

Proyecto MaTeX

Razones

Trigonométricas II

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

© 2004 javier.gonzalez@unican.es
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II

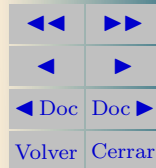


Tabla de Contenido

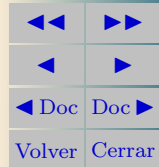
1. Razones trigonométricas de ..
 - 1.1. Suma de ángulos
 - 1.2. Diferencia de ángulos
 - 1.3. El ángulo doble
 - 1.4. Ángulo mitad
2. Ecuaciones trigonométricas
3. Ampliación
 - 3.1. Suma y diferencia de senos
 - 3.2. Suma y diferencia de cosenos
 - 3.3. Ejercicios

Soluciones a los Ejercicios



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II





1. Razones trigonométricas de ..

1.1. Suma de ángulos

Se trata de calcular las razones de $(\alpha + \beta)$ en función de las razones de α y β .

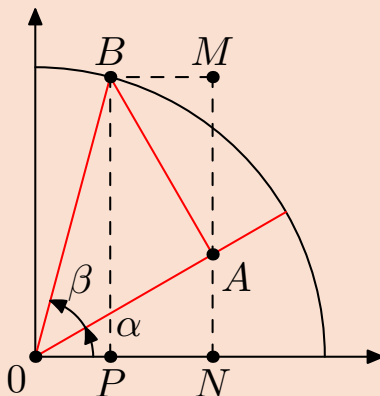
En la figura se tiene que

$$OA = \cos \beta \quad AB = \sin \beta$$

Se tiene así, que

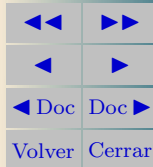
$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= PB = NM \\ &= NA + AM \\ &= OA \sin \alpha + AB \cos \alpha \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= OP = ON - PN \\ &= ON - BM \\ &= OA \cos \alpha - AB \sin \alpha \\ &= \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha \end{aligned}$$



MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II



Para calcular la $\tan(\alpha + \beta)$ realizamos el cociente del seno entre el coseno

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{cos}(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\text{sen } \alpha \text{ cos } \beta + \text{cos } \alpha \text{ sen } \beta}{\text{cos } \alpha \text{ cos } \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta} \\ &= (\text{dividiendo por } \text{cos } \alpha \text{ cos } \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

Razones de la suma de ángulos

$$\begin{aligned}\text{sen}(\alpha + \beta) &= \text{sen } \alpha \text{ cos } \beta + \text{cos } \alpha \text{ sen } \beta \\ \text{cos}(\alpha + \beta) &= \text{cos } \beta \text{ cos } \alpha - \text{sen } \beta \text{ sen } \alpha \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

(1)



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II



Ejemplo 1.1. A partir de 30° y 45° obtener el valor exacto de $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$ y $\tan 75^\circ$.

Solución:

$$\sin 75^\circ = \sin(30 + 45) = \sin 30 \cos 45 + \cos 30 \sin 45$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(30 + 45) = \cos 30 \cos 45 - \sin 30 \sin 45$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 75^\circ = \tan(30 + 45) &= \frac{\tan 30 + \tan 45}{1 - \tan 30 \tan 45} \\ &= \frac{(1/\sqrt{3}) + 1}{1 - (1/\sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \end{aligned}$$

□



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II





1.2. Diferencia de ángulos

Utilizando las razones de los ángulos opuestos y utilizando las fórmulas para la suma de ángulos se obtiene:

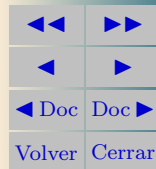
$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)] \\ &= \operatorname{sen} \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \operatorname{sen}(-\beta) \\ &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cos}(\alpha - \beta) &= \operatorname{cos}[\alpha + (-\beta)] \\ &= \operatorname{cos} \alpha \cos(-\beta) - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(-\beta) \\ &= \operatorname{cos} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tan}(\alpha - \beta) &= \operatorname{tan}[\alpha + (-\beta)] \\ &= \frac{\operatorname{tan} \alpha + \operatorname{tan}(-\beta)}{1 - \operatorname{tan} \alpha \operatorname{tan}(-\beta)} \\ &= \frac{\operatorname{tan} \alpha - \operatorname{tan} \beta}{1 + \operatorname{tan} \alpha \operatorname{tan} \beta}\end{aligned}$$

MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II



La diferencia de ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{cos}(\alpha - \beta) = \operatorname{cos} \beta \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{tan}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tan} \alpha - \operatorname{tan} \beta}{1 + \operatorname{tan} \alpha \operatorname{tan} \beta}$$

(2)

Ejemplo 1.2. A partir de 30° y 45° hallar $\operatorname{sen} 15^\circ$ y $\operatorname{cos} 15^\circ$.

Solución:

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(45 - 30) = \operatorname{sen} 45 \operatorname{cos} 30 - \operatorname{cos} 45 \operatorname{sen} 30$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\operatorname{cos} 15^\circ = \operatorname{cos}(45 - 30) = \operatorname{cos} 45 \operatorname{cos} 30 + \operatorname{sen} 30 \operatorname{sen} 45$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

□



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II





1.3. El ángulo doble

A partir de las razones de la suma obtenemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\alpha) &= \operatorname{sen}[\alpha + \alpha] = \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \\ &= 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cos}(2\alpha) &= \operatorname{cos}[\alpha + \alpha] = \operatorname{cos}\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha \\ &= \operatorname{cos}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tan}(2\alpha) &= \operatorname{tan}[\alpha + \alpha] = \frac{\operatorname{tan}\alpha + \operatorname{tan}\alpha}{1 - \operatorname{tan}\alpha \operatorname{tan}\alpha} \\ &= \frac{2 \operatorname{tan}\alpha}{1 - \operatorname{tan}^2\alpha}\end{aligned}$$

Razones del ángulo doble

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\alpha) &= 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \\ \operatorname{cos}(2\alpha) &= \operatorname{cos}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \\ \operatorname{tan}(2\alpha) &= \frac{2 \operatorname{tan}\alpha}{1 - \operatorname{tan}^2\alpha}\end{aligned}$$

(3)

MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II





Ejemplo 1.3. A partir de las razones de 60° hallar $\overline{\text{sen } 120^\circ}$ y $\overline{\text{cos } 120^\circ}$.

Solución:

$$\begin{aligned}\overline{\text{sen } 120^\circ} &= \overline{\text{sen}(2 \cdot 60)} = 2 \overline{\text{sen } 60} \overline{\text{cos } 60} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \overline{\text{cos } 120^\circ} &= \overline{\text{cos}(2 \cdot 60)} = \overline{\text{cos}^2 60} - \overline{\text{sen}^2 60} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.4. Si α está en el tercer cuadrante y $\overline{\text{cos } \alpha} = -\frac{1}{2}$, obtener el valor de $\overline{\text{sen } 2\alpha}$ y $\overline{\text{cos } 2\alpha}$.

Solución: Primero calculamos $\overline{\text{sen } \alpha}$

$$\overline{\text{sen}^2 \alpha} = 1 - \overline{\text{cos}^2 \alpha} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \implies \overline{\text{sen } \alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{\text{sen } 2\alpha} = 2 \overline{\text{sen } \alpha} \overline{\text{cos } \alpha} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{\text{cos } 2\alpha} = \overline{\text{cos}^2 \alpha} - \overline{\text{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

□

MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II



1.4. Ángulo mitad

A partir del coseno del ángulo doble se tiene

$$\cos 2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (4)$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (5)$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \quad (6)$$

Despejando en las dos últimas expresiones obtenemos las razones del seno y coseno para el ángulo mitad

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad (7)$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad (8)$$

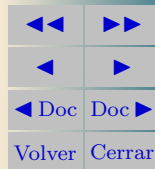
Dividiendo las dos expresiones anteriores

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (9)$$



MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II



Ejemplo 1.5. Con el ángulo mitad obtener el valor exacto de $\sen 15^\circ$, $\cos 15^\circ$ y $\tan 15^\circ$.

