

# Proyecto MaTeX

## Derivadas

Fco Javier González Ortiz

### Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

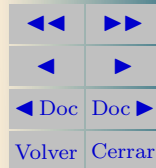
© 2004 [javier.gonzalez@unican.es](mailto:javier.gonzalez@unican.es)  
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

DERIVADAS



# Tabla de Contenido

## 1. Introducción

### 1.1. Variación media

- Interpretación geométrica

### 1.2. Variación instantánea

### 1.3. El problema de la tangente

- Idea intuitiva de la reta tangente • Ecuación de la reta tangente

## 2. Definición de derivada en un punto

- Derivabilidad y continuidad • Derivadas laterales

## 3. Función Derivada

## 4. Reglas de Derivación

- Derivada de una constante • Derivada de la potencia • Regla de la suma • Regla del producto • Regla del cociente • Regla de la cadena

## 5. Derivadas de las funciones trascendentes

- Trigonómicas • Exponenciales • Logaritmos • Derivadas Logarítmicas

### 5.1. Regla de la inversa

- Derivadas de Arcos trigonométricos

## 6. Ejercicios

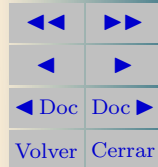
Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests



MaTEX

DERIVADAS





## 1. Introducción

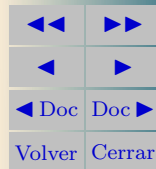
Los científicos de los últimos años del siglo XVII dedicaron gran parte de su tiempo y energía a resolver el problema de la tangente que tiene relación en cuestiones como las siguientes:

- En óptica, el ángulo con el que un rayo de luz incide en una superficie de una lente está definida en términos de la tangente a la superficie.
- En física, la dirección de un cuerpo en movimiento en un punto de su recorrido es la de la tangente en ese punto.
- En geometría, al ángulo entre dos curvas que intersecan es el ángulo entre las tangentes en el punto de intersección.
- ¿Cómo encontraremos la ecuación de la tangente? Usaremos el método ya desarrollado por Fermat en 1629.

El concepto de derivada es el fundamento del Cálculo. La definición de derivada puede abordarse de dos formas. Una es geométrica (como la pendiente de una curva) y la otra es física (como razón de cambio).

MaTeX

DERIVADAS



## 1.1. Variación media

La siguiente tabla da el precio en euros<sup>1</sup> de un producto en 8 años sucesivos

precio	10	18	24	28	30	30	28	24
año	0	1	2	3	4	5	6	7

Si llamamos  $P(x)$  a la función precio y  $x$  designa los años, podemos preguntar cuál es la variación o incremento del precio en el intervalo  $[0, 1]$ , y ésta sería

$$\Delta P = P(1) - P(0) = 18 - 10 = 8 \text{ euros.}$$

De forma análoga, la variación o incremento del precio en el intervalo  $[1, 3]$ , es

$$\Delta P = P(3) - P(1) = 28 - 18 = 10 \text{ euros}$$

Ahora bien, **la variación media** es el incremento por unidad de tiempo.

- La variación media del precio en el intervalo  $[0, 1]$  es

$$V.M. = \frac{P(1) - P(0)}{1 - 0} = \frac{18 - 10}{1} = 8 \text{ euros/año}$$

- La variación media del precio en el intervalo  $[1, 3]$  es

$$V.M. = \frac{P(3) - P(1)}{3 - 1} = \frac{28 - 18}{2} = 5 \text{ euros/año}$$

<sup>1</sup>Hemos cambiado los números para que sean más cómodos de usar



MaTEX

DERIVADAS



- La variación media del precio en el intervalo  $[3, 7]$ , es

$$V.M. = \frac{P(7) - P(3)}{7 - 3} = \frac{24 - 28}{4} = -1 \text{ euros/año}$$

que indica que el precio ha disminuido a razón de un euro por año.

De forma general definimos de la variación media para una función  $f(x)$  en un intervalo  $[a, b]$  como

Variación Media en  $[a, b]$

$$V.M. = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1)$$

En el intervalo  $[a, b]$  la VM representa gráficamente la pendiente del segmento que va desde el punto  $A(a, f(a))$  al punto  $B(b, f(b))$ .

En el gráfico siguiente se muestra como varía gráficamente la VM en distintos intervalos.



MaTeX

DERIVADAS





## • Interpretación geométrica

En  $[1, 3]$

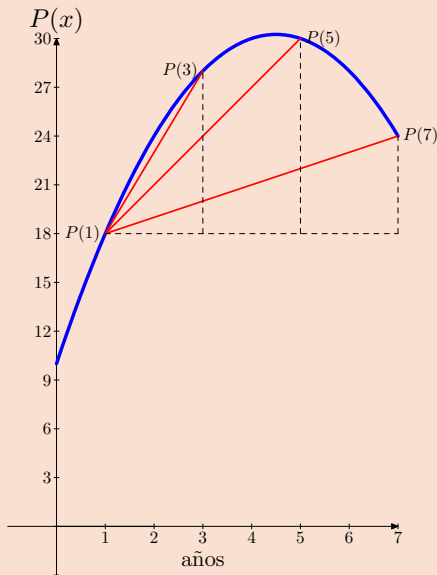
$$\begin{aligned} V.M. &= \frac{P(3) - P(1)}{3 - 1} \\ &= \frac{28 - 18}{2} = 5 \text{ euros/año} \end{aligned}$$

