no tienen término independiente se pueden **factorizar** o escribir como un producto de factores. Usaremos como técnica de resolución:

- se extrae factor común.
- y se iguala cada factor a 0.

**Ejemplo 1.11.** Resolver la ecuación

$$x^2 + 3x = 0$$

*Solución:* Se extrae factor común

$$x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \boxed{x = 0} \\ x + 3 = 0 & \boxed{x = -3} \end{cases}$$

□

**Ejemplo 1.12.** Resolver la ecuación  $x^4 + 4x^2 = 0$

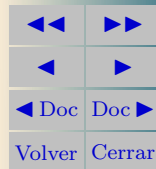
*Solución:* Se extrae factor común

$$x^4 + 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 & \boxed{x = 0} \\ x^2 + 4 = 0 & \text{no tiene solución} \end{cases}$$

□

# MaTEX

## ECUACIONES Y SISTEMAS





**Ejemplo 1.13.** Resolver la ecuación  $4x^3 - x = 0$

*Solución:* Se extrae factor común

$$4x^3 - x = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \boxed{x = 0} \\ 4x^2 - 1 = 0 & x^2 = \frac{1}{4} \\ & \boxed{x = \pm \frac{1}{2}} \end{cases}$$

□

**Ejemplo 1.14.** Resolver la ecuación  $2x^5 - 4x^2 = 0$

*Solución:* Se extrae factor común

$$2x^5 - 4x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(x^3 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 & \boxed{x = 0} \\ x^3 - 2 = 0 & \boxed{x = \sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

□

**Ejemplo 1.15.** Resolver la ecuación  $x^3 + x^2 - 6x = 0$

*Solución:* Se extrae factor común

$$x^3 + x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \boxed{x = 0} \\ x^2 + x - 6 = 0 & \boxed{x = -3} \quad \boxed{x = 2} \end{cases}$$

□

MaTEXECUACIONES  
Y SISTEMAS



**EJERCICIO 2.** Resolver las ecuaciones.

a)  $x^2 - 25 = 0$ .

b)  $3x^4 + 9x^2 = 0$ .

c)  $x^3 + x^2 + x = 0$ .

d)  $3x^3 - 20x^2 + 27x - 10 = 0$ .

e)  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ .

f)  $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$ .

g)  $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$ .

h)  $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ .

**EJERCICIO 3.** Resolver las ecuaciones.

a)  $x^3 - 3x - 2 = 0$ .

b)  $3x^3 + 5x^2 - 2x = 0$ .

c)  $x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48 = 0$ .

d)  $x^4 - 5x^3 + 5x^2 - x - 12 = 0$ .

e)  $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ .

f)  $2x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 7x - 6 = 0$ .

g)  $x^3 - 13x^2 + 55x - 75 = 0$ .

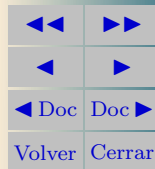
h)  $x^3 + 2x + 3 = 0$ .

i)  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ .

j)  $3x^4 - 2x^3 + 2x - 3 = 0$ .

MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





### 1.3. Con radicales

Son las ecuaciones en que aparecen **radicales**, como por ejemplo

$$\sqrt[3]{x+1} = x \quad \sqrt{2x-3} = x-1 \quad \sqrt{x^2-5x+4} + 1 = x-3$$

Usaremos como técnica de resolución:

- dejar en un miembro de la ecuación un radical y
- elevar ambos miembros al índice de la raíz.
- resolvemos la ecuación resultante y comprobamos las soluciones.

**Ejemplo 1.16.** Resolver la ecuación

$$\sqrt{x+1} - 4 = 0$$

*Solución:* Se despeja un radical

$$\sqrt{x+1} = 4$$

elevamos ambos miembros al cuadrado

$$(\sqrt{x+1})^2 = 4^2 \Rightarrow x+1 = 16 \Rightarrow \boxed{x = 15}$$

y se comprueba en la ecuación inicial

$$\sqrt{(15)+1} - 4 = \sqrt{16} - 4 = 4 - 4 = 0$$

□

# MaTEX

## ECUACIONES Y SISTEMAS



**Ejemplo 1.17.** Resolver la ecuación

$$\sqrt{2x - 3} = x - 1$$

*Solución:* Elevamos ambos miembros al cuadrado

$$\begin{aligned} (\sqrt{2x - 3})^2 &= (x - 1)^2 \\ 2x - 3 &= x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ x &= \boxed{2} \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 1.18.** Resolver la ecuación

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} + 1 = x - 3$$

*Solución:* Despejamos el radical y elevamos ambos miembros al cuadrado

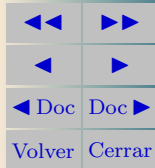
$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 - 5x + 4})^2 &= (x - 4)^2 \\ x^2 - 5x + 4 &= x^2 - 8x + 16 \\ 3x &= 12 \\ x &= \boxed{4} \end{aligned}$$

□



MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





**Ejemplo 1.19.** Resolver la ecuación

$$x + \sqrt{7 - 3x} = 1$$

*Solución:* Despejamos el radical y elevamos ambos miembros al cuadrado

$$\begin{aligned}(\sqrt{7 - 3x})^2 &= (1 - x)^2 \\7 - 3x &= 1 - 2x + x^2 \\x^2 + x - 6 &= 0 \\x &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \\x &= \boxed{-3}; \quad 2\end{aligned}$$

La que no lleva recuadro no verifica la ecuación inicial, pues

$$(2) + \sqrt{7 - 3(2)} \neq 1$$

□

**EJERCICIO 4.** Resolver la ecuación

$$\sqrt{2 - 5x} + \sqrt{3}x = 0$$

**EJERCICIO 5.** Resolver la ecuación

$$\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3 - x} = 0$$

MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





## 2. Sistemas

### 2.1. Sistemas lineales

Recordamos que los **sistemas lineales** están formados por dos o más ecuaciones lineales, es decir son de la forma

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array} \right\} \quad (6)$$

Los sistemas de tres o más ecuaciones los estudiaremos el próximo curso. Recordamos que fundamentalmente hay dos métodos de resolución:

- Por **REDUCCIÓN**

Consiste en multiplicar las ecuaciones por números para conseguir que las dos ecuaciones tengan alguna incógnita con el mismo coeficiente. De esta manera al restarlas se elimina una incógnita.

