Proyecto MaTEX

Integrales

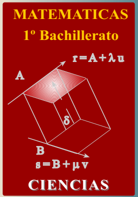
Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Tabla de Contenido

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

1. Primitiva de una función

Definición 1.1 *Sea f una función definida en el intervalo (a,b). Llamamos primitiva, integral indefinida o antiderivada de f a una función F en el intervalo (a,b) que cumple*

$$\boxed{F'(x) = f(x) \qquad \textit{para todo } x \in (a,b)} \tag{1}$$

- Hallar primitivas es el proceso inverso de hallar derivadas.
- La expresión **antiderivada** es muy intuitiva pero para el uso habitual del concepto se usa más frecuentemente **primitiva** o **integral indefinida**.

Ejemplo 1.1. Comprobar que $F(x) = x^3$ es una primitiva de $f(x) = 3x^2$

Solución: Comprobamos si $F'(x) = f(x)$. En efecto

$$F(x) = x^3 \Longrightarrow F'(x) = 3x^2 = f(x)$$

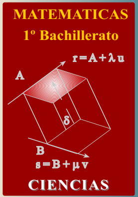
□

Ejemplo 1.2. Comprobar que $F(x) = x^3 + 1$ y $G(x) = x^3 + 5$ son primitivas de $f(x) = 3x^2$.

Solución: Comprobamos que $F'(x) = G'(x) = f(x)$. En efecto

$$\begin{array}{lcl} F(x) = x^3 + 1 & \Longrightarrow & F'(x) = 3\,x^2 = f(x) \\ G(x) = x^3 + 5 & \Longrightarrow & G'(x) = 3\,x^2 = f(x) \end{array}$$

□



Ejemplo 1.3. Comprobar que $F(x) = x^4$, $G(x) = x^4 + 5$ y $H(x) = x^4 - 3$ son primitivas de $f(x) = 4x^3$.

Solución: Comprobamos que $F'(x) = G'(x) = H'(x) = f(x)$. En efecto

$$\begin{array}{rcl} F(x) = x^4 & \Longrightarrow & F'(x) = 4x^3 = f(x) \\ G(x) = x^4 + 5 & \Longrightarrow & G'(x) = 4x^3 = f(x) \\ H(x) = x^4 - 3 & \Longrightarrow & H'(x) = 4x^3 = f(x) \end{array}$$

$\square$

Estos ejemplos nos muestran que una función puede tener más de una primitiva. En realidad tiene infinitas. Nos preguntamos ¿qué relación hay entre ellas?. La respuesta nos la da el siguiente teorema

Teorema 1.1. Sean $F(x)$ y $G(x)$ dos primitivas de la función $f(x)$ entonces existe una constante C con

$$F(x) = G(x) + C \tag{2}$$

Demostración: Definimos la función $H(x) = F(x) - G(x)$. Se tiene que

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

como $H'(x) = 0$, la función $H(x)$ es una constante C. Luego

$$F(x) - G(x) = C$$

y por tanto

$$F(x) = G(x) + C$$

$\square$

1.1. Notación de la integral indefinida

La notación utilizada para referirnos a la primitiva o integral indefinida de una función f se debe a Leibniz. Siendo f una función de x, escribimos la primitiva de f como

$$\int f(x)dx$$

y representa la función cuya derivada es $f(x)$. Fijarse en los detalles

- $f(x)$ es el *integrando*
- el símbolo dx es la *diferencial* de x, y
- x es la variable de *integración*.

Puesto que una primitiva F de f en la variable x se va a expresar $F(x) = \int f(x)dx$, se tiene

$$F'(x) = f(x) \Longrightarrow \frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

Test. La derivada de la función $F(x) = \int (1+x^2)dx$ es

(a) $1+x^2$ (b) 0

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

1.2. Propiedades de integración

- **Homogeneidad**

Teorema 1.2. (Homogeneidad) Para una función $f(x)$ y una constante $c \in R$ se tiene,

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \tag{3}$$

Demostración: Derivando la ecuación (3). Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int cf(x)dx &= cf(x) \\ \frac{d}{dx}c\int f(x)dx &= c\frac{d}{dx}\int f(x)dx = cf(x) \end{aligned}$$

$\square$

- **Aditividad**

Teorema 1.3. (Aditividad) Para las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se tiene,

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \tag{4}$$

Demostración: Es inmediata de la derivada de la suma de dos funciones, que es la suma de las derivadas. $\square$