Solución:

$$\sen^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \implies \sen 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \implies \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

$$\tan^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30}{1 + \cos 30} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \implies \tan 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$

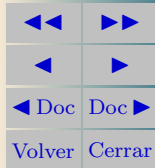
□

Ejercicio 1. Si α está en el tercer cuadrante y $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$, obtener el valor de $\sen \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ y $\tan \frac{\alpha}{2}$.



MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II



2. Ecuaciones trigonométricas

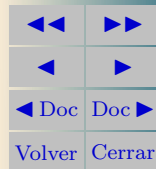
Llamamos **ecuación trigonométrica** a una ecuación con razones trigonométricas, donde se pretende calcular el ángulo incógnita α . No hay un método general de resolución pero podemos indicar algunas pautas de resolución, como:

- Sacar factor común cuando el término independiente es cero.
- Procurar que todas las razones tengan el mismo ángulo.
- Y procurar obtener la misma razón trigonométrica



MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II



Ejemplo 2.1. Resolver la ecuación $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

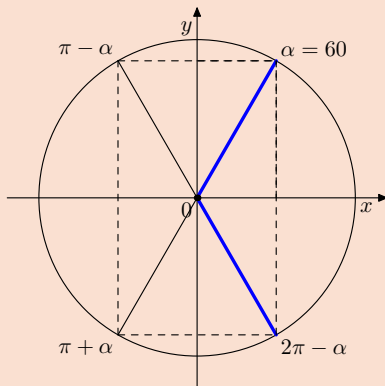
Solución: Conocemos que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Dibujamos un aspa como el de la figura a partir de 60° y obtenemos las soluciones entre 0 y 360° .

A estas soluciones se le añaden un múltiplo cualquiera de vueltas con la expresión $360^\circ k$, siendo k un número entero.

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \implies \begin{cases} \alpha = 60^\circ + 360^\circ k \\ \alpha = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$



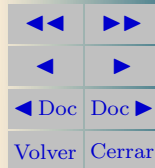
Las soluciones las puedes expresar en grados o en radianes

□



MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II



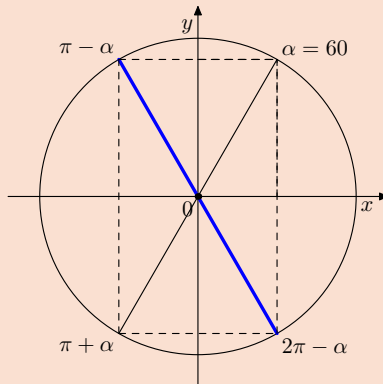
Ejemplo 2.2. Resolver la ecuación $\tan \alpha = -\sqrt{3}$

Solución: Conocemos que $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

Dibujamos un aspa como el de la figura a partir de 60° y obtenemos las soluciones entre 0 y 360° .

$$\tan \alpha = -\sqrt{3} \implies \begin{cases} \alpha = 120^\circ + 360^\circ k \\ \alpha = 300^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$



En este caso como entre dos soluciones consecutivas hay 180° , todas las soluciones se pueden expresar de la forma

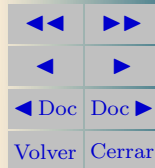
$$\alpha = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

□



MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II



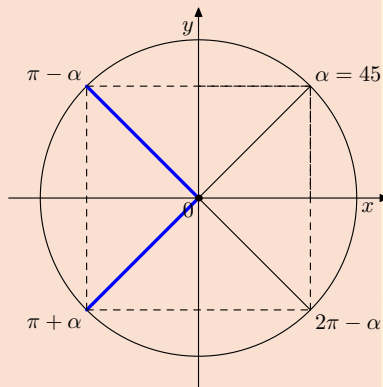
Ejemplo 2.3. Resolver la ecuación $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución: Conocemos que $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dibujamos un aspa como el de la figura a partir de 45° y obtenemos las soluciones entre 0 y 360° donde el coseno es negativo

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \implies \begin{cases} \alpha = 135^\circ + 360^\circ k \\ \alpha = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$