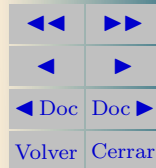
- Por **SUSTITUCIÓN**

Consiste en despejar de una de las ecuaciones una incógnita. Al sustituirla en la otra ecuación, la ecuación resultante presenta una sola incógnita.



MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS







**Ejemplo 2.3.** Resolver por reducción el sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} &= 4 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} &= 3 \end{aligned} \right\}$$

*Solución:* Quitamos denominadores

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y &= 24 \\ 4x - 3y &= 36 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (\times 2) \\ \dots \end{array} \left| \begin{array}{l} 4x - 6y = 48 \\ 4x - 3y = 36 \end{array} \right\} \text{restamos}$$


---


$$\left. \begin{array}{l} -3y = 12 \\ \boxed{y = -4} \end{array} \right\}$$

Sustituyendo  $y$  en otra ecuación obtenemos  $\boxed{x = 6}$

□

**EJERCICIO 6.** Resolver por reducción los sistemas:

$$a) \left. \begin{aligned} \frac{x+1}{3} + y &= 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$b) \left. \begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} &= 4 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{2} &= -2 \end{aligned} \right\}$$

$$c) \left. \begin{aligned} 4x + y &= 2 \\ 3x - \frac{y}{2} &= 3 \end{aligned} \right\}$$

$$d) \left. \begin{aligned} -\frac{x}{3} + y &= -1 \\ x - 2y &= 4 \end{aligned} \right\}$$

# MaTeX

## ECUACIONES Y SISTEMAS





## • Por sustitución

**Ejemplo 2.4.** Resolver por sustitución el sistema 
$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{array} \right\}$$

*Solución:*

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \text{despejamos } x \quad x = \frac{5 + 3y}{2} (*)$$

Sustituyendo  $x$  en la 2ª ecuación,  $3 \left( \frac{5 + 3y}{2} \right) - 2y = 5$  y resolvemos

$$(15 + 9y) - 4y = 10 \implies \boxed{y = -1} \text{ sustituyendo en } (*) \text{ obtenemos } \boxed{x = 1}$$

**Ejemplo 2.5.** Resolver por sustitución el sistema 
$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+1}{3} + y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{array} \right\}$$

*Solución:* Quitamos denominadores y ordenamos

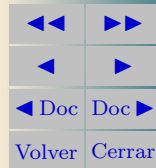
$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array} \right\} \rightarrow \text{despejamos } x \quad x = 2 - 3y (*)$$

Sustituimos en la 2ª ecuación y resolvemos  $(2 - 3y) + 8y = 7 \implies \boxed{y = 1}$

sustituyendo en  $(*)$  obtenemos  $\boxed{x = -1}$

# MaTEX

## ECUACIONES Y SISTEMAS





## 2.2. Sistemas no lineales

Cuando aparecen operaciones entre las incógnitas que no son sumas o restas la relación entre las incógnitas no es lineal y los sistemas son de tipo **sistemas no lineales**. El método general de resolver estos sistemas es por sustitución

**Ejemplo 2.6.** Resolver el sistema no lineal

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array} \right\}$$

*Solución:* Despejamos en una ecuación

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \text{despejamos } x \quad x = y - 3 (*)$$

Sustituimos  $x$  en la 2ª ecuación y resolvemos

$$(y - 3)^2 + y^2 = 5$$

Resolvemos esta ecuación en  $y$

$$y^2 - 6y + 9 + y^2 = 5 \implies y^2 - 3y + 2 = 0 \implies \left\{ \begin{array}{ll} \boxed{y_1 = 1} & \boxed{x_1 = -2} \\ \boxed{y_2 = 2} & \boxed{x_2 = -1} \end{array} \right.$$

□

# MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





**Ejemplo 2.7.** Resolver el sistema no lineal

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{array} \right\}$$

*Solución:* Despejamos en una ecuación

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{despejamos } x \quad x = 1 - y (*)$$

Sustituimos  $x$  en la 2ª ecuación y resolvemos

$$(1 - y)y + 2y = 2$$

Resolvemos esta ecuación en  $y$

$$y - y^2 + 2y = 2 \implies y^2 - 3y + 2 = 0 \implies \begin{array}{|c|} \hline y_1 = 1 \\ \hline y_2 = 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline x_1 = 0 \\ \hline x_2 = -1 \\ \hline \end{array}$$

□

**Ejemplo 2.8.** Resolver el sistema no lineal

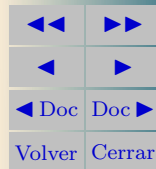
$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 3x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{array} \right\}$$

*Solución:* Despejamos en una ecuación

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 3x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \text{despejamos } y \quad y = x^2 - 3x (*)$$

# MaTEX

## ECUACIONES Y SISTEMAS



Sustituimos  $y$  en la 2ª ecuación y resolvemos  $x + (x^2 - 3x) = 3$  Resolvemos esta ecuación en  $x$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies \begin{array}{|c|} \hline x_1 = 3 \\ \hline x_2 = -1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline y_1 = 0 \\ \hline y_2 = 4 \\ \hline \end{array}$$

□

**Ejemplo 2.9.** Resolver el sistema  $\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{array} \right\}$

*Solución:* Despejamos en una ecuación

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \text{despejamos } y \quad y = \frac{6}{x} (*)$$

Sustituimos  $y$  en la 1ª ecuación y resolvemos  $x^2 - \left(\frac{36}{x}\right)^2 = 5$  Quitamos denominadores multiplicando por  $x^2$

$$x^4 - 36 = 5x^2 \implies x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