• Regla de la potencia

Teorema 1.4. (Regla de la potencia) Sea $a \in R$ cualquier número real distinto de -1,

$$\boxed{\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \qquad a \neq -1} \tag{5}$$

Ejemplo 1.4. Calcular las integrales.

a) $\displaystyle\int x^3 dx$ *b)* $\displaystyle\int 5x^6 dx$ *c)* $\displaystyle\int x^{-2} dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3} + C$

b) $\displaystyle\int 5\,x^6 dx = 5\int x^6 dx = 5\frac{x^{6+1}}{6+1} = 5\frac{x^7}{7} + C$

c) $\displaystyle\int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = -\frac{x^{-4}}{4} + C$

□

Ejercicio 1. Calcular las integrales.

a) $\displaystyle\int x^2 dx$ *b)* $\displaystyle\int 7x^4 dx$ *c)* $\displaystyle\int x^{-2} dx$

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 2. Calcular las integrales.

a) $\displaystyle\int x^{-5/2}dx$ *b)* $\displaystyle\int 6\sqrt[4]{x^5}dx$ *c)* $\displaystyle\int (3x^{-5}+8x^{10})dx$

2. Integrales Básicas

Integrales Básicas			
$\int \operatorname{sen} x\, dx$	$-\cos x + C$	$\int \cos x\, dx$	$\operatorname{sen} x + C$
$\int (1+\tan^2 x)\, dx$	$\tan x + C$	$\int \sec^2 x\, dx$	$\tan x + C$
$\int e^x\, dx$	$e^x + C$	$\int a^x\, dx$	$\dfrac{1}{\ln a}a^x + C$
$\int \dfrac{1}{x}\, dx$	$\ln x + C$	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\, dx$	$\arctan x + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$	$\operatorname{arc\,sen} x + C$	$\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$	$\arccos x + C$

Es relativamente fácil aprenderse las primitivas básicas si se sabe derivar con cierta fluidez.

◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

• Ejercicios para practicar

Ejercicio 3. Calcular las integrales.

a) $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x + e^x)\,dx$

b) $\displaystyle\int (e^{3x} + 2^x)\,dx$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x} + \frac{3}{x+1}\right) dx$

d) $\displaystyle\int \left(\cos 2x + \frac{3}{2x+5}\right) dx$

Ejercicio 4. Calcular las integrales.

a) $\displaystyle\int (\frac{1}{x+5} + \frac{1}{2\sqrt{x}})dx$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2x+5} + \operatorname{sen} 2x\right) dx$

c) $\displaystyle\int \left(e^{2x+5} + 5^{3x-1}\right) dx$

d) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{1-x} + 3\,\cos(2x)\right) dx$

Ejercicio 5. Calcular las integrales.

a) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \sec^2(3x)\right) dx$

b) $\displaystyle\int \left(e^{2x+1} - 5\,\operatorname{sen}(3x)\right) dx$

c) $\displaystyle\int \left(2^{5x+1} - 3\,\cos(8x)\right) dx$

3. Métodos de Integración

3.1. Integrales Racionales

Denominamos integral racional a las integrales de las funciones racionales del tipo

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\, dx$$

donde $N(x)$ y $D(x)$ son polinomios. Para el nivel de este curso solo consideramos los casos en que el denominador sea un polinomio de grado 1 o bien un polinomio de grado 2. Los casos inmediatos son:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + C$$

todos los demás casos se reducen en la práctica a estos, es decir la primitiva será con pequeñas variantes una suma de logaritmos y arcotangente.

MATEMATICAS 1º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
INTEGRALES
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

- **Denominador de grado 1**

Si el numerador $N(x)$ es un número todas la primitivas corresponden a un logaritmo. En efecto:

$$\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(2x+1)+C$$

$$\int \frac{7}{3x+5}\,dx = \frac{7}{3}\int \frac{3}{3x+5}\,dx = \frac{7}{3}\ln(3x+5)+C$$

El caso general es sencillo $\displaystyle\int \frac{c}{a\,x+b}\,dx = \frac{c}{a}\ln(a\,x+b)+C$ Si el numerador es de grado igual o mayor que el denominador, se divide

Ejemplo 3.1. Hallar $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$

Solución: Como $Gra(x^2) \geq Gra(x+1)$ se divide:

$$\frac{x^2}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx &= \int (x-1)\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1) + C\end{aligned}$$

$\square$

- **Denominador de grado 2 con raíces**

  En este caso se utiliza la descomposición en fracciones simples.