□

MaTEXTRIGONO-
METRÍA II



Ejercicio 2. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

$$a) \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \qquad b) \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad c) \operatorname{cos} 3\alpha = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 3. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

$$a) \operatorname{cos} 2\alpha = -\frac{1}{2} \qquad b) \tan \frac{\alpha}{4} = 1 \qquad c) \operatorname{cot}(\alpha - \pi) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ejercicio 4. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

$$a) \operatorname{sec} 2\alpha = 2 \qquad b) \operatorname{sen} x = \sqrt{3} \operatorname{cos} x \qquad c) \operatorname{sen}(2\alpha - 135^\circ) = 0$$

Ejercicio 5. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

$$a) \tan 3\alpha = -1 \qquad b) \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{4} = 1 \qquad c) 2 \operatorname{cos} 2\alpha = \sqrt{3}$$

EJERCICIO 6. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

- | | |
|--|--|
| (a) $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen} \alpha$ | (b) $\operatorname{cos} 2\alpha = \operatorname{cos} \alpha$ |
| (c) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} \alpha$ | (d) $\operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cot} \alpha$ |
| (e) $\tan \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha$ | (f) $\operatorname{sen} \alpha + \sqrt{3} \operatorname{cos} \alpha = 0$ |
| (g) $2 \operatorname{sen}(\alpha - 30^\circ) = -1$ | (h) $\operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{cosec} \alpha = \tan \alpha + \operatorname{sec} \alpha$ |

MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II





EJERCICIO 7. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

(a) $2 - \operatorname{sen} x = \cos^2 x + 7 \operatorname{sen}^2 x$

(b) $2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x = 0$

(c) $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$

(d) $\operatorname{sen}^2 x + \cos x + 1 = 0$

(e) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$

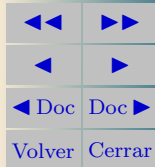
(f) $\operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} 4x = 0$

(g) $2 \operatorname{sen}(\alpha - 30^\circ) = -1$

(h) $\operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{cosec} \alpha = \tan \alpha + \sec \alpha$

MaT_EX

TRIGONO-
METRÍA II





3. Ampliación

3.1. Suma y diferencia de senos

Del seno de la suma y diferencia de ángulos :

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Si sumamos y restamos las dos identidades obtenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

(10)

Si llamamos $A = \alpha + \beta$ y $B = \alpha - \beta$ las anteriores identidades son:

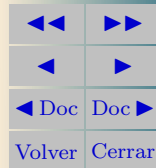
$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

(11)

MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II





3.2. Suma y diferencia de cosenos

Del seno de la suma y diferencia de ángulos :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Si sumamos y restamos las dos identidades obtenemos

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

(12)

Si llamamos $A = \alpha + \beta$ y $B = \alpha - \beta$ las anteriores identidades son:

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

(13)

MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II



Ejemplo 3.1. Convertir en productos las expresiones.

a) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x$

b) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x$

c) $\operatorname{cos} 3x + \operatorname{cos} x$

d) $\operatorname{cos} 3x - \operatorname{cos} x$

e) $\operatorname{cos} 4x + \operatorname{cos} 2x$

f) $\operatorname{cos} 4x - \operatorname{cos} 2x$

g) $\operatorname{cos} 4x + \operatorname{cos} 2y$

h) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y$

Solución:

a) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{cos} x$

b) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{cos} 2x \operatorname{sen} x$

c) $\operatorname{cos} 3x + \operatorname{cos} x = 2 \operatorname{cos} 2x \operatorname{cos} x$

d) $\operatorname{cos} 3x - \operatorname{cos} x = -2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x$

e) $\operatorname{cos} 4x + \operatorname{cos} 2x = 2 \operatorname{cos} 3x \operatorname{cos} x$

f) $\operatorname{cos} 4x - \operatorname{cos} 2x = -2 \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x$

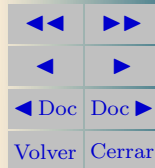
g) $\operatorname{cos} 4x + \operatorname{cos} 2y = 2 \operatorname{cos}(2x + y) \operatorname{cos}(2x - y)$

h) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y = 2 \operatorname{sen}(x + y) \operatorname{cos}(x - y)$

