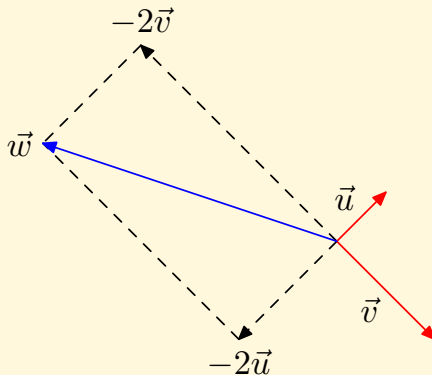


Proyecto MaTeX

Vectores en el plano

Fco Javier González Ortiz



Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)



MaTeX

VECTORES

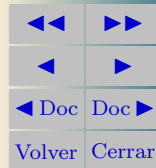


Tabla de Contenido

1. Vectores en el plano
 - 1.1. Vector fijo y libre
 - 1.2. Operaciones con vectores
 - 1.3. Combinación lineal de vectores. Base
2. Coordenada cartesianas
 - 2.1. Base canónica
3. Producto escalar de vectores
 - 3.1. Vectores ortogonales
 - 3.2. Producto escalar
 - 3.3. Módulo de un vector
 - 3.4. Ángulo de dos vectores

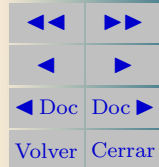
Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests



MaTEX

VECTORES



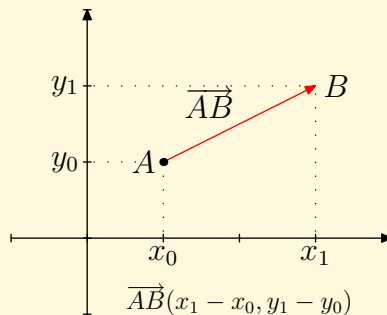
1. Vectores en el plano

1.1. Vector fijo y libre

Definición 1

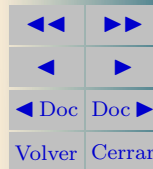
Llamamos **vector fijo** \overrightarrow{AB} al segmento orientado que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B .

- **Módulo:** Es la longitud del vector. Lo representamos por $|\overrightarrow{AB}|$
- **Dirección:** Es la dirección de la recta que lo contiene. Si dos vectores son paralelos tienen la misma dirección.
- **Sentido:** Es el que va del origen al extremo. Lo representamos por la punta de la flecha. Una dirección tiene dos sentidos.



MaTEX

VECTORES



Definición 2

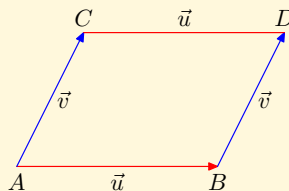
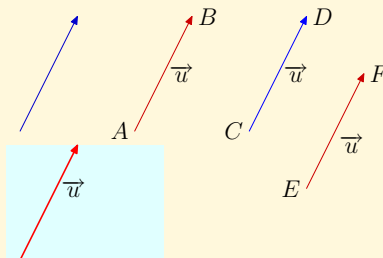
Vectores equipolentes son los vectores que tienen : mismo módulo, dirección y sentido

Todos los vectores del gráfico tienen la misma dirección, sentido y magnitud, son todos ellos equipolentes. También decimos que son representantes del vector *libre* \vec{u} .

Así, los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} y \overrightarrow{EF} son equipolentes y representantes del mismo vector libre \vec{u} .

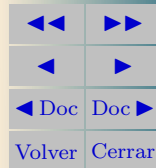
En el paralelogramo $ABDC$, son equipolentes los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} , y representantes de \vec{u} .

También son equipolentes los vectores \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{BD} , y representantes de \vec{v} .



MaTeX

VECTORES



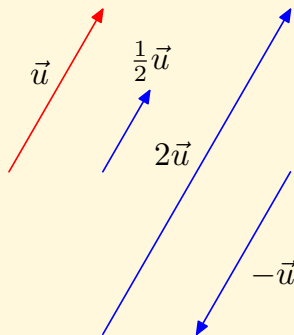
1.2. Operaciones con vectores

Definición 3

El producto de un número α por un vector \vec{u} es otro vector libre representado por $\alpha \cdot \vec{u}$

El vector $\alpha \cdot \vec{u}$ mantiene la dirección pero puede cambiar el sentido o la magnitud del vector \vec{u} .