Ejemplo 3.2. Hallar $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$

Solución:
Se descompone en fracciones simples, es decir

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

$$\boxed{\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}} \Longrightarrow \frac{2}{x^2-1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

Se quitan denominadores y se tiene que cumplir la identidad

$$2=A(x+1)+B(x-1)$$

Se dan valores a x. Las raíces de los factores facilitan el cálculo

- Para $x=1 \Longrightarrow 2=2A \Longrightarrow A=1$
- Para $x=-1 \Longrightarrow 2=-2B \Longrightarrow B=-1$

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2-1}\,dx &= \int \frac{1}{x-1}\,dx+\int\frac{-1}{x+1}\,dx\\ &= \ln(x-1)-\ln(x+1)+C\end{aligned}$$

$\square$

◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 3.3. Hallar $\displaystyle\int \frac{8x}{x^2-4}\,dx$

Solución:
Se descompone en fracciones simples, es decir

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

$$\boxed{\frac{8x}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}} \Longrightarrow \frac{8x}{x^2-4} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4}$$

Se quitan denominadores y se tiene que cumplir la identidad

$$8x = A(x+2) + B(x-2)$$

Se dan valores a x. Las raíces de los factores facilitan el cálculo

- Para $x = 2 \Longrightarrow 16 = 4A \Longrightarrow A = 4$
- Para $x = -2 \Longrightarrow -16 = -4B \Longrightarrow B = 4$

$$\begin{aligned}\int \frac{8x}{x^2-4}\,dx &= \int \frac{4}{x-2}\,dx + \int \frac{4}{x+2}\,dx \\ &= 4\ln(x-2) + 4\ln(x+2) + C\end{aligned}$$

□

Ejercicio 6. Calcular las integrales.

$$a)\ \int \frac{x^2+1}{x+2}\,dx$$

$$b)\ \int \frac{x^3+x+2}{x+3}\,dx$$

$$c)\ \int \frac{x^2+5\,x+1}{x+1}\,dx$$

Ejercicio 7. Calcular las integrales.

$$a)\ \int \frac{3}{1+x^2}\,dx$$

$$b)\ \int \frac{2x+1}{1+x^2}\,dx$$

$$c)\ \int \frac{3x-5}{1+x^2}\,dx$$

$$d)\ \int \frac{x-7}{1+x^2}\,dx$$

Ejercicio 8. Hallar $\displaystyle\int \frac{8x-21}{x^2-5x+6}\,dx$

Ejercicio 9. Hallar $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-x}\,dx$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

3.2. Cambio de variable

Consiste en sustituir una parte del integrando por otra variable para lograr que la nueva integral sea más sencilla.
Consideremos la integral

$$\int (2x+3)^3\,dx$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{Efectuamos el cambio de variable} & t & = & 2x+3 \\ \text{y derivamos} & 1\,dt & = & 2\,dx \end{array}$$

La técnica consiste en sustituir la variable x por la variable t y la dx por la dt. Ya que

$$dt = 2\,dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{2}dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned} \int (2x+3)^3\,dx &= \int t^3\,\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^3\,dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{4}t^4 = \frac{1}{8}t^4 + C \\ &= \frac{1}{8}(2x+3)^4 + C \end{aligned}$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 3.4. Calcular por cambio de variable

$$\int \sqrt{3x-1}\,dx$$

Solución:
Con una raíz cuadrada es frecuente igualar el radicando a t^2. Así pues,

$$3x-1 = t^2$$

$$3\,dx = 2\,t\,dt \Longrightarrow dx = \frac{2}{3}\,t\,dt$$

La técnica consiste en sustituir la variable x en función de la variable t y la dx por la dt.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{3x-1}\,dx &= \int \sqrt{t^2}\,\frac{2}{3}\,t\,dt \\
&= \frac{2}{3}\int t^2\,dt \\
&= \frac{2}{3}\frac{1}{3}t^3 = \frac{2}{9}t^3 + C \\
&= \frac{2}{9}(\sqrt{3x-1})^3 + C
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 3.5. Calcular por cambio de variable $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$