En  $[1, 5]$

$$\begin{aligned} V.M. &= \frac{P(5) - P(1)}{5 - 1} \\ &= \frac{30 - 18}{4} = 3 \text{ euros/año} \end{aligned}$$

En  $[1, 7]$

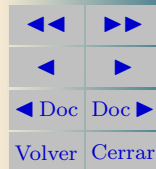
$$\begin{aligned} V.M. &= \frac{P(7) - P(1)}{7 - 1} \\ &= \frac{24 - 18}{6} = 1 \text{ euros/año} \end{aligned}$$



La *V.M.* representa la **pendiente** del segmento que une los puntos de la curva.

# MaTeX

## DERIVADAS





## 1.2. Variación instantánea

Como el intervalo  $[a, a+h]$  varía con  $h$ , si hacemos  $h$  cada vez más pequeño, es decir hacemos tender  $h$  a 0, obtenemos la **variación instantánea** VI.

Variación Instantánea en  $a$

$$V.I.(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

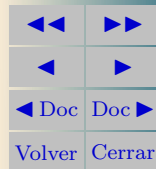
La expresión anterior es muy importante en matemáticas y se relaciona con el cálculo de la recta tangente de una función en un punto, como mostraremos a continuación.

En el ejemplo anterior de los precios, la *V.I.* significa la razón de cambio del precio en un instante de tiempo.

Gráficamente indica la pendiente de la tangente de una función en el punto  $(x, f(x))$ .

MaTEX

DERIVADAS



**Ejemplo 1.1.** Si  $P(x)$  es precio de un producto y  $x$  designa los años, siendo

$$P(x) = -x^2 + 9x + 10$$

hallar la *V.I.* en el año  $x = 1$  y en el año  $x = 7$

*Solución:* El precio en el año  $x = 1$  es  $P(1) = 18$  y la *V.I.* es

$$\begin{aligned} VI(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(1+h) - P(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+h)^2 + 9(1+h) + 10 - 18}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 7h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 7) = 7 \end{aligned}$$

es decir, en  $x = 1$  el precio está aumentando a razón de  $VI(1) = 7$  euros/año

$$\begin{aligned} VI(7) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(7+h) - P(7)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(7+h)^2 + 9(7+h) + 10 - 24}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h - 5) = -5 \end{aligned}$$

es decir, en  $x = 7$  el precio está disminuyendo a razón de  $VI(7) = -5$  euros/año  $\square$



MaTEX

DERIVADAS





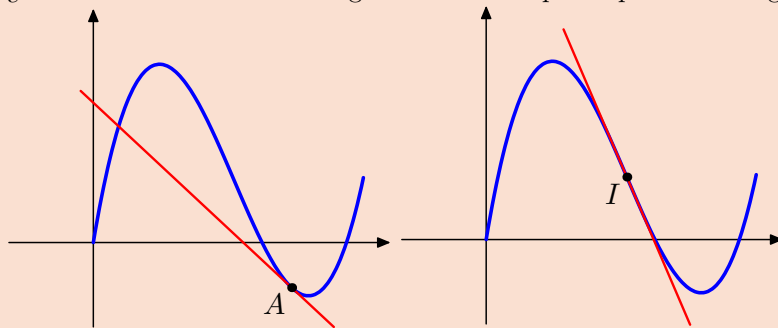
### 1.3. El problema de la tangente

#### • Idea intuitiva de la reta tangente

Se llama tangente a una curva en un punto, a la recta que pasa por el punto con la misma dirección que la curva.

¿Puede la recta tangente cortar a la curva en más de un punto?

¿Puede atravesar la recta tangente a la curva por el punto de tangencia?

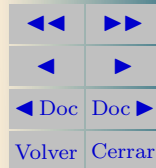


Las figuras muestran la respuesta afirmativa a ambas preguntas.

A continuación veremos como se determina la pendiente de la recta tangente.

MaTeX

DERIVADAS





## • Ecuación de la reta tangente

Dada una función  $y = f(x)$  y un punto  $A(a, f(a))$  del grafo de la función se trata de determinar la pendiente de la **recta tangente** al grafo de la función en el punto  $A$ . Consideremos la recta secante desde  $A$  a  $B$ . Siendo los puntos  $A(a, f(a))$  y  $B(a + h, f(a + h))$ ,

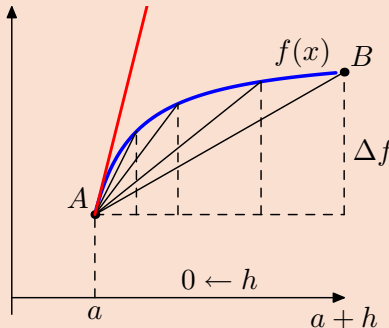
la secante  $AB$  tiene pendiente

$$m = \frac{\Delta f}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

A medida que  $h \rightarrow 0$ ,  $B \rightarrow A$ , y definimos la pendiente de la tangente  $m_{tan}$  como

$$m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Esta pendiente la escribiremos como  $f'(a)$  quedando la ecuación de la tangente de la forma