Resolvemos la ecuación bicuadrada

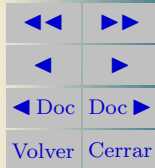
$$\begin{array}{l} x^2 = -9 \\ x^2 = 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{sin solución} \\ x = \pm 2 \end{array} \implies \begin{array}{|c|} \hline x_1 = 2 \\ \hline x_2 = -2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline y_1 = 3 \\ \hline y_2 = -3 \\ \hline \end{array}$$

□



MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





**Ejemplo 2.10.** Resolver el sistema no lineal

$$\left. \begin{array}{l} xy = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{array} \right\}$$

*Solución:* Despejamos  $x$  en la segunda ecuación

$$\left. \begin{array}{l} xy = 15 \\ 3x = 5y \end{array} \right\} \rightarrow \text{despejamos } x \quad x = \frac{5y}{3} (*)$$

Sustituimos  $x$  en la 1ª ecuación y resolvemos

$$\left(\frac{5y}{3}\right) y = 15$$

Quitamos denominadores multiplicando por 3

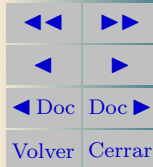
$$5y^2 = 45 \implies y^2 = 9 \implies \begin{array}{|c|} \hline y_1 = 3 \\ \hline y_2 = -3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline x_1 = 5 \\ \hline x_2 = -5 \\ \hline \end{array}$$

□

**EJERCICIO 7.** Resolver los sistemas no lineales:

$$a) \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 7 \\ 2x + y = 5 \end{array} \right\} \quad b) \left. \begin{array}{l} xy = 16 \\ (x+5)(y-1) = 22 \end{array} \right\} \quad c) \left. \begin{array}{l} x^2 + xy = 3 \\ 4x + 3y = 10 \end{array} \right\}$$

MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





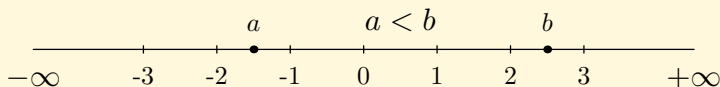
### 3. Inecuaciones en la recta real

#### 3.1. Desigualdades

Los números reales están ordenados. Así decimos que 2 “es menor que” 3, y lo escribimos como una desigualdad

$$2 < 3$$

Si tomamos como modelo la recta real gráficamente decimos que  $a < b$  cuando  $a$  está a la izquierda de  $b$  en la recta real.



A veces utilizamos el signo  $\leq$ , que se lee “es menor o igual que”. Por ello las expresiones siguientes son ciertas:

$$-3 \leq -1 \quad 2 \leq 2$$

Cuando la desigualdad no es cierta escribimos:

$$3 \not< 1 \quad 2 \not\leq 0$$

- **Propiedades de las desigualdades**

Manipulamos las desigualdades como las igualdades salvo en un detalle importante. Observa

MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





- **Sumamos** a ambos miembros de la desigualdad un número

$$2 + 5 < 3 + 5 \iff 7 < 8$$

y **no varía** la desigualdad

- Restamos a ambos miembros de la desigualdad un número

$$2 - 5 < 3 - 5 \iff -3 < -2$$

y **no varía** la desigualdad

- **Multiplicamos por un número positivo** a ambos miembros de la desigualdad

$$2 \cdot 5 < 3 \cdot 5 \iff 10 < 15$$

y **no varía** la desigualdad

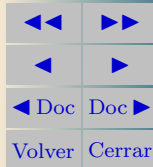
- **Multiplicamos por un número negativo** a ambos miembros de la desigualdad

$$2 \cdot (-5) > 3 \cdot (-5) \iff -10 > -15$$

y **varía** la desigualdad

# MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS



Una **inecuación** es una desigualdad en la que aparece una expresión algebraica de una incógnita. Ejemplos de inecuaciones son los siguientes

$$2x < 5 \quad x^2 - x > 1 \quad \frac{x - 2}{x + 3} > 3$$

Un ejemplo sencillo es la inecuación

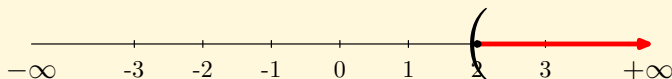
$$x > 2$$

cuya solución son todos los números “mayores que 2”. Para expresar esta solución utilizamos:

- la notación de intervalo expresando todos los números mayores que 2 de la forma

$$(2, \infty)$$

- o en forma gráfica, marcando la región determinada por los puntos de la recta que verifican la inecuación que van de 2 hasta  $\infty$



El extremo le indicamos con un paréntesis para señalar que el número 2 no cumple la inecuación



MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





### 3.2. Inecuaciones lineales

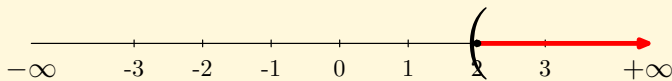
Para resolver las inecuaciones lineales simplemente se despeja.

**Ejemplo 3.1.** Resolver la inecuación

$$x + 2 > 4$$

*Solución:* Se despeja la incógnita  $x$ :

$$x + 2 > 4 \implies x > 2 \quad (2, \infty)$$

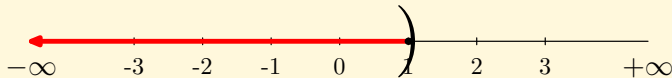


□

**Ejemplo 3.2.** Resolver la inecuación  $-2(x - 2) > x + 1$

*Solución:* Se opera y se despeja la incógnita  $x$ :

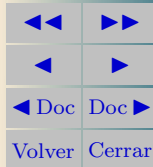
$$-2x + 4 > x + 1 \implies -3x > -3 \implies \boxed{x < 1} \quad (-\infty, 1)$$



□

MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





### 3.3. Inecuaciones no lineales

En las inecuaciones no lineales no se puede despejar. Una técnica general es descomponer en factores.