Solución: Efectuamos el cambio de variable $e^x = t$
Ya que

$$e^x\, dx = dt \Longrightarrow dx = \frac{1}{t}\, dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx &= \int \frac{1}{t + t^{-1}}\, \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{1}{t^2 + 1}\, dt \\ &= \arctan t + C = \arctan e^x + C\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 3.6. Calcular por cambio de variable $\displaystyle\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$

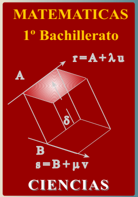
Solución: Efectuamos el cambio de variable $e^x = t$

$$e^x\, dx = dt \Longrightarrow dx = \frac{1}{t}\, dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx &= \int \frac{t}{1 + t^2}\, \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{1}{1 + t^2}\, dt \\ &= \arctan t + C = \arctan e^x + C\end{aligned}$$

$\square$



MaTEX

INTEGRALES

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

• Ejercicios de cambios de variable

Ejercicio 10. Calcular por cambio de variable $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

Ejercicio 11. Calcular $\displaystyle\int x\,\sqrt{x+2}\,dx$

Ejercicio 12. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$

Ejercicio 13. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}\,dx$

Ejercicio 14. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}}\,dx$

Ejercicio 15. Calcular $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^{x}}{1+e^{2x}}\,dx$

Ejercicio 16. Calcular $\displaystyle\int e^{x}\sqrt{1-e^{x}}\,dx$

Ejercicio 17. Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

3.3. Integración por Partes

Sean dos funciones en x, $u(x)$ y $v(x)$ si designamos

$$du = \frac{1}{dx} u(x) \quad dv = \frac{1}{dx} v(x)$$

Por la derivada de un producto se tiene

$$\frac{d}{dx}(u\, v) = v\, du + u\, dv$$

ahora, integrando la expresión anterior

$$\int \frac{d}{dx}(u\, v) = \int v\, du + \int u\, dv$$

como $\displaystyle\int \frac{d}{dx}(u\, v) = u\, v$ y despejando uno de los sumandos de la expresión anterior se obtiene

$$\boxed{\int u\, dv = u\, v - \int v\, du} \tag{6}$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 3.7. Calcular por partes

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx$$

Solución:

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = x & dv = \operatorname{sen} x \, dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} x \, dx &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.8. Calcular por partes

$$\int \ln x \, dx$$

Solución:

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{x} \, dx & v = x \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - \ln x + C \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.9. Calcular por partes

$$\int x\, e^x\, dx$$

Solución:

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = x & dv = e^x\, dx \\ du = dx & v = e^x \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int x\, e^x\, dx &= x\, e^x - \int e^x\, dx \\ &= x\, e^x - e^x + C \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.10. Calcular por partes

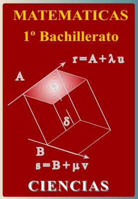
$$\int 4x^3\, \ln x\, dx$$

Solución:

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = \ln x & dv = 4x^3\, dx \\ du = \dfrac{1}{x}\, dx & v = x^4 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int 4x^3\, \ln x\, dx &= x^4\, \ln x - \int x^4 \frac{1}{x}\, dx \\ &= x^4\, \ln x - \frac{1}{4} x^4 + C \end{aligned}$$

□



Ejemplo 3.11. Calcular por partes

$$\int x^2\, e^x\, dx$$

Solución:

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = x^2 & dv = e^x\, dx \\ du = 2\, x\, dx & v = e^x \end{array}}$$

$$\int x^2\, e^x\, dx \quad = x^2\, e^x - 2 \underbrace{\int x\, e^x\, dx}_{I_1}$$

Ahora calculamos de nuevo por partes la integral, I_1

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = x & dv = e^x\, dx \\ du = dx & v = e^x \end{array}}$$

$$\begin{aligned} I_1 \quad &= x\, e^x - \int e^x\, dx \\ &= x\, e^x - e^x \end{aligned}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2\, e^x - 2(x\, e^x - e^x) + C$$

□

Ejercicio 18. Calcular las integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{1 - x^3}{x^2} dx$ *b*) $\displaystyle\int \frac{2 + x^2}{\sqrt{x}} dx$ *c*) $\displaystyle\int \frac{x - x^{3/2}}{\sqrt[5]{x}} dx$

Ejercicio 19. Calcular $\displaystyle\int \ln(x^2 + 1)\, dx$

Ejercicio 20. Calcular $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx$

Ejercicio 21. Dada la función $f(x) = e^x \operatorname{sen}(bx)$ donde $b \neq 0$ es una constante, calcular $\displaystyle\int f(x)\, dx$.