# MaTeX

# DERIVADAS

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad (3)$$



## 2. Definición de derivada en un punto

**Definición 2.1** Sea  $f$  una función y  $a \in \text{Dom}(f)$ . Definimos derivada de  $f$  en  $x = a$  al siguiente límite cuando existe y es finito

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (4)$$

Observaciones:

- Cuando dicho límite sea infinito se dice que la función no es derivable, aunque tiene derivada infinita. (Gráficamente significa que la recta tangente en ese punto es vertical).
- Para que la derivada exista, la función tiene que estar definida en un entorno del punto.
- Observar que la definición de derivada coincide con la definición de pendiente de la recta tangente y, con la definición de variación instantánea
- No olvidar que la derivada es un límite, aunque buscaremos reglas para calcular derivadas sin tener que hacer dicho límite.



MaTeX

DERIVADAS





**Ejemplo 2.1.** Hallar en  $x = 2$  la tangente a la curva  $f(x) = x^2$ .

*Solución:* El punto de la curva en  $x = 2 \implies f(2) = 2^2 = 4$ ,  $A(2, 4)$ . La pendiente de la tangente es

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4 \end{aligned}$$

Siendo la recta tangente

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

□

**Ejemplo 2.2.** Hallar en  $x = 1$  la tangente a la curva  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

*Solución:* El punto de la curva en  $x = 1 \implies f(1) = \frac{1}{1} = 1$ ,  $A(1, 1)$ . La pendiente de la tangente es

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(1+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{1+h} = -1 \end{aligned}$$

Siendo la recta tangente

$$y - 1 = -(x - 1)$$

□

MaTeX

DERIVADAS





**Ejercicio 1.** Hallar la pendiente de la tangente en  $x = 1$  de las funciones:

a)  $f(x) = 1 - 3x$

b)  $g(x) = 2 + 5x$

**Ejercicio 2.** El coste de extraer  $T$  toneladas de cobre de una mina es  $C(T)$  en miles de euros. A partir de los siguientes datos

$$C(10) = 200 \quad C(20) = 300 \quad C'(10) = 8$$

dar las unidades y explicar en palabras el significado de las siguientes expresiones:

a)  $C(20) - C(10)$

b)  $\frac{C(20) - C(10)}{20 - 10}$

c)  $C'(10) = 8$

En las páginas anteriores hemos obtenido la expresión

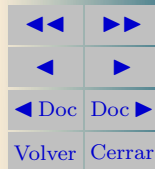
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

como definición de razón de cambio o de V.I. (variación instantánea) y como la pendiente de la recta tangente a una función. De una forma general la llamamos **derivada** de la función en el punto  $a$  y la denotamos por  $f'(a)$ .

A continuación estudiaremos la relación que hay entre una función que es continua en un punto y que tenga derivada en el mismo. Posteriormente con la definición anterior aprenderemos a calcular las derivadas de las funciones más habituales sin necesidad de realizar el límite.

MaTeX

DERIVADAS

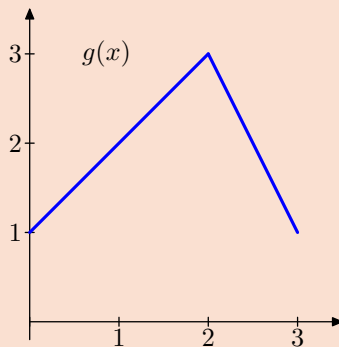
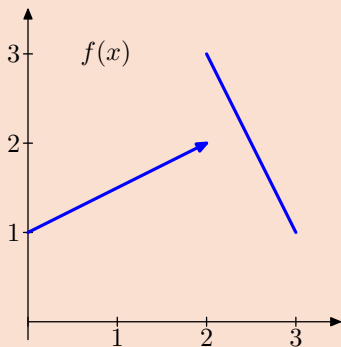




## • Derivabilidad y continuidad

En el capítulo anterior se estudió la continuidad de las funciones. La derivabilidad de una función es una propiedad más «fuerte» que la continuidad, ya que no todas las funciones continuas tienen tangente en un punto.

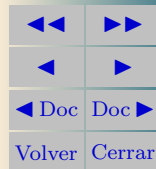
En la figura se representan dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ . En el punto  $x = 2$  dichas funciones no son derivables y no tienen tangente en dicho punto. En  $f(x)$  por no ser continua y en  $g(x)$  porque cambia la pendiente «bruscamente» en dicho punto.



**Teorema 2.1.** Si  $f(x)$  es derivable en  $x = a$  entonces es continua en  $a$ .

MaTeX

DERIVADAS



## • Derivadas laterales

Si el límite que define la derivada lo tomamos sólomente por la derecha o por la izquierda, obtenemos las derivadas laterales.