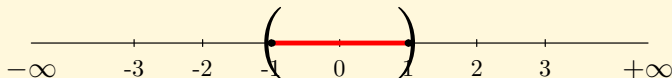
**Ejemplo 3.3.** Resolver la inecuación

$$x^2 < 1$$

*Solución:* Se pasa todo a un miembro y se descompone en factores

$$x^2 - 1 < 0 \implies (x - 1) \cdot (x + 1) < 0$$

Se anotan las raíces de los factores en la recta real. En este caso  $x = -1$  y  $x = 1$ , de esta forma aparecen tres regiones en la recta. Se mira si los puntos de esas regiones cumplen la inecuación:



- De  $-\infty$  a  $-1$ , por ejemplo con  $-2$ ,  $- \cdot - = + \not< 0$ , no se cumple
- De  $-1$  a  $1$ , por ejemplo con  $0$ ,  $- \cdot (+) = - < 0$ , se cumple
- De  $1$  a  $\infty$ , por ejemplo con  $3$ ,  $+ \cdot (+) = + \not< 0$ , no se cumple

□

# MaTeX

## ECUACIONES Y SISTEMAS





**Ejemplo 3.4.** Resolver la inecuación

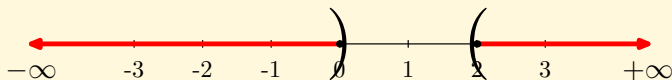
$$x^2 - 2x > 0$$

*Solución:* Se descompone en factores

$$x^2 - 2x > 0 \implies x(x - 2) > 0$$

Se anotan las raíces de los factores en la recta real. En este caso  $x = 0$  y  $x = 2$ , de esta forma aparecen tres regiones en la recta. Se mira si los puntos de esas regiones cumplen la inecuación:

- De  $-\infty$  a 0, por ejemplo con  $-1$ ,  $- \cdot - = + > 0$ , se cumple
- De 0 a 2, por ejemplo con 1,  $+ \cdot (-) = - \not> 0$ , no se cumple
- De 2 a  $\infty$ , por ejemplo con 4,  $+ \cdot (+) = + > 0$ , se cumple



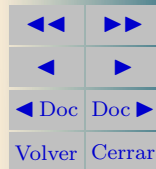
La solución en forma de intervalo se escribe como:

$$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

□

MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS



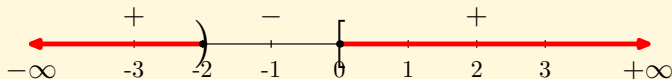
**Ejemplo 3.5.** Resolver la inecuación

$$\frac{x}{x+2} \geq 0$$

*Solución:* Se buscan las raíces del numerador y denominador que son  $x = -2$  y  $x = 0$ . Se toma un valor de cada zona y se sustituye en la inecuación, observando el signo que se obtiene

- De  $-\infty$  a  $-2$ , por ejemplo con  $-3$ ,  $\frac{-}{-} = + \geq 0$ , se cumple
- De  $-2$  a  $0$ , por ejemplo con  $-1$ ,  $\frac{-}{+} = - \not\geq 0$ , no se cumple
- De  $0$  a  $\infty$ , por ejemplo con  $2$ ,  $\frac{+}{+} = + \geq 0$ , se cumple

El valor  $x = 0$  se incluye pues se cumple  $\frac{0}{2} = 0 \geq 0$ , y el valor  $x = -2$  se excluye por no estar definido el cociente.



□

**EJERCICIO 8.** Resolver la inecuación  $x(x+5) > 2x^2$



MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





### 3.4. Sistemas de inecuaciones

Un **sistema de inecuaciones** son dos o más inecuaciones con la misma incógnita.

Para hallar la solución se resuelve cada una por separado y se toma como solución los números que cumplen ambas a la vez.

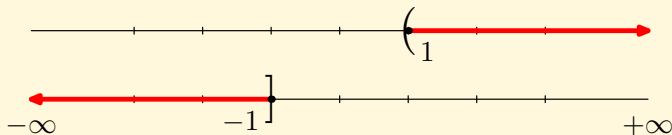
**Ejemplo 3.6.** Resolver el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 3 > -x \\ 2x \leq -2 \end{cases}$$

*Solución:* Se despeja en cada inecuación

$$\begin{cases} 2x - 3 > -x \\ 2x \leq -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x > 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

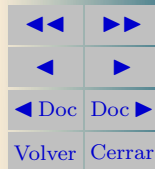
Se representa cada solución y se toma la región que tienen en común, que en este caso es vacía  $S = \emptyset$



□

# MaTEX

## ECUACIONES Y SISTEMAS







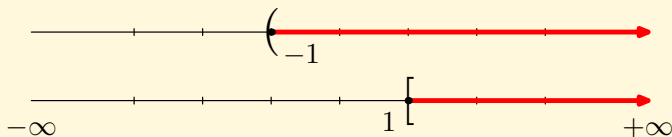
**Ejemplo 3.7.** Resolver el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} 2 > -2x \\ 2x - 1 \geq 1 \end{cases}$$

*Solución:* Se despeja en cada inecuación

$$\begin{cases} 2 > -2x \\ 2x - 1 \geq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} -2 < 2x \\ 2x \geq 2 \end{cases} \implies \begin{cases} -1 < x \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Se representa cada solución y se toma la región que tienen en común, que en este caso es  $S = [1; \infty)$



□

**EJERCICIO 9.** Resolver los sistemas de inecuaciones:

$$a) \begin{cases} x + 5 > 4x - 4 \\ 2x - 7 < 3x - 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - 7 < x + 1 \\ 2x - 2 > x + 1 \end{cases}$$

MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





## 4. Inecuaciones en el plano

Una inecuación en el plano viene dada por una desigualdad del tipo

$$ax + by \leq c \quad \text{ó} \quad ax + by \geq c$$

y la solución corresponde a un semiplano.