Ejercicio 22. Calcular $\displaystyle\int \cos(\ln x)\, dx$.

Ejercicio 23. Calcular la integral $C_n = \displaystyle\int x^2\, cos(nx)\, dx$ donde n es un número natural.

Ejercicio 24. Calcular $\displaystyle\int |1 - x|\, dx$

Ejercicio 25. Calcular $\displaystyle\int (3 - |x|)\, dx$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

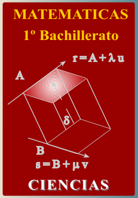
a) $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

b)

$$\begin{aligned} \int 7x^4 dx &= 7\int x^4 dx && \text{(prop. homog.)} \\ &= \frac{7}{5}x^5 + C && \text{(regla pot.)} \end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int x^{-2} dx = -x^{-1} + C$

Ejercicio 1



Ejercicio 2.

a) $\displaystyle\int x^{-5/2}dx = -\frac{2}{3}x^{-3/2} + C$

b) $\displaystyle\int 6\sqrt[4]{x^5}dx = 24x^{1/4} + C$

c)

$$\begin{aligned}\int (3x^{-5} + 8x^{10})dx &= \int 3x^{-5}dx + \int 8x^{10}dx && \triangleleft\text{(prop. aditi.)}\\ &= 3\int x^{-5}dx + 8\int x^{10}dx && \triangleleft\text{(prop. homog.)}\\ &= -\frac{3}{4}x^{-4} + \frac{8}{11}x^{11} && \triangleleft\text{(regla pot.)}\end{aligned}$$

Ejercicio 2

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 3.

a)

$$\begin{aligned}\int (\operatorname{sen} x + e^x)\, dx &= \int \operatorname{sen} x\, dx + \int e^x\, dx \\ &= -\cos x + e^x + C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int (e^{3x} + 2^x)\, dx &= \int e^{3x}\, dx + \int 2^x\, dx \\ &= \frac{1}{3}\, e^{3x} - \frac{1}{\ln 2}\, 2^x + C\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{3}{x} + \frac{3}{x+1}\right) dx &= 3\int \frac{1}{x} dx + 3\int \frac{3}{x+1} dx \\ &= 3\ln x + 3\ln(x+1) + C\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\int \left(\cos\, 2x + \frac{3}{2x+5}\right) dx &= \int \cos\, 2x\, dx + 3\int \frac{3}{2x+5}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\, x + \frac{3}{2}\, \ln(2x+5) + C\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Ejercicio 4.

a)

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{x+5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx &= \int \frac{1}{x+5}dx+\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\\ &= \ln(x+5)+\sqrt{x}+C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{2x+5}+\operatorname{sen} 2x\right)dx &= \int \frac{1}{2x+5}dx+\int \operatorname{sen} 2x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\ln(2x+5)-\frac{1}{2}\cos 2x+C\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int \left(e^{2x+5}+5^{3x-1}\right)dx &= \int e^{2x+5}dx+\int 5^{3x-1}dx\\ &= \frac{1}{2}e^{2x+5}-\frac{1}{3\ln 5}5^{3x-1}+C\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{2}{1-x}+3\cos(2x)\right)dx &= \int \frac{2}{1-x}dx+3\int \cos(2x)dx\\ &= -2\ln(1-x)+\frac{3}{2}\operatorname{sen}(2x)+C\end{aligned}$$

Ejercicio 4

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 5.

a)

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \sec^2(3x)\right) dx &= 3\int \frac{1}{1+x^2}dx - \int \sec^2(3x)dx \\ &= 3\arctan x - \frac{1}{3}\,\tan(3x) + C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \left(e^{2x+1} - 5\,\operatorname{sen}(3x)\right) dx &= \int e^{2x+1}dx - 5\int \operatorname{sen}(3x)dx \\ &= \frac{1}{2}\,e^{2x+1} + \frac{5}{3}\,\cos(3x) + C\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int \left(2^{5x+1} - 3\,\cos(8x)\right) dx &= \int 2^{5x+1}dx - 3\int \cos(8x)dx \\ &= \frac{1}{5\,\ln 2}\,2^{5x+1} - \frac{3}{8}\,\operatorname{sen}(8x) + C\end{aligned}$$

Ejercicio 5

Ejercicio 6.