**Definición 2.2** *Se llaman derivada por la derecha y derivada por la izquierda, respectivamente, a los siguientes límites, si existen y son finitos:*

1. *Definimos la derivada por la izquierda de  $f$  en  $a$  cuando*

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe} \quad (5)$$

2. *Definimos la derivada por la derecha de  $f$  en  $a$  cuando*

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe} \quad (6)$$

**Teorema 2.2.** *Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto conteniendo a  $x$ , entonces  $f'(x)$  existe si y solo si existen las derivadas laterales  $f'(x^-)$  y  $f'(x^+)$  y son iguales. En este caso*

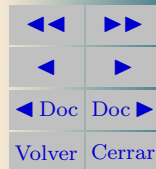
$$f'(x) = f'(x^-) = f'(x^+)$$

*Demostración:* Se deduce de la propia definición de límite, ya que para que un límite exista deben existir los límites laterales y ser iguales.  $\square$



MaTeX

DERIVADAS





**Ejemplo 2.3.** Demostrar que  $f(x) = |x|$  no es derivable en  $x = 0$ .

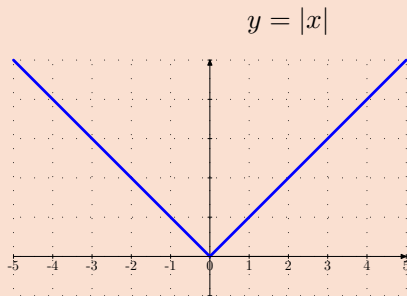
*Solución:* Siendo  $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \leq 0 \\ x & > 0 \end{cases}$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$



Como  $f'(0^-) \neq f'(0^+)$  la función no es derivable en  $x = 0$

□

**Ejercicio 3.** Estudiar la derivabilidad de  $f(x) = x - |1 - x|$  en  $x = 1$ .

**Ejercicio 4.** Probar que  $f(x)$  es derivable en  $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1+x}{2} & 1 \leq x \end{cases}$$

MaTeX

DERIVADAS



**Ejemplo 2.4.** Analizar gráfica y analíticamente la derivada en  $x = 0$  de  $f(x)$ :

$$f(x) = \begin{cases} (x + 2)^2 & x < 0 \\ -x^2 + 4 & 0 \leq x \end{cases}$$

*Solución:* Hallamos las derivadas laterales  $f'(0^-)$  y  $f'(0^+)$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(h + 2)^2 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 + 4h}{h} = 4$$

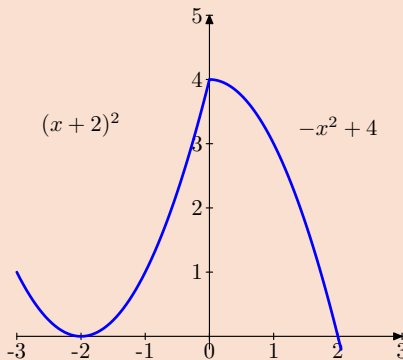
$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(-h^2 + 4) - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h) = 0$$

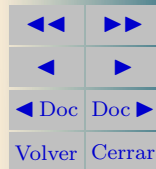
Como  $f'(0^-) \neq f'(0^+)$  la función no es derivable en  $x = 0$ .

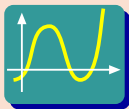
En el gráfico se aprecia que la función es continua pero no es derivable.. En el punto  $x = 0$  presenta un «pico» o cambio de dirección.  $\square$



MaTeX

DERIVADAS





◀ Pulsa y elige el botón **Derivadas** y realiza la siguiente práctica sobre los ejemplos anteriores.

### Práctica 2.1.

- a) Sea la función:  $f(x) = |x|$ . Para representarla introduce en  $f(x)$  la expresión **abs(x)** y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón controlador y observa que la función no es derivable en  $x = 0$ .
- b) Sea la función:  $f(x) = 1 - |1 - x|$ . Para representarla introduce en  $f(x)$  la expresión **1-abs(1-x)** y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón controlador y observa que la función no es derivable en  $x = 1$ .
- c) Sea la función:  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1+x}{2} & 1 \leq x \end{cases}$ . Para representarla introduce en  $f(x)$  la expresión **x<1 ? sqrt(x):(1+x)/2** y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón controlador y observa que la función es derivable en  $x = 1$ .
- d) Sea la función:  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \leq 0 \\ -x^2+4 & 0 < x \end{cases}$ . Para representarla introduce en  $f(x)$  la expresión **x<0 ? (x+2)^2:-x^2+4** y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza el botón controlador y observa que la función no es derivable en  $x = 0$ .



# MaTeX

# DERIVADAS



**Test.** Si  $f(x)$  es continua en  $x = a$  entonces es derivable.

(a) Si

(b) No

### 3. Función Derivada

**Definición 3.1** Sea  $f$  una función. Si calculamos la derivada de  $f$  en cualquier  $x$  que se cumpla

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{existe}$$

hemos definido la **función derivada**  $f'(x)$  de la función  $f$ .

En general se tiene que  $Dom(f') \subseteq Dom(f)$

**Ejercicio 5.** Sea la función  $f(x) = \sqrt{x}$ . Demuestra con la definición de derivada que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

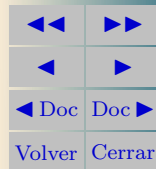
y comprobar que  $Dom(f') \subseteq Dom(f)$ .