- Si $\alpha > 0$, $\alpha \cdot \vec{u}$ tiene el mismo sentido que \vec{u} , y si $\alpha < 0$ tienen sentido contrario.
- Si $\alpha > 1$, el vector $\alpha \cdot \vec{u}$ se dilata o alarga y si $\alpha < 1$, el vector $\alpha \cdot \vec{u}$ se contrae o acorta.
- El caso que $\alpha = 0$, el vector $\alpha \cdot \vec{u}$ corresponde al vector nulo $(0,0)$

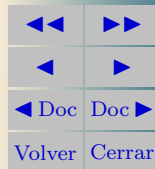


En el gráfico se muestran los vectores múltiplos de \vec{u} , la mitad de \vec{u} con $\alpha = \frac{1}{2}$, el doble de \vec{u} con $\alpha = 2$ y el opuesto de \vec{u} con $\alpha = -1$.



MaTeX

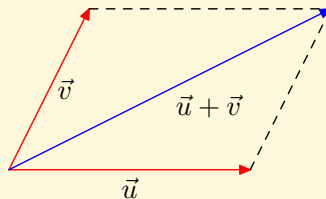
VECTORES



Definición 4 La suma de los vectores libres \vec{u} y \vec{v} es otro vector libre

$$\vec{u} + \vec{v}$$

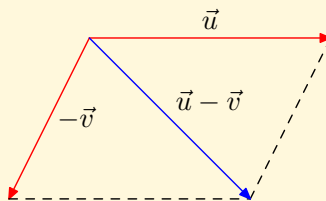
que se obtiene gráficamente, tomando representantes de \vec{u} y \vec{v} con el mismo origen, y trazando la diagonal del paralelogramo que determinan. También se llama la resultante.



Definición 5 La resta de los vectores libres $\vec{u}(u_1, u_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$ es otro vector libre definido por

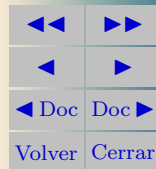
$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

la interpretación gráfica de la resta se muestra en el dibujo. El vector resta $\vec{u} - \vec{v}$ es la diagonal del paralelogramo construido con \vec{u} y $-\vec{v}$.



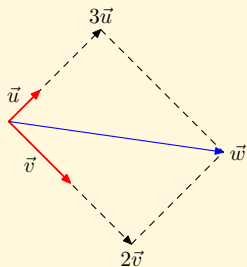
MaTEX

VECTORES



Ejemplo 1.1. Dados dos vectores no dependientes \vec{u} y \vec{v} hallar $3 \cdot \vec{u} + 2 \vec{v}$

Solución:



□

Ejemplo 1.2. Expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, los siguientes vectores:

a) \overrightarrow{BA}

b) \overrightarrow{AC}

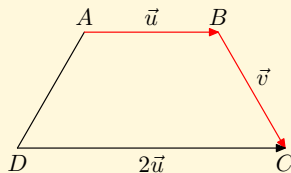
c) \overrightarrow{DB}

Solución:

a) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$

b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$

c) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = 2\vec{u} - \vec{v}$

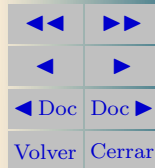


□



MaTEX

VECTORES



**Ejemplo 1.3.**

Considera el hexágono regular de la figura. Expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, los siguientes vectores:

a) \overrightarrow{BC}

b) \overrightarrow{AO}

c) \overrightarrow{AD}

d) \overrightarrow{DO}

e) \overrightarrow{CD}

f) \overrightarrow{AE}

Solución:

a) $\overrightarrow{BC} = -\vec{u} + \vec{v}$

b) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} = -\vec{u} + \vec{v}$

c) $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = -2\vec{u} + 2\vec{v}$

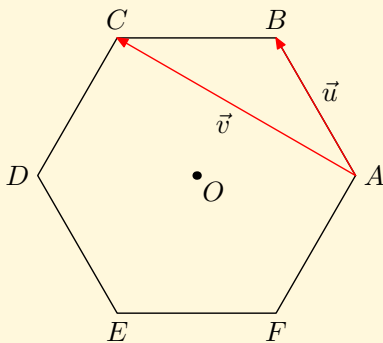
d) $\overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{BC} = \vec{u} - \vec{v}$

e) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{v} + (-2\vec{u} + 2\vec{v})$

$$\overrightarrow{CD} = -2\vec{u} + \vec{v}$$

f) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = (-2\vec{u} + 2\vec{v}) - \vec{u}$