a) Como el grado del numerador es $\geq$ que el denominador se divide:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x+2}\,dx &= \int (x-2)\,dx + \int \frac{5}{x+2}\,dx \\ &= 1/2\,x^2 - 2\,x + 5\,\ln(x+2) + C\end{aligned}$$

b) Como el grado del numerador es $\geq$ que el denominador se divide:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x+2}{x+3}\,dx &= \int (x^2-3x+10)\,dx - \int \frac{28}{x+3}\,dx \\ &= 1/3\,x^3 - 3/2\,x^2 + 10\,x - 28\,\ln(x+3) + C\end{aligned}$$

c) Como el grado del numerador es $\geq$ que el denominador se divide:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+5\,x+1}{x+1}dx &= \int (x+4)dx - \int \frac{3}{x+1} \\ &= 1/2\,x^2 + 4\,x - 3\,\ln(x+1) + C\end{aligned}$$

Ejercicio 6

Ejercicio 7.

a) Es del tipo arcotangente:

$$\int \frac{3}{1+x^2}\,dx = 3\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = 3\arctan x + C$$

b) Se separa en dos sumandos:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \ln(1+x^2) + \arctan x + C\end{aligned}$$

c) Se separa en dos sumandos:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-5}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{3x}{1+x^2}\,dx - 5\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= 3/2\ln(1+x^2) - 5\,\arctan x + C\end{aligned}$$

d) Se separa en dos sumandos:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-7}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{x}{1+x^2}\,dx - 7\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= 1/2\ln(1+x^2) - 7\,\arctan x + C\end{aligned}$$

Ejercicio 7

Ejercicio 8.
Como

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

se descompone en fracciones simples:

$$\frac{8x-21}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \Longrightarrow \frac{8x-21}{x^2-5x+6} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{x^2-5x+6}$$

Se tiene que cumplir la identidad $8x - 21 = A(x-3) + B(x-2)$

- Para $x = 2 \Longrightarrow -5 = -A \Longrightarrow A = 5$
- Para $x = 3 \Longrightarrow 3 = B \Longrightarrow B = 3$

$$\begin{aligned} \int \frac{8x-21}{x^2-5x+6}\,dx &= 5\int \frac{1}{x-2}\,dx + 3\int \frac{1}{x-3}\,dx \\ &= 5\ln(x-2) + 3\ln(x-3) + C \end{aligned}$$

Ejercicio 8

Ejercicio 9.
Como

$$x^2 - x = x(x-1)$$

se descompone en fracciones simples:

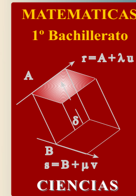
$$\frac{3x-1}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Longrightarrow \frac{3x-1}{x^2-x} = \frac{A(x-1)+B(x)}{x^2-x}$$

Se tiene que cumplir la identidad $3x - 1 = A(x-1) + B(x)$

- Para $x = 0 \Longrightarrow 1 = -A \Longrightarrow A = -1$
- Para $x = 1 \Longrightarrow 2 = B \Longrightarrow B = 2$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x^2-x}\,dx &= -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx \\ &= -\ln(x) + 2\ln(x-1) + C \end{aligned}$$

Ejercicio 9



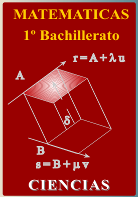
MaTEX
INTEGRALES
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 10. Efectuamos el cambio de variable

$$x = t^6 \Longrightarrow dx = 6\, t^5\, dt$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\, dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6}}\, 6\, t^5\, dt \\
&= 6 \int \frac{t^5}{t^3 + t^2}\, dt = 6 \int \frac{t^3}{t+1}\, dt \\
&= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
&= 6 \left(\frac{1}{3}\, t^3 - \frac{1}{2}\, t^2 + t - \ln(t+1) \right) + C \\
&= 2\, \sqrt[6]{x^3} - 3\, \sqrt[6]{x^2} + 6 \sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 10



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 11. Efectuamos el cambio de variable

$$x + 2 = t^2 \Longrightarrow dx = 2\,t\,dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x+2}\,dx &= \int (t^2-2)\,t\ 2\,t\,dt \\
&= 2\int t^4\,dt - 4\int t^2\,dt \\
&= \frac{2}{5}\,t^5 - \frac{4}{3}\,t^3 + C \\
&= \frac{2}{5}\,(\sqrt{x+2})^5 - \frac{4}{3}\,(\sqrt{x+2})^3 + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 11