A continuación vamos a obtener las reglas de derivación de las funciones elementales



MaTeX

DERIVADAS





## 4. Reglas de Derivación

### • Derivada de una constante

**Teorema 4.1.** Sea  $f$  una función constante  $f(x) = c \quad \forall x \in R$ , siendo  $c$  un número real, entonces

$$f'(x) = [c]' = 0 \quad \forall x \in R$$

### • Derivada de la potencia

**Teorema 4.2.** (Regla de la potencia)

$$f(x) = x^n \implies f'(x) = [x^n]' = n x^{n-1} \quad x \in R \quad (7)$$

*Nota al Teorema.* La regla anterior se extiende y funciona cuando el exponente es cualquier **número real**.

**Ejemplo 4.1.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = x^6 \quad g(x) = x^{-5} \quad h(x) = x^{5/3}$$

*Solución:*  $f'(x) = 6x^5 \quad g'(x) = -5x^{-6} \quad h'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}$  □

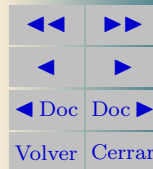
**Ejercicio 6.** Calcular las derivadas.

a)  $f(x) = 2x^{13}$

b)  $f(x) = \sqrt{x^3}$

MaTEX

DERIVADAS



c)  $f(x) = \sqrt[5]{x^7}$

d)  $f(x) = 2x^{-30}$

- Regla de la suma

**Teorema 4.3.** (Derivada de la suma) Sean las funciones  $u = f(x)$  y  $v = g(x)$ . Entonces

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) \quad (8)$$

$$y = u + v \implies y' = [u + v]' = u' + v' \quad (9)$$

**Ejemplo 4.2.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = x^3 + x^4 \quad g(x) = x^2 - x^{-3}$$

*Solución:*

$$f'(x) = 3x^2 + 4x^3 \quad g'(x) = 2x + 3x^{-4}$$

□

**Ejercicio 7.** Calcular las derivadas.

a)  $f(x) = 3x^2 - 5x^{-3}$

b)  $f(x) = x^2 - 3, x^5$

c)  $f(x) = x^{10} + x^{-10}$

d)  $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$

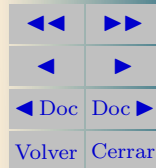
e)  $f(x) = x^8 + x^{8,003}$

f)  $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[5]{x}$



MaTeX

DERIVADAS



## • Regla del producto

**Teorema 4.4.** (Derivada del producto) Sean las funciones  $u = f(x)$  y  $v = g(x)$ . Entonces

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (10)$$

$$y = u \cdot v \implies y' = [u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (11)$$

**Ejemplo 4.3.** Hallar la derivada del producto

$$f(x) = (x^3 + x^4)(x^2 - x^{-3})$$

*Solución:*

$$f'(x) = (3x^2 + 4x^3) \cdot (x^2 - x^{-3}) + (x^3 + x^4) \cdot (2x + 3x^{-4})$$

□

**Ejercicio 8.** Calcular las derivadas.

a)  $f(x) = (x^2 + 10)(1 - x^2)$

b)  $f(x) = (x + x^2 + 1) \cdot (1 + x)$

c)  $f(x) = (x^{10} + 1)(1 - x)$

d)  $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (1 - x^2)$

e)  $f(x) = (x^2 + x^3) \cdot (3 + x)$

f)  $f(x) = (\sqrt{x^3} + x) \cdot (x - \sqrt[5]{x})$



# MaTEX

# DERIVADAS



- Regla del cociente

**Teorema 4.5.** (Derivada del cociente) Sean  $u = f(x)$  y  $v = g(x)$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad (12)$$

$$y = \frac{u}{v} \implies \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (13)$$

**Ejemplo 4.4.** Hallar la derivada del cociente  $f(x) = \frac{x^3 + x^4}{x^2 - x^{-3}}$

*Solución:*

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x^3)(x^2 - x^{-3}) - (x^3 + x^4)(2x + 3x^{-4})}{(x^2 - x^{-3})^2}$$

□

**Ejercicio 9.** Calcular las derivadas.

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$

b)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

c)  $f(x) = \frac{x^{10} + 1}{1 - x}$

d)  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 3}$



MaTEX

DERIVADAS





## • Regla de la cadena

**Teorema 4.6.** (Regla de la cadena) Sea las funciones  $y = f(u)$  y  $u = g(x)$ . Supongamos que  $g$  es derivable en  $x$  y  $f$  es derivable en  $u$ , entonces la función compuesta  $f \circ g$  es derivable en  $x$  y su derivada es

$$y = f(g(x)) \implies y' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (14)$$

**Ejemplo 4.5.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = (2x + x^2 + 5)^3 \quad g(x) = (2 - x^{12})^6$$

*Solución:*

$$f'(x) = 3(2x + x^2 + 5)^2(2 + 2x)$$

$$g'(x) = 6(2 - x^{12})^5(-12x^{11})$$

□

**Ejercicio 10.** Calcular las derivadas.

a)  $f(x) = (1 + 2x)^3$

b)  $f(x) = (x + x^2)^3$

c)  $f(x) = (x^{10} + 1)^2$

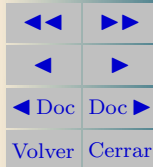
d)  $f(x) = (2x^3 + x)^3$

e)  $f(x) = x^2(2x^3 + x)^3$

f)  $f(x) = (1 - x^2)^3(5 + x)^5$

# MaTEX

# DERIVADAS





## 5. Derivadas de las funciones trascendentes

### • Trigonómicas

**Teorema 5.1.** Las derivadas trigonométricas elementales son:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\operatorname{sen} x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (15)$$