□

MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II





3.3. Ejercicios

EJERCICIO 8. Simplificar las siguientes expresiones:

(a) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$

(b) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$

(c) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$

(d) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$

EJERCICIO 9. Simplificar las siguientes expresiones:

(a) $\sin(45 + \beta) + \cos(45 + \beta)$

(b) $\sin(30 + \beta) + \cos(60 + \beta)$

(c) $\sin(30 + x) + \sin(30 - x)$

(d) $\cos(30 + x) - \cos(30 - x)$

Ejercicio 10. Demostrar la siguiente identidad:

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

Ejercicio 11. Si $\tan 2\alpha = \frac{2}{3}$ y α es del 3º cuadrante, hallar $\tan \alpha$

Ejercicio 12. ¿Existe algún ángulo menor de 360° cuya tangente sea igual a su cotangente?

MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II



Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Si α está en el tercer cuadrante, $\alpha/2$ está en el segundo cuadrante

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 + \frac{1}{5}}{2} \implies \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \frac{1}{5}}{2} \implies \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{2}{5}}$$

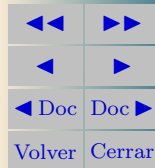
$$\tan 15^\circ = \frac{\operatorname{sen} 15}{\operatorname{cos} 15} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ejercicio 1



MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II



**Ejercicio 2.**

a)

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 30^\circ + 2k\pi \\ \alpha = 150^\circ + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

b)

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

c)

$$\operatorname{cos} 3\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 3\alpha = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \\ \alpha = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

Ejercicio 2

MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II

**Ejercicio 3.**

a)

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2\alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ \alpha = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

b)

$$\tan \frac{\alpha}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\alpha}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pi + 8k\pi \\ \alpha = 5\pi + 8k\pi \end{cases}$$

$$c) \cot(\alpha - \pi) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan(\alpha - \pi) = -\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \alpha - \pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\ \alpha = \frac{8\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Ejercicio 3

MaTEXTRIGONO-
METRÍA II

**Ejercicio 4.**

a) $\sec 2\alpha = 2$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 60^\circ + 2k\pi \\ 2\alpha = 300^\circ + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

b)

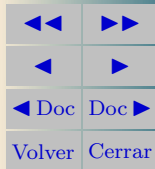
$$\operatorname{sen} x = \sqrt{3} \cos x \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

c)

$$\operatorname{sen}(2\alpha - 135^\circ) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 135^\circ = 0 + 2k\pi \\ 2\alpha - 135^\circ = \pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3\pi}{8} + k\pi \\ \alpha = \frac{7\pi}{8} + k\pi \end{cases}$$

Ejercicio 4

MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II

**Ejercicio 5.**

a)

$$\tan 3\alpha = -1 \implies \begin{cases} 3\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ 3\alpha = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \\ \alpha = \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

b) $\operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{4} = 1$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{4} = \pm 1 \implies \begin{cases} \frac{\alpha}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{\alpha}{4} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{1} + 8k\pi \\ \alpha = \frac{6\pi}{1} + 8k\pi \end{cases}$$

c) $2 \cos 2\alpha = \sqrt{3}$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2\alpha = \frac{10\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

Ejercicio 5

MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 6(a)

Utilizamos el seno del ángulo doble y sacamos factor común:

$$\text{sen } 2\alpha = \text{sen } \alpha$$

$$2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha = \text{sen } \alpha$$

$$2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha - \text{sen } \alpha = 0$$

$$\text{sen } \alpha (2 \cos \alpha - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = 0 \\ \cos \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \boxed{0 + k\pi} \\ \alpha = \boxed{\frac{\pi}{3} + 2k\pi} \end{cases} \quad \boxed{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}$$

□



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II



Ejercicio 6(b)

Utilizamos el coseno del ángulo doble, pasando todo a cosenos y resolvemos la ecuación:

$$\cos 2\alpha = \cos \alpha$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos \alpha$$

$$\cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \cos \alpha$$

$$2 \cos^2 \alpha - \cos \alpha - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \cos \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \boxed{0 + 2k\pi} \\ \alpha = \boxed{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi} \end{cases} \quad \boxed{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}$$