Ejercicio 12. Efectuamos el cambio de variable

$$x = t^2 \Longrightarrow dx = 2\,t\,dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{1}{(1+t^2)\,t}\,2\,t\ dt \\
&= 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 12

Ejercicio 13. Efectuamos el cambio de variable

$$1 + \tan x = t^2 \Longrightarrow \sec^2 x\, dx = 2\, t\, dt \Longrightarrow dx = \cos^2 x\, 2\, t\, dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}}\, dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x\, t}\, \cos^2 x\, 2\, t\, dt \\
&= 2 \int dt \\
&= 2\, t + C = 2\sqrt{1 + \tan x} + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 13

Ejercicio 14. Efectuamos el cambio de variable

$$1 - \ln x = t^2 \Longrightarrow -\frac{1}{x}\, dx = 2\, t\, dt \Longrightarrow dx = -\, 2\, x\, t\, dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}}\, dx &= -\int \frac{1}{x\, t}\, 2\, x\, t\, dt \\
&= -2 \int dt \\
&= -2\, t + C = 2\sqrt{1-\ln x} + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 14

Ejercicio 15. Efectuamos el cambio de variable

$$e^x = t \Longrightarrow e^x\, dx = dt \Longrightarrow dx = \frac{1}{t}\, dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3x} - e^x}{1 + e^{2x}}\, dx &= \int \frac{t^3 - t}{1 + t^2}\, \frac{1}{t}\, dt \\ &= \int \frac{t^2 - 1}{1 + t^2}\, dt \qquad \triangleleft\, (dividiendo) \\ &= \int (1 - \frac{2}{1 + t^2})\, dt \\ &= t - 2 \arctan t + C \\ &= e^x - 2 \arctan e^x + C \end{aligned}$$

Ejercicio 15

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 16. Efectuamos el cambio de variable

$$1 - e^x = t^2 \Longrightarrow -e^x\,dx = 2\,t\,dt \Longrightarrow dx = -\frac{2t}{e^x}\,dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned}
\int e^x\sqrt{1-e^x}\,dx &= -\int (1-t^2)\,t\,\frac{2t}{1-t^2}\,dt \\
&= -\int 2\,t^2\,dt \\
&= -\frac{2}{3}t^3 \\
&= -\frac{2}{3}(\sqrt{1-e^x})^3 + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 16

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 17. Efectuamos el cambio de variable

$$\ln x = t \Longrightarrow \frac{1}{x}\,dx = dt \Longrightarrow dx = x\,dt$$

la integral buscada queda

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx &= \int \frac{\operatorname{sen}(t)}{x}\,x\,dt \\
&= \int \operatorname{sen} t\,dt \\
&= -\cos t \\
&= -\cos(\ln x) + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 17

Ejercicio 18.

a)

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x^3}{x^2}dx &= \int x^{-2}dx - \int x dx && \triangleleft\text{(dividiendo)} \\ &= -x^{-1} - \frac{1}{2}x^2 + C && \triangleleft\text{(regla pot.)} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int \frac{2+x^2}{\sqrt{x}}dx &= \int 2x^{-1/2}dx + \int x^{3/2}dx && \triangleleft\text{(dividiendo)} \\ &= 4x^{1/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + C && \triangleleft\text{(regla pot.)} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int \frac{x-x^{3/2}}{\sqrt[5]{x}}dx &= \int x^{4/5}dx - \int x^{13/10}dx && \triangleleft\text{(dividiendo)} \\ &= \frac{5}{9}x^{9/5} - \frac{10}{23}x^{23/10} + C && \triangleleft\text{(regla pot.)} \end{aligned}$$

Ejercicio 18

Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 19. Sea $I = \displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = \ln(x^2+1) & dv = dx \\ du = \dfrac{2x}{x^2+1}\,dx & v = x \end{array}} \qquad I = x\,\ln(x^2+1) - 2\underbrace{\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx}_{I_1}$$

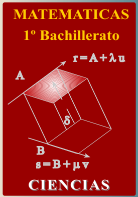
Ahora calculamos la integral racional , I_1

$$I_1 = \int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - \arctan x$$

Ahora sustituyendo I_1 en I:

$$I = x\,\ln(x^2+1) - 2(x - \arctan x) + C$$

Ejercicio 19



MaTEX
INTEGRALES
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 20. Sea $I = \displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x \, dx$

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = \operatorname{arc\,sen} x & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx & v = x \end{array}}$$

$$I = x \operatorname{arc\,sen} x - \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx}_{I_1}$$