**Ejemplo 5.1.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = \operatorname{sen} 6x \quad g(x) = \cos(1 + x^2) \quad h(x) = \tan x^3$$

*Solución:* Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = 6 \cos 6x \quad g'(x) = -2x \operatorname{sen}(1 + x^2) \quad h'(x) = \frac{3x^2}{\cos^2 x^3}$$

□

**Ejercicio 11.** Calcular las derivadas.

a)  $f(x) = \operatorname{sen}(3x + 1)$

b)  $f(x) = \operatorname{sen}(x^3 + 1)$

c)  $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2 + 1)$

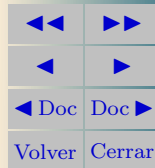
d)  $f(x) = \cos\left(\frac{x}{1-x}\right)$

e)  $f(x) = \tan(1 + 2x^2 + x^3)$

f)  $f(x) = \sec(1 - x^2)$

# MaTEX

# DERIVADAS



- Exponenciales

**Teorema 5.2.** Las derivadas de la función exponencial son:

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \ln a \quad (0 < a \neq 1) \quad (16)$$

**Ejemplo 5.2.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = e^{6x} \quad g(x) = e^{1+x^2} \quad h(x) = 6^{\sin x}$$

*Solución:* Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = 6e^{6x} \quad g'(x) = 2xe^{1+x^2} \quad h'(x) = 6^{\sin x} \ln 6 \cos x$$

□

**Ejercicio 12.** Calcular las derivadas.

a)  $f(x) = e^{-5x+4x^2}$

b)  $f(x) = e^{x \sin x}$

c)  $f(x) = e^{1-\sin^2 x}$

d)  $f(x) = 2^{\tan 3x}$

e)  $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x}$

f)  $f(x) = a^{\sin x + \cos x}$



MaTEX

DERIVADAS



## • Logarítmicos

**Teorema 5.3.** Las derivadas de la función logarítmica son:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (0 < a \neq 1) \quad (17)$$

**Ejemplo 5.3.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = \ln(5x - x^2) \quad g(x) = \ln(5 - \sin x) \quad h(x) = \log_3(x^2 + e^x)$$

*Solución:* Del teorema y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = \frac{5 - 2x}{5x - x^2} \quad g'(x) = \frac{-\cos x}{5 - \sin x} \quad h'(x) = \frac{1}{\ln 3} \frac{2x + e^x}{x^2 + e^x}$$

□

**Ejercicio 13.** Calcular las derivadas.

a)  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x} + 1)$

b)  $f(x) = \ln(x^2 + \sin x)$

c)  $f(x) = \ln(x^2 \sin x)$

d)  $f(x) = \ln^2(1 + e^x)$

e)  $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$

f)  $f(x) = \log_5\left(\frac{1}{1 + \sin x}\right)$



MaTeX

DERIVADAS





## • Derivadas Logarítmicas

Dada una función  $y = f(x)$ , la derivación logarítmica consiste en tomar logaritmos en los dos miembros de la igualdad y derivar, después de simplificar. La derivación logarítmica se aplica:

- Para derivar funciones del tipo  $y = f(x)^{g(x)}$ .
- Para simplificar la derivación de productos y cocientes.

**Ejemplo 5.4.** Derivar  $y = x^{\operatorname{sen} x}$ .

*Solución:* Tomando  $\ln$  y derivando en ambos miembros resulta:

$$\ln y = \ln x^{\operatorname{sen} x} \implies \ln y = \operatorname{sen} x \cdot \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

y se despeja  $y'$ ,

$$y' = x^{\operatorname{sen} x} \left( \cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)$$

□

**Ejemplo 5.5.** Derivar  $y = \cos x^x$ .

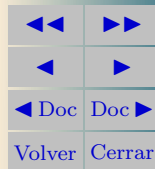
*Solución:*  $\ln y = \ln \cos x^x \implies \ln y = x \cdot \ln \cos x$

$$y' = \cos x^x \left( \ln \cos x - x \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$$

□

# MaTeX

# DERIVADAS



## 5.1. Regla de la inversa

**Teorema 5.4.** (Regla de la inversa) Sea la función  $f(x)$  y su inversa  $f^{-1}(x)$ .

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (18)$$

**Ejemplo 5.6.** Siendo  $f(x) = x^2$  y  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  su inversa para  $x \geq 0$ , hallar  $(\sqrt{x})'$

*Solución:* De la ecuación (18),

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

□

**Ejemplo 5.7.** Siendo  $f(x) = e^x$  y  $f^{-1}(x) = \ln x$ , deducir  $(\ln x)'$

*Solución:*

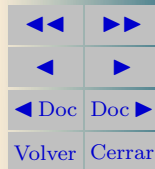
$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

□



MaTeX

DERIVADAS





## • Derivadas de Arcos trigonométricos

**TEOREMA 13.** Las derivadas de los arcos trigonométricos son:

$$(a) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(b) (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(c) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