□

MaTEXTRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 6(c)

Expresamos el coseno en función del seno, elevamos al cuadrado y resolvemos la ecuación:

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{array}$$

Las que no tienen recuadro son del segundo y cuarto cuadrante que no cumplen la ecuación inicial. Esto suele ocurrir cuando [se eleva al cuadrado o hay denominadores](#)

□



MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II



Ejercicio 6(d)

Utilizamos la definición de la cotangente, operamos y sacamos factor común:

$$\cos \alpha = \cot \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha = 0$$

$$\cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha - 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = 0 \\ \operatorname{sen} \alpha = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} + k \pi \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k \pi \end{array} \right.$$

La primera solución incluye a la segunda, luego

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k \pi$$

□



MaT_EX

TRIGONO-
METRÍA II



Ejercicio 6(e)

Utilizamos la definición de la tangente, operamos y sacamos factor común:

$$\tan \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{sen} \alpha (1 - 2 \cos \alpha) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = 0 \\ \cos \alpha = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 + k \pi \\ \alpha = \frac{\pi}{3} + 2 k \pi \end{array} \right. \quad \frac{5\pi}{3} + 2 k \pi$$

□



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II



Ejercicio 6(f)

Expresamos el coseno en función del seno, elevamos al cuadrado y resolvemos la ecuación:

$$\operatorname{sen} \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = 0$$

$$\operatorname{sen} \alpha + \sqrt{3} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = 0$$

$$\sqrt{3} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$3(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$4 \operatorname{sen}^2 \alpha = 3$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \quad \begin{array}{|c|} \hline \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \hline \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\ \hline \end{array}$$

Las que no tienen recuadro no cumplen la ecuación inicial.

□



MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 6(g)

$$2 \operatorname{sen}(\alpha - 30^\circ) = -1$$

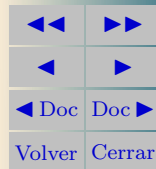
$$\operatorname{sen}(\alpha - 30^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha - 30^\circ = 210^\circ + 2k\pi \quad 330^\circ + 2k\pi$$

$$\alpha = \boxed{240^\circ + 2k\pi} \quad \boxed{330^\circ + 2k\pi}$$

*MaTEX*

□

TRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 6(h)

$$\operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{cosec} \alpha = \tan \alpha + \sec \alpha$$

$$2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$2 \cos \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha + 1}{\cos \alpha}$$

$$2 \cos^2 \alpha = \operatorname{sen} \alpha + 1$$

$$2(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \operatorname{sen} \alpha + 1$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen} \alpha - 1 = 0$$

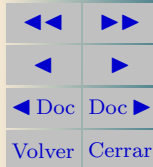
$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} \alpha = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \boxed{\frac{\pi}{5} + 2k\pi} \\ \alpha = \boxed{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi} \end{cases} \quad \boxed{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}$$

Las que no tienen recuadro no verifican la ecuación inicial.

□



MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 7(a)

$$2 - \operatorname{sen} x = \cos^2 x + 7 \operatorname{sen}^2 x$$

$$2 - \operatorname{sen} x = 1 + 6 \operatorname{sen}^2 x$$

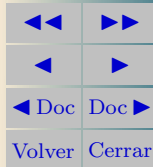
$$6 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \implies \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{1}{3} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ con la calculadora $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{3} \simeq 19,47^\circ$

$$\begin{cases} x = 19,47^\circ + 2k\pi \\ x = 160,53^\circ + 2k\pi \end{cases}$$

- $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \implies \begin{cases} x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

□

MaTEXTRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 7(b)

$$2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x = 0$$

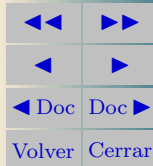
$$2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0$$

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0 \implies \begin{cases} \cos x = 2 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- $\cos x = 2$ no tiene solución pues $-1 \leq \cos x \leq 1$

$$\blacksquare \cos x = -\frac{1}{2} \implies \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