Ahora calculamos la integral, I_1

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sqrt{1-x^2}$$

sustituyendo I_1 en I:

$$I = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Ejercicio 20

Ejercicio 21. Siendo $I = \int e^x \operatorname{sen}(bx)$

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = \operatorname{sen} bx & dv = e^x\, dx \\ du = b \cos bx\, dx & v = e^x \end{array}} \qquad I = e^x \operatorname{sen} bx - b \underbrace{\int e^x \cos bx\, dx}_{I_1}$$

Ahora calculamos la segunda integral

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = \cos bx & dv = e^x\, dx \\ du = -b \operatorname{sen} bx\, dx & v = e^x \end{array}} \qquad I_1 = e^x \cos bx + b \int e^x \operatorname{sen} bx\, dx$$

Sustituyendo se obtiene:

$$I = e^x \operatorname{sen} bx - b\,(e^x \cos bx + b\, I)$$

$$(1 + b^2)I = e^x \operatorname{sen} bx - b\, e^x \cos bx \Longrightarrow$$

$$\int e^x \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{e^x \operatorname{sen} bx - b\, e^x \cos bx}{1 + b^2}$$

Ejercicio 21

Ejercicio 22. Siendo $I = \int \cos(\ln x)\, dx$

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = \cos(\ln x) & dv = dx \\ du = -\dfrac{1}{x}\,\operatorname{sen}(\ln x)\, dx & v = x \end{array}} \qquad I = x\,\cos(\ln x) + \underbrace{\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx}_{I_1}$$

Ahora calculamos la segunda integral

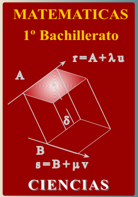
$$\boxed{\begin{array}{cc} u = \operatorname{sen}(\ln x) & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{x}\,\cos(\ln x)\, dx & v = x \end{array}} \qquad I_1 = x\,\operatorname{sen}(\ln x) - \underbrace{\int \cos(\ln x)\, dx}_{I}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$I = x\,\cos(\ln x) + (x\,\operatorname{sen}(\ln x) - I)$$

$$I = \frac{x\,\cos(\ln x) + x\,\operatorname{sen}(\ln x)}{2} + C$$

Ejercicio 22



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 23. Siendo $C_n = \int x^2 \cos(nx)\, dx$

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = x^2 & dv = \cos(nx)\, dx \\ du = 2\, x\, dx & v = \dfrac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \end{array}}$$

$$C_n = x^2 \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) - \frac{2}{n} \underbrace{\int x \operatorname{sen}(nx)\, dx}_{S_n}$$

Ahora calculamos la segunda integral

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = x & dv = \operatorname{sen}(nx)\, dx \\ du = dx & v = -\dfrac{1}{n} \cos(nx) \end{array}}$$

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n} \int \cos(nx)\, dx \\ &= -\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) \end{aligned}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$C_n = x^2 \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) - \frac{2}{n}\left(-\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx)\right)$$

$$C_n = \frac{1}{n} x^2 \operatorname{sen}(nx) + \frac{2x}{n^2} \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \operatorname{sen} nx + C$$

Ejercicio 23

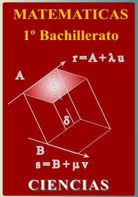
Ejercicio 24. Siendo

$$f(x) = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x & x \leq 1 \\ x - 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

hallaremos la primitiva para cada rama de f La integral buscada queda

$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int (1 - x)\,dx = x - \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\ \displaystyle\int (x - 1)\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C_2 \end{cases}$$

Ejercicio 24



Ejercicio 25. Siendo

$$f(x) = 3 - |x| = \left\{ \begin{array}{ll} 3 + x & x \leq 0 \\ 3 - x & 0 \leq x \end{array} \right.$$

hallaremos la primitiva para cada rama de f La integral buscada queda

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int (3 + x)\,dx = 3\,x + \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\ \displaystyle\int (3 - x)\,dx = 3\,x - \frac{1}{2}x^2 + C_2 \end{array} \right.$$

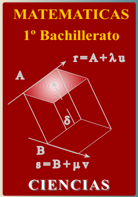
Ejercicio 25

Soluciones a los Tests

Solución al Test: En efecto

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int (1 + x^2) dx = (1 + x^2)$$

Final del Test



MaTEX

INTEGRALES

Índice alfabético