**Ejemplo 4.1.** Representar la solución de la inecuación  $x + y \geq 0$

*Solución:*

- Se representa la recta

$$x + y = 0 \implies y = -x$$

dando dos valores, por ejemplo

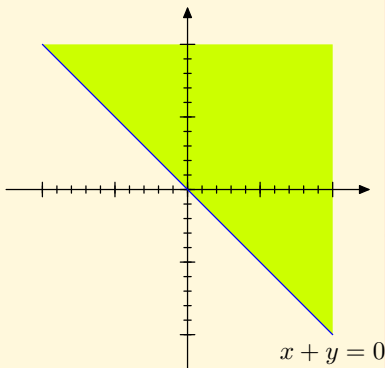
$$x = 3 \longrightarrow y = -3 \quad A(3, -3)$$

$$x = -3 \longrightarrow y = 3 \quad B(-3, 3)$$

- Se despeja  $y$

$$x + y \geq 0 \implies y \geq -x$$

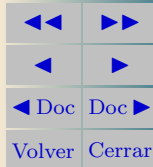
- Al quedar  $y$  de la forma  $\boxed{y \geq}$  marcamos la región superior de la recta o semiplano superior de la recta.



□

# MaTeX

## ECUACIONES Y SISTEMAS



**Ejemplo 4.2.** Representar la soluciones de la inecuación  $x + 2y \leq 2$

*Solución:*

- Se representa la recta

$$x + 2y = 2 \implies y = \frac{2 - x}{2}$$

dando dos valores, por ejemplo

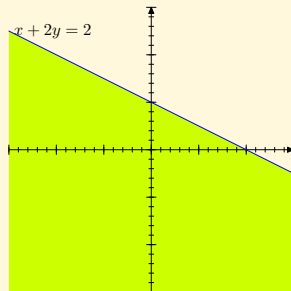
$$x = 2 \longrightarrow y = 0 \quad A(2, 0)$$

$$x = -2 \longrightarrow y = 2 \quad B(-2, 2)$$

- Se despeja  $y$

$$x + 2y \leq 2 \implies y \leq \frac{2 - x}{2}$$

- Al quedar  $y$  de la forma  $\boxed{y \leq}$  marcamos la parte inferior.



□

**EJERCICIO 10.** Representar la soluciones de la inecuación  $x - y \leq 0$

**EJERCICIO 11.** Representar la soluciones de la inecuación  $x - y \geq 1$



MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS



## 4.1. Sistemas de inecuaciones

Un sistema de inecuaciones lineales en el plano viene dado por varias desigualdades del tipo

$$\left. \begin{aligned} r_1 &\equiv a_1x + b_1y \leq c_1 \\ r_2 &\equiv a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots &\dots\dots\dots \\ r_n &\equiv a_nx + b_ny \leq c_n \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

y la solución, si existe, corresponde a una región convexa del plano, que llamamos **región factible**.

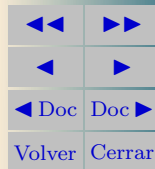
Para su solución gráfica, se representa cada recta y se marca el semiplano que determina. La parte que tienen en común todos los semiplanos proporciona la región factible.

Veamos unos ejemplos detenidamente. A continuación el alumno realizara algunos ejercicios.



MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





**Ejemplo 4.3.** Representar la solución del sistema de inecuaciones

$$r_1 : 3x + 4y \leq 12 \quad r_2 : 2x + y \geq 2 \quad r_3 : x \geq 0 \quad r_4 : y \geq 0$$

*Solución:*

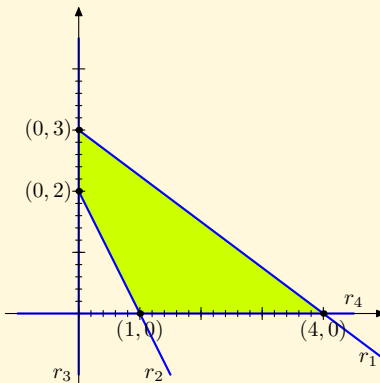
Representamos cada una de las rectas y el semiplano que determinan

$$r_1 \equiv 3x + 4y \leq 12$$

$$r_2 \equiv 2x + y \geq 2$$

$$r_3 \equiv x \geq 0$$

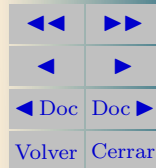
$$r_4 \equiv y \geq 0$$



Y sombreamos la región que tienen en común, que se denomina **región factible** o solución del sistema de inecuaciones.  $\square$

MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





**Ejemplo 4.4.** Resolver gráficamente el sistema:

$$\begin{cases} r_1 : x - 3y \geq -6 \\ r_2 : x + 2y \geq 4 \\ r_3 : 3x + y \leq 12 \end{cases}$$

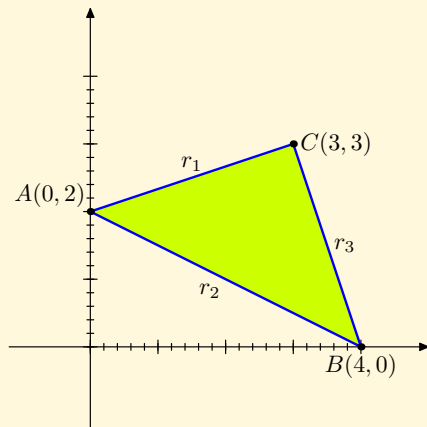
*Solución:*

Representamos cada recta

$$r_1 \equiv x - 3y = -6$$

$$r_2 \equiv x + 2y = 4$$

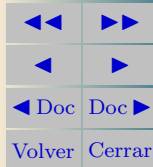
$$r_3 \equiv 3x + y = 12$$



La **región factible** corresponde al triángulo del dibujo y como está limitada se dice **acotada**. □

MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





**Ejemplo 4.5.** Hallar la región factible de:

$$\begin{cases} r_1 : x + 3y \geq 3 \\ r_2 : -x + y \leq 1 \end{cases}$$

*Solución:*

- Representamos la recta

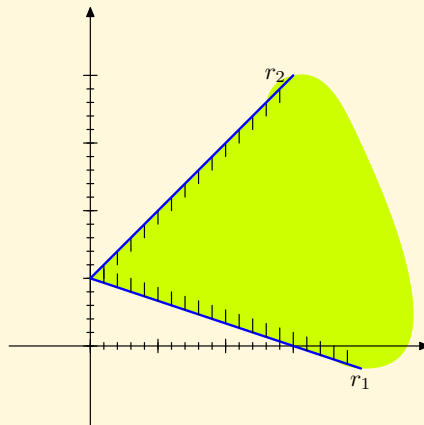
$$r_1 \equiv x + 3y = 3$$

tomando el semiplano  $y \geq$

- Representamos la recta

$$r_2 \equiv -x + y = 1$$

tomando el semiplano  $y \leq$



La **región factible** corresponde a la zona coloreada del dibujo y como no está limitada se dice **no acotada**.  $\square$

MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS



**EJERCICIO 12.** Hallar la región factible de los sistemas de inecuaciones siguientes:

(a)

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv x + y \leq 5 \\ r_2 &\equiv x + y \geq 2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv 4x - 3y \geq -3 \\ r_2 &\equiv x + 4y \geq 5 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv x \leq 2y \\ r_2 &\equiv y - x \leq 2 \\ r_3 &\equiv x + y \leq 5 \\ r_4 &\equiv x \geq 0 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv 2x + 4y \geq 4 \\ r_2 &\equiv 6x + 3y \geq 6 \\ r_3 &\equiv x \geq 0 \\ r_4 &\equiv y \geq 0 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv x \geq y \\ r_2 &\equiv x \leq 2y \\ r_3 &\equiv x \leq 20 \end{aligned}$$

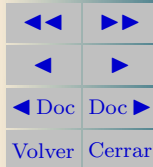
(f)

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv 3x + 2y \leq 24 \\ r_2 &\equiv y \leq x \\ r_3 &\equiv y \geq 1 \end{aligned}$$



MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS







## Soluciones a los Ejercicios

### Ejercicio 1.

$$a) x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2 & \boxed{x = \pm\sqrt{2}} \\ x^2 = 3 & \boxed{x = \pm\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$b) x^4 + 2x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -1 & \text{sin solución} \\ x^2 = 3 & \boxed{x = \pm\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$c) x^4 + 4x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -1 & \text{sin solución} \\ x^2 = -3 & \text{sin solución} \end{cases}$$

Ejercicio 1

MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS



**Prueba del Teorema 1.1.** En efecto, si  $a$  es una raíz de  $P(x)$  se tiene que al dividir  $P(x) : (x - a)$  obtendremos un cociente  $C(x)$ , de forma que

$$P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x - a) \cdot C(x)$$

Sustituyendo  $x$  por  $a$  en la expresión anterior

$$a_3 a^3 + a_2 a^2 + a_1 a + a_0 = (a - a) \cdot C(a) = 0$$

y despejando  $a_0$  observamos que  $a_0$  es un múltiplo de  $a$

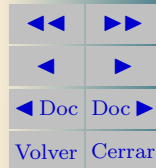
$$a_0 = -a(a_3 a^2 + a_2 a + a_1)$$

y por tanto  $a$  es un divisor del término independiente  $a_0$  de  $P(x)$ . ▶



MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





## Ejercicio 2.

$$a) x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5) = 0$$

raíces 

$$b) 3x^4 + 9x^2 = 3x^2(x^2 + 3) = 0$$

raíz 

$$c) x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1) = 0$$

raíz 

$$d) 3x^3 - 20x^2 + 27x - 10 = (x - 1)(x - 5)(3x - 2) = 0$$

raíces 

$$e) x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2) = 0$$

raíces 

$$f) x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = (x - 1)^3(x - 2) = 0$$

raíces 

$$g) x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = (x - 1)^2(x - 2)^2 = 0$$

raíces 

$$h) x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x + 3)(x + 2)(x - 2) = 0$$

raíces 

Ejercicio 2

MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS



## Ejercicio 3.

$$a) x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2) = 0 \quad \text{raíces } \boxed{-1, 2}$$

$$b) 3x^3 + 5x^2 - 2x = x(x + 2)(3x - 1) = 0 \quad \text{raíces } \boxed{0, -2, 1/3}$$

$$c) x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48 = (x - 2)^2(x - 3)(x + 4) = 0 \quad \text{raíces } \boxed{2, 3, -4}$$

$$d) x^4 - 5x^3 + 5x^2 - x - 12 = (x + 1)(x - 4)(x^2 - 2x + 3) = 0 \quad \text{raíces } \boxed{-1, 4}$$

$$e) x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x - 2)(x - 3)(x + 4) = 0 \quad \text{raíces } \boxed{2, 3, -4}$$

$$f) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)(2x + 3) = 0 \quad \text{raíces } \boxed{-1, 1, -2, -3/2}$$

$$g) x^3 - 13x^2 + 55x - 75 = (x - 5)^2(x - 3) = 0 \quad \text{raíces } \boxed{3, 5}$$

$$h) x^3 + 2x + 3 = (x + 1)(x^2 - x + 3) = 0 \quad \text{raíz } \boxed{-1}$$

$$i) x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2) = 0 \quad \text{raíces } \boxed{1, 2, -1}$$

$$j) 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3 = (x + 1)(x - 1)(3x^2 - 2x + 3) = 0 \quad \text{raíces } \boxed{1, -1}$$

Ejercicio 3

MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS

**Ejercicio 4.** Despejamos el radical y elevamos ambos miembros al cuadrado

$$(\sqrt{2-5x})^2 = (-\sqrt{3}x)^2$$

$$2-5x = 3x^2$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$$

$$x = \boxed{-2}; \frac{1}{3}$$

La que no lleva recuadro no verifica la ecuación inicial, pues

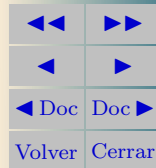
$$\sqrt{2-5\frac{1}{3}} + \sqrt{3}\frac{1}{3} \neq 0$$

Ejercicio 4



MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS



**Ejercicio 5.** Despejamos un radical y elevamos ambos miembros al cuadrado

$$\left(\sqrt{x^2 + 3}\right)^2 = \left(\sqrt{3 - x}\right)^2$$

$$x^2 + 3 = 3 - x$$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$

$$x = \boxed{0}; \quad \boxed{-1}$$

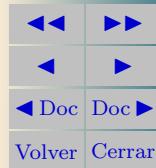
Las dos son soluciones pues verifican la ecuación inicial.