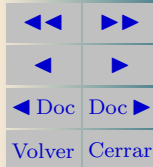
$$\overrightarrow{AE} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$$



□

MaTEX

VECTORES



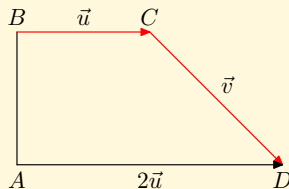
Ejercicio 1. Dados dos vectores no dependientes \vec{u} y \vec{v} hallar $-2 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v}$

Ejercicio 2. Expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{BC} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$, los siguientes vectores:

a) \overrightarrow{BD}

b) \overrightarrow{AC}

c) \overrightarrow{AB}



Ejercicio 3. Siendo M, N, P los puntos medios de los lados, expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ y $\overrightarrow{AP} = \vec{v}$, los siguientes vectores:

a) \overrightarrow{MB}

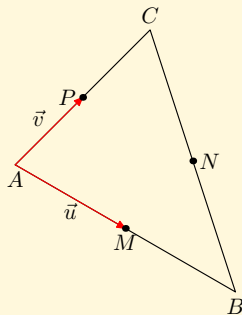
b) \overrightarrow{AB}

c) \overrightarrow{BC}

d) \overrightarrow{AN}

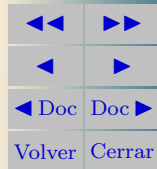
e) \overrightarrow{PM}

f) \overrightarrow{MC}



MaTeX

VECTORES





1.3. Combinación lineal de vectores. Base

En los ejercicios anteriores, básicamente hemos hecho dos cosas con los vectores. Multiplicarlos por un número y sumarlos (restarlos). Esas dos operaciones constituyen lo que se llama una combinación lineal, bien de uno o más vectores.

Definición 6

Decimos que el vector \vec{v} es *combinación lineal* del vector \vec{u} si existe un escalar α con

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$$

también decimos que \vec{u} y \vec{v} son *dependientes* o *proporcionales*. Si \vec{u} y \vec{v} no son dependientes decimos que son *independientes*.

Definición 7

Decimos que el vector \vec{w} es *combinación lineal* de los vectores \vec{u} y \vec{v} si existen escalares α y β con

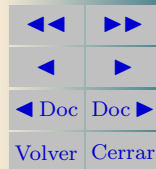
$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$$

Definición 8 (Base)

Decimos que los vectores \vec{u} y \vec{v} forman una *base* en el plano R^2 si son linealmente independientes. Esto significa que cualquier vector $\vec{w} \in R^2$ se obtiene por combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} .

MaTeX

VECTORES



2. Coordenada cartesianas

Tomando en el plano un punto cualquiera O como origen de referencia vamos a introducir coordenadas para trabajar con los vectores.

2.1. Base canónica

De entre todas las bases elegimos la **base canónica** determinada por los vectores $\vec{i}(1, 0)$ y $\vec{j}(0, 1)$. Así cualquier vector $\vec{u}(u_1, u_2)$ se puede expresar como

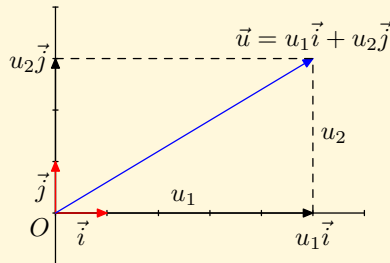
$$(u_1, u_2) = u_1 \cdot (1, 0) + u_2 \cdot (0, 1)$$

$$\vec{u} = u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j}$$

Los números u_1 y u_2 por este orden son las componentes del vector.

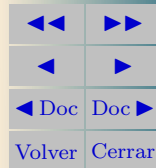
La magnitud o módulo del vector $\vec{u}(u_1, u_2)$ por el teorema de Pitágoras corresponde a

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$



MaTeX

VECTORES



Ejemplo 2.1. Expresar los vectores del gráfico en función de la base canónica $\vec{i}(1, 0)$ y $\vec{j}(0, 1)$ y determinar el módulo de de los mismos.