□

MaTEXTRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 7(c)

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

$$(\operatorname{sen} x - 1)^2 = \cos^2 x$$

$$\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x + 1 = \cos^2 x$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x = 0$$

$$2 \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) = 0 \implies \begin{cases} \operatorname{sen} x = 1 \\ \operatorname{sen} x = 0 \end{cases}$$

$$\blacksquare \operatorname{sen} x = 1 \implies x = \boxed{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\blacksquare \operatorname{sen} x = 0 \implies \begin{cases} x = \boxed{0 + 2k\pi} \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

La que no tiene recuadro no cumple la ecuación inicial. Comprobarlo.

□



MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 7(d)

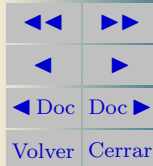
$$\operatorname{sen}^2 x + \cos x + 1 = 0$$

$$1 - \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \implies \begin{cases} \cos x = 2 \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

- $\cos x = 2$ no tiene solución pues $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $\cos x = -1 \implies x = \boxed{\pi + 2k\pi}$

□

MaTEXTRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 7(e)

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$$

$$(\operatorname{sen} x - \sqrt{2})^2 = \cos^2 x$$

$$\operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x + 2 = \cos^2 x$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x + 1 = 0 \implies \left\{ \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \right.$$

$$\blacksquare \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \begin{cases} x = \boxed{\frac{\pi}{4} + 2k\pi} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

La que no tiene recuadro no cumple la ecuación inicial. Comprobarlo.

□



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II



Ejercicio 7(f)

$$\operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} 4x = 0$$

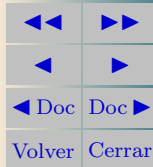
$$\operatorname{sen} 2x - 4 \operatorname{sen} 2x \cos 2x = 0$$

$$\operatorname{sen} 2x(1 - 2 \cos 2x) = 0 \implies \begin{cases} \operatorname{sen} 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\blacksquare \operatorname{sen} 2x = 0 \implies \left\{ x = \boxed{0 + \frac{k\pi}{2}} \right.$$

$$\blacksquare \cos 2x = \frac{1}{2} \implies \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \implies \begin{cases} x = \boxed{\frac{\pi}{6} + k\pi} \\ x = \boxed{\frac{5\pi}{6} + k\pi} \end{cases}$$

□

MaTEXTRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 7(g)

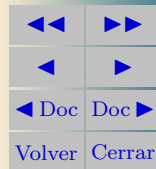
$$2 \operatorname{sen}(\alpha - 30^\circ) = -1$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - 30^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha - 30^\circ = 210^\circ + 2k\pi \quad 330^\circ + 2k\pi$$

$$\alpha = \boxed{240^\circ + 2k\pi} \quad \boxed{330^\circ + 2k\pi}$$

□

*MaTEX*TRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 7(h)

$$\operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{cosec} \alpha = \tan \alpha + \sec \alpha$$

$$2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$2 \cos \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha + 1}{\cos \alpha}$$

$$2 \cos^2 \alpha = \operatorname{sen} \alpha + 1$$

$$2(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \operatorname{sen} \alpha + 1$$

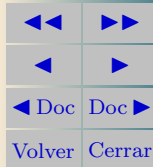
$$2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen} \alpha - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \\ \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \boxed{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}$$

□



MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II

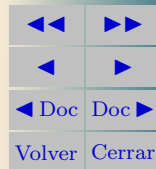
Ejercicio 8(a)

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \triangleleft \cos 2\alpha$$

$$= \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \triangleleft \text{for. fundamental}$$

$$= 2 \tan^2 \alpha$$

□

MaTEXTRIGONO-
METRÍA II

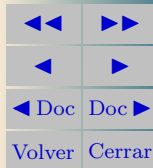
Ejercicio 8(b)

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} &= \frac{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} &< \cos 2\alpha \\ &= \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} &< \text{for. fundamental} \\ &= 2 \end{aligned}$$

□



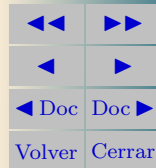
MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 8(c)