Ejercicio 5



MaTEX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





## Ejercicio 6.

a) Quitamos denominadores y ordenamos

$$\left. \begin{array}{l} (x+1) + 3y = 3 \\ (x-3) + 8y = 4 \end{array} \right\} \dots \left| \begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array} \right\} \text{restamos}$$


---


$$\begin{array}{l} -5y = -5 \\ \boxed{y = 1}, \boxed{x = -1} \end{array}$$

b) Quitamos denominadores y restamos

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{array} \right\} -5y = -5 \Rightarrow \boxed{y = 1}, \boxed{x = -1}$$

c) Quitamos denominadores y sumamos

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y = 2 \\ 6x - y = 6 \end{array} \right\} 10x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 4/5}, \boxed{y = -6/5}$$

d) Quitamos denominadores y sumamos

$$\left. \begin{array}{l} -x + 3y = -3 \\ x - 2y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y = 1}, \boxed{x = 6}$$

# MaTEX

# ECUACIONES Y SISTEMAS





## Ejercicio 7.

a) Despejamos en la 2ª ecuación  $y = 5 - 2x$  y sustituimos en la 1ª

$$x^2 - (5 - 2x)^2 = 7 \implies -3x^2 + 20x - 32 = 0 \begin{cases} x = 4 & y = -3 \\ x = \frac{8}{3} & y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

b) Despejamos en la 1ª ecuación  $y = \frac{16}{x}$  y sustituimos en la 2ª

$$(x + 5)\left(\frac{16}{x} - 1\right) = 22 \implies \frac{80}{x} - x = 11 \begin{cases} x = -16 & y = -1 \\ x = 5 & y = \frac{16}{5} \end{cases}$$

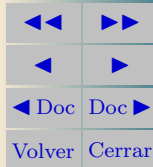
c) Despejamos en la 2ª ecuación  $y = \frac{10 - 4x}{3}$  y sustituimos en la 1ª

$$x^2 + x \frac{10 - 4x}{3} = 3 \implies x^2 - 10x + 9 = 0 \begin{cases} x = 1 & y = 2 \\ x = 9 & y = -\frac{26}{3} \end{cases}$$

Ejercicio 7

MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS







**Ejercicio 8.** Se opera y se pasa todo a un miembro:

$$x(x + 5) > 2x^2 \implies -x^2 + 5x > 0 \implies -x(x - 5) > 0$$

Se buscan las raíces que son  $x = 5$  y  $x = 0$ . Se toma un valor de cada zona y se sustituye en la inecuación, observando el signo que se obtiene

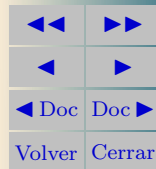


La solución es el intervalo  $(0, 5)$

Ejercicio 8

MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS

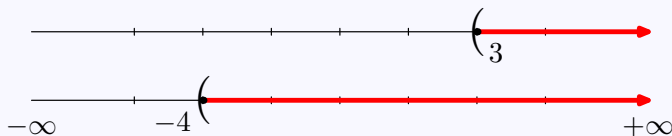




## Ejercicio 9.

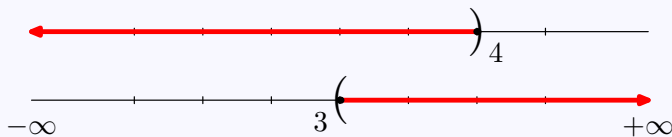
- a) Se representa cada solución y se toma la región que tienen en común, que en este caso es  $S = (3; \infty)$

$$\begin{cases} x + 5 > 4x - 4 \\ 2x - 7 < 3x - 3 \end{cases} \implies \begin{cases} -3x < -9 \\ -x < 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x > 3 \\ x > -4 \end{cases}$$



- b) Se representa cada solución y se toma la región que tienen en común, que en este caso es  $S = (3; 4)$

$$\begin{cases} 3x - 7 < x + 1 \\ 2x - 2 > x + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x < 8 \\ x > 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x < 4 \\ x > 3 \end{cases}$$



# MaTeX

## ECUACIONES Y SISTEMAS



Ejercicio 9



## Ejercicio 10.

- Se representa la recta

$$x - y = 0 \implies y = x$$

dando dos valores, por ejemplo

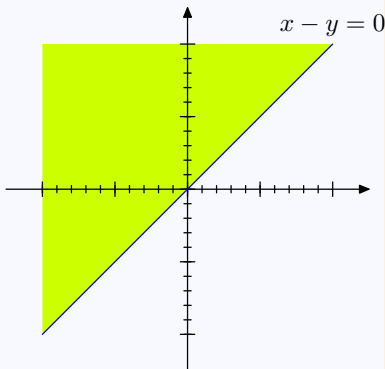
$$x = 3 \longrightarrow y = 3 \quad A(3, 3)$$

$$x = -3 \longrightarrow y = -3 \quad B(-3, -3)$$

- Se despeja la variable  $y$

$$x - y \leq 0 \implies y \geq x$$

- Al quedar  $y$  de la forma  $y \geq$  marcamos la parte superior.