Solución:

$$\vec{v} = 2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\vec{w} = -3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$$

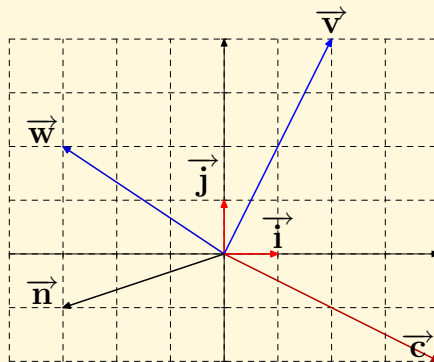
$$|\vec{w}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\vec{n} = -3 \cdot \vec{i} - \vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{c} = 4 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$



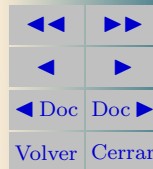
□

A continuación vamos a repasar los conceptos de **dependencia**, **independencia**, **bases** y **combinación lineal** de vectores utilizando coordenadas.



MaTeX

VECTORES



Ejemplo 2.2. Comprobar que el vector $\vec{w}(4, 8)$ es combinación lineal del vector $\vec{u}(1, 2)$

Solución: Comprobamos si existe un escalar α con

$$(4, 8) = \alpha \cdot (1, 2)$$

Igualando componentes se tiene

$$\left. \begin{array}{l} 4 = 1\alpha \\ 8 = 2\alpha \end{array} \right\} \implies \boxed{\alpha = 4}$$

□

Ejemplo 2.3. Dado el vector $\vec{v}(8, 12)$ hallar:

a) $3 \cdot \vec{v}$

b) $-2 \cdot \vec{v}$

c) $\frac{1}{4} \cdot \vec{v}$

d) $-\frac{1}{3} \cdot \vec{v}$

Solución:

a) $3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot (8, 12) = (24, 36)$

b) $-2 \cdot \vec{v} = -2 \cdot (8, 12) = (-16, -24)$

c) $\frac{1}{4} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} \cdot (8, 12) = (2, 3)$

d) $-\frac{1}{3} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{3} \cdot (8, 12) = \left(-\frac{8}{3}, -4\right)$

□



MaTeX

VECTORES



**Test.**

- Los vectores $\vec{u}(2, 2)$ y $\vec{v}(3, 3)$ son..?
 - Independientes
 - Dependientes
- Los vectores $\vec{u}(2, 2)$ y $\vec{v}(3, 4)$ son..?
 - Independientes
 - Dependientes

Ejemplo 2.4. Dados los vectores $\vec{u}(2, 1)$ y $\vec{v}(-1, 3)$ hallar:

- a) $3 \cdot \vec{u} + 2 \vec{v}$ b) $-2 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$ c) $-\vec{u} + 2 \cdot \vec{v}$

Solución:

- a) $3 \cdot \vec{u} + \vec{v} = 3 \cdot (2, 1) + (-1, 3) = (5, 6)$
 b) $-2 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v} = -2 \cdot (2, 1) + 3 \cdot (-1, 3) = (-7, 1)$
 c) $-\vec{u} + 2 \cdot \vec{v} = -(2, 1) + 2 \cdot (-1, 3) = (-4, 5)$

□

Ejemplo 2.5. Comprobar que el vector $\vec{w}(4, 7)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}(2, 1)$ y $\vec{v}(0, 5)$.

Solución: Comprobamos si $(4, 7) = \alpha \cdot (2, 1) + \beta \cdot (0, 5)$
 Igualando componentes se tiene

$$\left. \begin{array}{l} 4 = 2\alpha + 0\beta \\ 7 = 1\alpha + 5\beta \end{array} \right\} \implies \boxed{\alpha = 2 \quad \beta = 1}$$

□

MaTeX

VECTORES



Definición 9 (Base)

Decimos que los vectores $\vec{u}(u_1, u_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$ forman una **base** en el plano R^2 si son linealmente independientes. Esto significa que cualquier vector $\vec{w} \in R^2$ se obtiene por combinación lineal de $\vec{u}(u_1, u_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$.