**Ejemplo 5.8.** Hallar las derivadas de

$$f(x) = \arcsin 6x \quad g(x) = \arctan x^3$$

*Solución:*

$$f'(x) = \frac{6}{\sqrt{1-(6x)^2}} \quad g'(x) = \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}$$

□

**Ejercicio 14.** Calcular las derivadas.

$$a) f(x) = \arcsin(-x)$$

$$b) f(x) = \arctan(x^2)$$

$$c) f(x) = \arcsin(\ln x + x)$$

$$d) f(x) = \arccos(1 - x)$$

$$e) f(x) = \arctan(\sin x)$$

$$f) f(x) = \arctan(\ln x)$$

# MaTEX

# DERIVADAS





## 6. Ejercicios

**Ejercicio 15.** Un economista está interesado en ver cómo afecta el precio de un libro  $p$  en miles de euros en las unidades vendidas  $V(p)$ . A partir de los siguientes datos

$$V(5) = 2000 \quad V(10) = 500 \quad V'(5) = -25$$

dar las unidades y explicar en palabras el significado de las siguientes expresiones:

$$a) V(10) - V(5) \quad b) \frac{V(10) - V(5)}{10 - 5} \quad c) V'(5) = -25$$

**Ejercicio 16.** Una pelota cae desde lo alto de un edificio y su altura en metros cuando varía el tiempo  $t$  en segundos sigue la función

$$f(t) = 125 - 2t^2$$

- a) ¿Cuál es la altura en el instante  $t = 0$ ?
- b) La velocidad de caída corresponde a  $f'(t)$ . ¿Qué velocidad lleva la pelota en el momento  $t = 2$ ? y ¿cuál es su significado?

**Ejercicio 17.** Hallar  $a$  y  $b$  para que  $f(x)$  sea una función derivable en  $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \leq 1 \\ ax + b & 1 < x \end{cases}$$

MaTeX

DERIVADAS

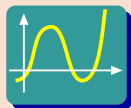


**Ejercicio 18.** Hallar  $a$  y  $b$  para que  $f(x)$  sea una función derivable en  $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x \leq 0 \\ ax + b & 0 < x \end{cases}$$

**Ejercicio 19.** Hallar  $a$  y  $b$  para que  $f(x)$  sea una función derivable en  $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & x \leq 1 \\ 2bx - 2 & 1 < x \end{cases}$$



► Pulsa y elige el botón **Funciones a Trozos** y realiza la siguiente práctica con las funciones anteriores.

### Práctica 6.2.

a) Sea la función:  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x \leq 0 \\ ax + b & 0 < x \end{cases}$ . Para representarla introduce en  $f(x)$  la expresión  $x < 0 ? x^3 + 1 : a * x + b$  y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza los controladores de  $a$  y  $b$  y observa que la función es derivable en  $x = 0$  cuando  $a = 0$  y  $b = 1$ .

b) Sea la función:  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & x \leq 1 \\ 2bx - 2 & 1 < x \end{cases}$ . Para representarla introduce en  $f(x)$  la expresión  $x < 1 ? a * x^2 + b * x - 1 : 2 * b * x - 2$  y pulsa en el botón *Nueva Función*. Desplaza los controladores de  $a$  y  $b$  y observa que la función es derivable en  $x = 1$  cuando  $a = 1$  y  $b = 2$ .



MaTeX

DERIVADAS





**Ejercicio 20.** Calcular las derivadas.

a)  $f(x) = \ln^2(1 + \cos x)^3$

c)  $f(x) = e^{1 - \sin x}$

b)  $f(x) = \sin x(1 + \cos x)^3$

d)  $f(x) = 8^{x - \ln x}$

**Ejercicio 21.** Calcular las derivadas.

a)  $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})^2$

b)  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}$

**Ejercicio 22.** Calcular las derivadas.

a)  $f(x) = x^2 \cdot \arctan x^{-1/2}$

b)  $f(x) = x^x$

**Ejercicio 23.** Calcular las derivadas.

a)  $f(x) = (\tan x)^{\sin x}$

b)  $f(x) = e^x \cdot \sqrt[x]{x}$

MaTEX

DERIVADAS





## Soluciones a los Ejercicios

### Ejercicio 1.

a) Siendo  $f(x) = 1 - 3x$ ,

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 3(1+h) - (-2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{h} = -\mathbf{3} \end{aligned}$$

b) Siendo  $g(x) = 2 + 5x$ ,

$$\begin{aligned} g'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 + 5(1+h) - (7)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h} = \mathbf{5} \end{aligned}$$

En este caso  $f(x)$  y  $g(x)$  son lineales o rectas y se puede observar que la derivadas respectivas coinciden con la pendientes de las rectas dadas.

Ejercicio 1

MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 2.**

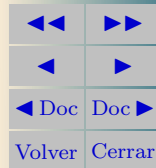
- a)  $C(20) - C(10) = 300 - 200 = 100$  miles de euros, es el incremento en el coste de pasar de extraer 10 toneladas a extraer 20 toneladas.
- b)  $\frac{C(20) - C(10)}{20 - 10} = \frac{300 - 200}{20 - 10} = 10$  miles de euros/tonelada, es el incremento medio en el coste de pasar de extraer 10 toneladas a extraer 20 toneladas, es decir por cada tonelada de más que se extrae aumentamos el coste en 10 mil euros.
- c)  $C'(10) = 8$  miles de euros/tonelada, es la variación instantánea en el coste cuando se extraen 10 toneladas, es decir cuando se están extrayendo 10 toneladas, el coste está aumentando a razón de 8 mil euros por tonelada extraída.