Ejercicio 10

MaTeX

ECUACIONES  
Y SISTEMAS





## Ejercicio 11.

- Se representa la recta

$$x - y = 1 \implies y = x - 1$$

dando dos valores, por ejemplo

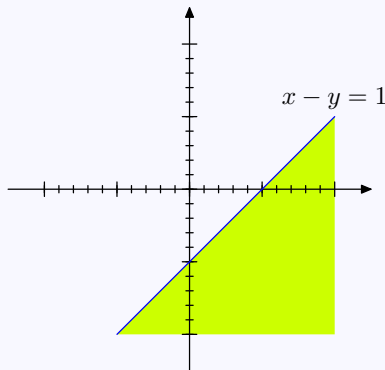
$$x = 3 \longrightarrow y = 2$$

$$x = -1 \longrightarrow y = -2$$

- Se despeja  $y$

$$x - y \geq 1 \implies y \leq x - 1$$

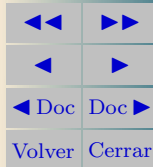
- Al quedar  $y$  de la forma  $y \leq$  marcamos la parte inferior.



Ejercicio 11

MaTeX

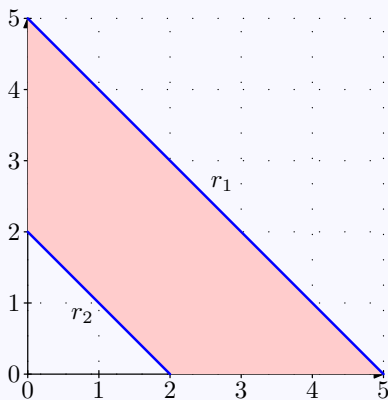
ECUACIONES  
Y SISTEMAS



## Ejercicio 12(a)

$$r_1 \equiv x + y \leq 5$$

$$r_2 \equiv x + y \geq 2$$



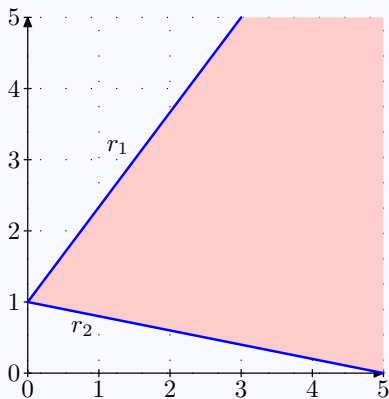
□

*MaTeX*ECUACIONES  
Y SISTEMAS

## Ejercicio 12(b)

$$r_1 \equiv 4x - 3y \geq -3$$

$$r_2 \equiv x + 4y \geq 5$$



□

MaTEXECUACIONES  
Y SISTEMAS

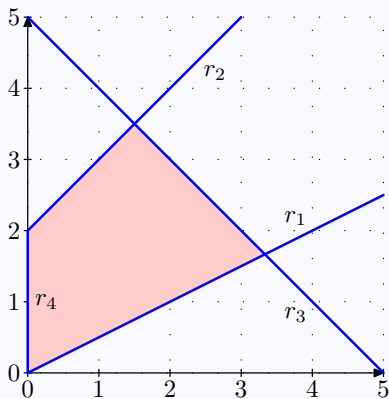
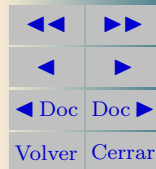
## Ejercicio 12(c)

$$r_1 \equiv x \leq 2y$$

$$r_2 \equiv y - x \leq 2$$

$$r_3 \equiv x + y \leq 5$$

$$r_4 \equiv x \geq 0$$

MaTEXECUACIONES  
Y SISTEMAS

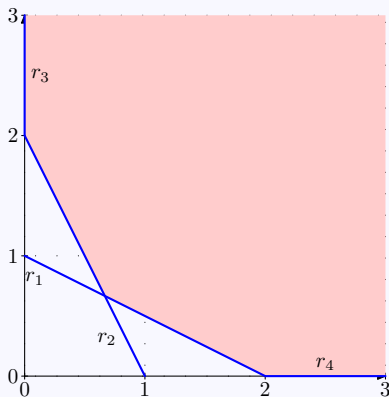
## Ejercicio 12(d)

$$r_1 \equiv 2x + 4y \geq 4$$

$$r_2 \equiv 6x + 3y \geq 6$$

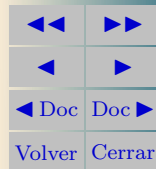
$$r_3 \equiv x \geq 0$$

$$r_4 \equiv y \geq 0$$



MaTEX

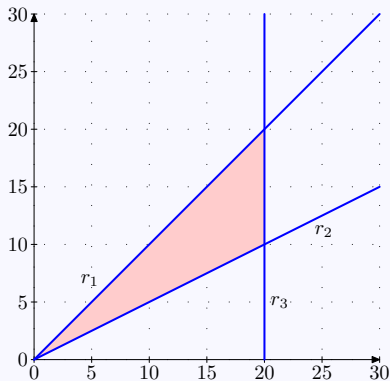
ECUACIONES  
Y SISTEMAS



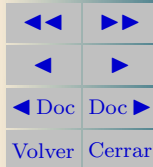


## Ejercicio 12(e)

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv x \geq y \\ r_2 &\equiv x \leq 2y \\ r_3 &\equiv x \leq 20 \end{aligned}$$



□

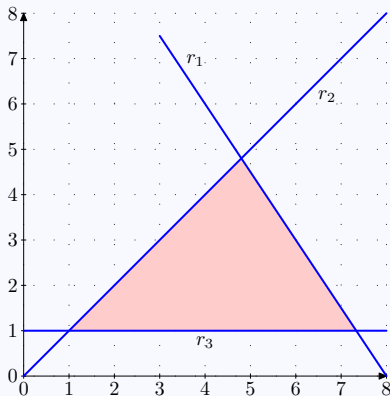
MaTEXECUACIONES  
Y SISTEMAS

## Ejercicio 12(f)

$$r_1 \equiv 3x + 2y \leq 24$$

$$r_2 \equiv y \leq x$$

$$r_3 \equiv y \geq 1$$



# MaTEX

## ECUACIONES Y SISTEMAS