Ejemplo 2.6. Comprobar que los vectores $\vec{u}(2, 1)$ y $\vec{v}(0, 5)$ forman una base.

Solución: Los dos vectores $\vec{u}(2, 1)$ y $\vec{v}(0, 5)$ forman una base, pues son independientes ya que no hay ningún escalar α tal que $\vec{u}(2, 1) = \alpha \cdot \vec{v}(0, 5)$.

Observa que las componentes no son proporcionales:

$$\frac{0}{2} \neq \frac{5}{1}$$

□

Ejemplo 2.7. ¿Forman una base los vectores $\vec{u}(2, 1)$ y $\vec{v}(4, 2)$?

Solución: No forman una base, pues los vectores son dependientes, ya que:

$$\vec{v}(4, 2) = 2 \cdot \vec{u}(2, 1)$$

Otra forma es ver que las componentes son proporcionales:

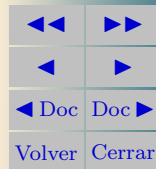
$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \implies \text{son dependientes}$$

□



MaTeX

VECTORES





Test. Responde a las cuestiones:

- Los vectores $\vec{u}(2, 2)$ y $\vec{v}(3, 3)$ forman una base en R^2 .
 (a) Verdadero (b) Falso
- Los vectores $\vec{u}(1, 0)$ y $\vec{v}(2, 1)$ forman una base en R^2 .
 (a) Verdadero (b) Falso

Ejercicio 4. Expresar el vector $\vec{w}(5, 2)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}(1, 2)$ y $\vec{v}(3, -2)$. Efectuar una representación gráfica.

Ejercicio 5. Dados los vectores $\vec{u}(1, -2)$ y $\vec{v}(2, 3)$, hallar \vec{v} con

$$\vec{w} = 2 \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$$

Ejercicio 6. Sean los vectores $\vec{u}(1, 1)$ y $\vec{w}(-1, 1)$. Comprobar que forman una base.

Ejercicio 7. Sean los vectores $\vec{u}(2, a)$ y $\vec{w}(1, 1)$. Hallar los valores de a para que formen una base.

MaTeX

VECTORES

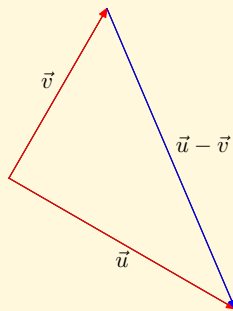


3. Producto escalar de vectores

3.1. Vectores ortogonales

Supongamos dos vectores \vec{u} y \vec{v} en (figura). Diremos que son **perpendiculares** u **ortogonales** si se satisface el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2$$



Aplicando la ecuación, la condición se transforma en

$$(u_1^2 + u_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2$$

Simplificando términos comunes queda

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2) = 0$$

Así la igualdad es válida si el producto cruzado es cero. Diremos que dos vectores \vec{u} y \vec{v} son ortogonales $\vec{u} \perp \vec{v}$ si

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0 \quad (1)$$



MaTeX

VECTORES



3.2. Producto escalar

Al producto anterior de las componentes de dos vectores le definimos como **producto escalar** de dos vectores

$$\vec{u}(u_1, u_2) \cdot \vec{v}(v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad (2)$$

Cuando el producto escalar de dos vectores es cero, los vectores son **ortogonales** o **perpendiculares**.

Para hallar un vector perpendicular a $\vec{u}(u_1, u_2)$ basta cambiar el orden y el signo de una de las componentes.

$$\vec{u}(u_1, u_2) \cdot \vec{v}(-u_2, u_1) = -u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0$$

Así,

$$(1, 5) \perp (-5, 1) \quad (2, 3) \perp (-3, 2) \quad (8, 7) \perp (-7, 8)$$

3.3. Módulo de un vector

Observar que si multiplicamos escalarmente un vector \vec{u} por si mismo se obtiene el cuadrado de su **módulo o longitud**:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 = |\vec{u}|^2 \quad (3)$$

o dicho de otra forma, el módulo de un vector es la raíz positiva de su producto escalar

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \quad (4)$$



MaTEX

VECTORES



3.4. Ángulo de dos vectores

Del teorema del coseno en un triángulo se tiene

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha \quad (5)$$

donde α es el ángulo determinado por \vec{u} y \vec{v} .