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} &= \frac{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} &< \cos 2\alpha \\ &= \frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} &< \text{for. fundamental} \\ &= 2 \end{aligned}$$

□

*MaTEX*TRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 8(d)

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} \quad \triangleleft \cos 2\alpha$$

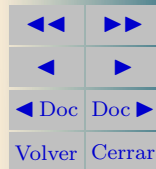
$$= \frac{(\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} \quad \triangleleft \text{dif. cuadrados}$$

$$= \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha$$

□

*MaTEX*

TRIGONO-
METRÍA II



Ejercicio 9(a) Sumando las expresiones:

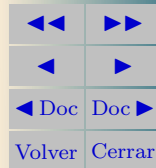
$$\sin(45 + \beta) = \sin 45 \cos \beta + \cos 45 \sin \beta$$

$$\cos(45 + \beta) = \cos 45 \cos \beta - \sin 45 \sin \beta$$

se obtiene

$$\sin(45 + \beta) + \cos(45 + \beta) = \sqrt{2} \cos \beta$$

□

*MaTEX*TRIGONO-
METRÍA II

Ejercicio 9(b) Sumando las expresiones:

$$\sin(30 + \beta) = \sin 30 \cos \beta + \cos 30 \sin \beta$$

$$= \frac{1}{2} \cos \beta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta$$

$$\cos(60 + \beta) = \cos 60 \cos \beta - \sin 60 \sin \beta$$

$$= \frac{1}{2} \cos \beta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta$$

se obtiene

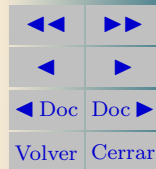
$$\sin(30 + \beta) + \cos(60 + \beta) = \cos \beta$$

□



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II



Ejercicio 9(c) Sumando las expresiones:

$$\sin(30 + x) = \sin 30 \cos x + \cos 30 \sin x$$

$$= \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

$$\sin(30 - x) = \sin 30 \cos x - \cos 30 \sin x$$

$$= \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

se obtiene

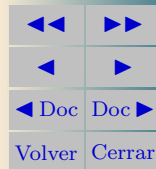
$$\sin(30 + x) + \sin(30 - x) = \cos x$$

□



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II



Ejercicio 9(d) Restando las expresiones:

$$\begin{aligned}\cos(30 + x) &= \cos 30 \cos x - \sin 30 \sin x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(30 - x) &= \cos 30 \cos x + \sin 30 \sin x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\end{aligned}$$

se obtiene

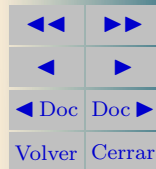
$$\cos(30 + x) - \cos(30 - x) = -\sin x$$

□



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II





Ejercicio 10. Quitamos denominadores:

$$\operatorname{sen} 3x \cos x - \cos 3x \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

En el miembro de la izquierda convertimos los productos en sumas

$$\operatorname{sen} 3x \cos x = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x)$$

$$\cos 3x \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x)$$

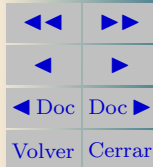
y restando se obtiene

$$\operatorname{sen} 3x \cos x - \cos 3x \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

Ejercicio 10

MaTeX

TRIGONO-
METRÍA II



Ejercicio 11. De la tangente del ángulo doble se tiene

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (\text{haciendo } \tan \alpha = a)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2a}{1 - a^2} \quad (\text{operando})$$

$$0 = 2a^2 + 6a - 2 \quad (\text{resolviendo})$$

$$a = \tan \alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \quad (\alpha \in 3^\circ \text{ cuadrante})$$

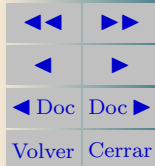
$$\tan \alpha = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

Ejercicio 11



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II



Ejercicio 12. Planteamos el problema como una ecuación. Sea α el ángulo buscado, entonces

$$\tan \alpha = \cot \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\tan^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \pm 1$$

$$\alpha = \boxed{45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ}$$

Ejercicio 12



MaTEX

TRIGONO-
METRÍA II