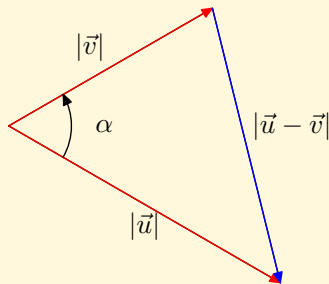
$$\begin{aligned} |\vec{u} - \vec{v}|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, igualando las ecuaciones anteriores se tiene

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\alpha \quad (6)$$

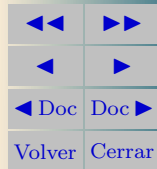
que nos da una segunda definición del producto escalar. Por ello se obtiene que el ángulo θ de dos vectores \vec{u} y \vec{v} viene dado por

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad (7)$$



MaTeX

VECTORES



Ejemplo 3.1. Determinar el ángulo de los vectores de R^2 , $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1)$.

Solución: Tenemos:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{(2, 1) \cdot (0, 1)}{|(2, 1)| \cot |(0, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{6} \sqrt{1}}$$

y de esto bastaría hallar

$$\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$$

□

Ejercicio 8. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{v} = (6, -1)$ hallar:

1. los módulos de \vec{u} y \vec{v} .
2. El producto escalar de \vec{u} y \vec{v}
3. El coseno del ángulo que forman.
4. Hallar m para que el vector $\vec{w}(m, 2)$ sea ortogonal a \vec{u}

Ejercicio 9. Hallar todos los vectores \vec{w} perpendiculares a $\vec{u}(u_1, u_2)$ y con el mismo módulo.

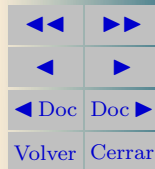
Ejercicio 10. Dados los vectores $\vec{u}(-4, 6)$ y $\vec{v}(5, m)$. Hallar m para que:

- a) Sean dependientes
- b) Sean perpendiculares



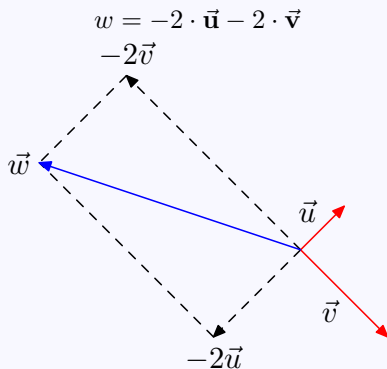
MaTeX

VECTORES



Soluciones a los Ejercicios

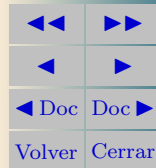
Ejercicio 1.



Ejercicio 1

MaTEX

VECTORES

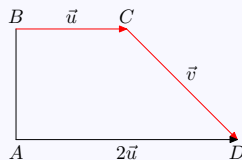


Ejercicio 2.

$$a) \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$b) \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\vec{u} - \vec{v}$$

$$c) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{u} - \vec{v}$$



Ejercicio 2

MaTEX

VECTORES



Ejercicio 3.

a) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} = \vec{u}$

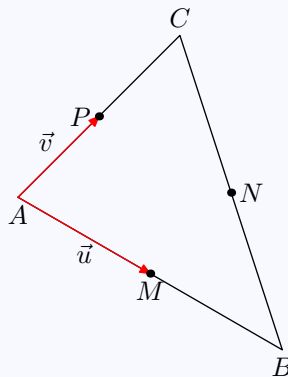
b) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} = 2\vec{u}$

c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -2\vec{u} + 2\vec{v}$

d) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \vec{u} + \vec{v}$

e) $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = \vec{u} - \vec{v}$

f) $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{u} + 2\vec{v}$

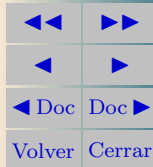


Ejercicio 3



MaTeX

VECTORES

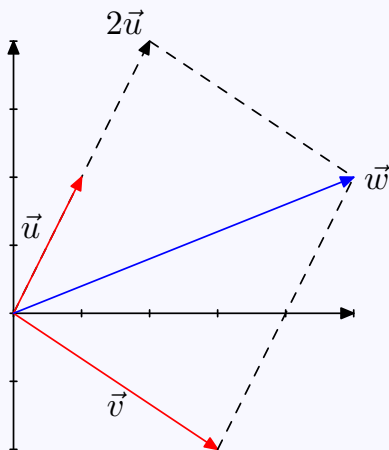


Ejercicio 4. Buscamos escalares α y β con

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$$

Igualando componentes se tiene

$$\left. \begin{array}{l} 5 = 1\alpha + 3\beta \\ 2 = 2\alpha - 2\beta \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\alpha = 2 \quad \beta = 1}$$

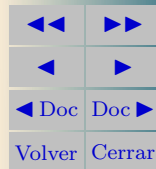


Ejercicio 4



MaTEX

VECTORES



Ejercicio 5. Igualando componentes se tiene

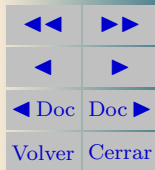
$$\left. \begin{array}{l} 2 = 2(1) + 3v_1 \\ 3 = 2(-2) + 3v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{v_1 = 0 \quad v_2 = \frac{7}{3}}$$

Ejercicio 5



MaTeX

VECTORES



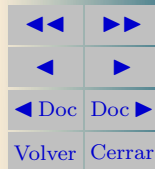
Ejercicio 6. Basta comprobar que los vectores $\vec{u}(1, 1)$ y $\vec{w}(-1, 1)$ son linealmente independientes. Como las componentes no son proporcionales:

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \implies \text{son independientes}$$

Ejercicio 6

*MaTeX*

VECTORES



Ejercicio 7. Basta exigir que los vectores $\vec{u}(2, a)$ y $\vec{w}(1, 1)$ sean linealmente independientes., es decir que las componentes no sean proporcionales. Como

$$\frac{2}{1} = \frac{a}{1} \implies a = 2$$

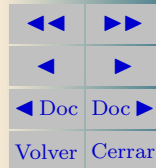
Si $a = 2$ son dependientes y no forman base. Para cualquier valor $a \neq 2$ son independientes y forman una base.

Ejercicio 7



MaTEX

VECTORES



**Ejercicio 8.**

$$1. \quad |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{6^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$$

2. El producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -3) \cdot (6, -1) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 15$$

3. Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$, tenemos,

$$\cos \alpha = \frac{15}{\sqrt{13} \sqrt{37}}$$

4. \vec{w} ortogonal a \vec{u} si $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$, luego,

$$(m, 2) \cdot (2, -3) = 0 \Rightarrow 2m - 6 = 0 \Rightarrow m = 3$$

Ejercicio 8

MaTeX

VECTORES



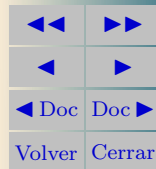
Ejercicio 9. Los vectores \vec{w} perpendiculares a $\vec{u}(u_1, u_2)$ y con el mismo módulo, son

$$\vec{w}(-u_2, u_1) \quad \vec{w}(u_2, -u_1)$$

Ejercicio 9

MaTEX

VECTORES



**Ejercicio 10.**

a) los vectores $\vec{u}(-4, 6)$ y $\vec{v}(5, m)$ son dependientes si

$$\frac{-4}{5} = \frac{6}{m} \implies m = -\frac{15}{2}$$

b) los vectores $\vec{u}(-4, 6)$ y $\vec{v}(5, m)$ son perpendiculares si

$$(-4, 6) \cdot (5, m) = 0 \implies -20 + 6m = 0 \implies m = \frac{10}{3}$$

Ejercicio 10

MaTeX

VECTORES



Soluciones a los Tests

Solución al Test: En efecto los vectores $\vec{u}(2,2)$ y $\vec{v}(3,3)$ son linealmente dependientes pues

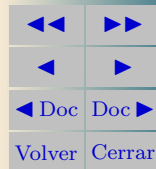
$$\vec{v}(3,3) = \frac{3}{2} \cdot \vec{u}(2,2)$$

Final del Test



MaTEX

VECTORES



Índice alfabético

ángulo de dos vectores, 19

base, 10, 15

combinación lineal , 10

norma, 18

producto escalar, 18

vectores

 por un número, 5

 resta, 6

 suma, 6

vectores ortogonales, 17



MaTEX

VECTORES