Ejercicio 2



MaTeX

DERIVADAS



**Prueba del Teorema 2.1.** Veamos que la derivabilidad implica la continuidad.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe}$$

multiplicando por  $h$

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \cdot f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \cdot f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a))$$

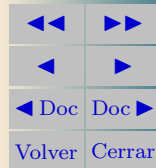
$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a))$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) \implies f(x) \text{ continua en } x = a$$



MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 3.** Siendo  $f(x) = x - |1 - x| = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2(1+h) - 1 - 1}{h} = 2 \\ f'(1^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1}{h} = 0 \end{aligned}$$

Como  $f'(1^-) \neq f'(1^+)$  la función no es derivable en  $x = 1$ .

Ejercicio 3



MaTEX

DERIVADAS





## Ejercicio 4.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1+x}{2} & 1 \leq x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{(\sqrt{1+h} + 1)h} = \boxed{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2+h}{2} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{2h} = \boxed{1/2} \end{aligned}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+) \implies \text{es derivable en } x = 1$$

(1) Por el conjugado.

Ejercicio 4

MaTEX

DERIVADAS





## Ejercicio 5.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{0}{0} \\
 &\stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

luego

$$f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Se tiene que  $Dom(f) = [0, +\infty)$  y  $f'(0)$  no existe, luego el  $Dom(f') = (0, +\infty) \subsetneq Dom(f) = [0, +\infty)$

(1) Por el conjugado.

Ejercicio 5

MaTeX

DERIVADAS



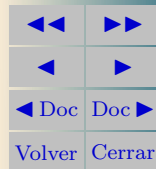
**Prueba del Teorema 4.1.** Sea  $f$  una función constante  $f(x) = c \quad \forall x \in R$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0 \end{aligned}$$



◀ MaTEX

DERIVADAS





**Prueba del Teorema 4.2.** Sea  $f(x) = x^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^n = \\ &= x^n + nx^{n-1}h + h^2\{\text{polinomio en } h\} \end{aligned}$$

En la diferencia de  $f(x+h) - f(x)$  se elimina  $x^n$  y queda

$$f(x+h) - f(x) = nx^{n-1}h + h^2\{\text{polinomio en } h\}$$

luego en la expresión

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + h\{\text{polinomio en } h\}$$

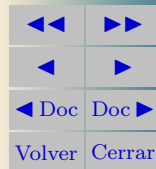
al ser la derivada  $f'(x)$  el límite de esta expresión cuando  $h \rightarrow 0$ , como el segundo sumando

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} h\{\text{polinomio en } h\} &= 0 \\ f'(x) &= nx^{n-1} \end{aligned}$$



MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 6.**

a) Si  $f(x) = 2x^{13}$ ,

$$f'(x) = 26x^{12}$$

b)  $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$ . Luego

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

c)  $f(x) = \sqrt[5]{x^7} = x^{7/5}$ . Luego

$$f'(x) = \frac{7}{5}x^{2/5}$$

d)  $f(x) = 2x^{-30}$ . Luego

$$f'(x) = -60x^{-31}$$

Ejercicio 6

MaTEX

DERIVADAS



**Prueba del Teorema 4.3.** Siendo  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} &= \\ &= \frac{f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \underbrace{\frac{f(x + h) - f(x)}{h}}_{(1)} + \underbrace{\frac{g(x + h) - g(x)}{h}}_{(2)} \end{aligned}$$

Al pasar al límite cuando  $h \rightarrow 0$ ,

$$(1) \quad \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \longrightarrow f'(x)$$

$$(2) \quad \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \longrightarrow g'(x)$$

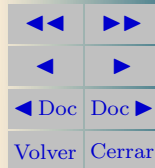
obteniéndose

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$



MaTEX

DERIVADAS





## Ejercicio 7.

a) Si  $f(x) = 3x^2 - 5x^{-3}$ ,

$$f'(x) = 6x + 15x^{-4}$$

b) Siendo  $f(x) = x^2 - 3x^5$ ,

$$f'(x) = 2x - 15x^4$$

c) Si  $f(x) = x^{10} + x^{-10}$ ,

$$f'(x) = 10x^9 - 10x^{-11}$$

d) Siendo  $f(x) = x - \sqrt[3]{x^5}$ ,

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{3}x^{2/3}$$

e) Siendo  $f(x) = x^8 + x^{8,003}$ ,

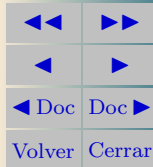
$$f'(x) = 8x^7 + 8,003x^{7,003}$$

f) Siendo  $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[5]{x}$ ,

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{1}{5}x^{-4/5}$$

MaTeX

DERIVADAS



Ejercicio 7



**Prueba del Teorema 4.4.** Siendo  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \text{introduciendo } g(x+h)f(x) \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - g(x+h)f(x) + g(x+h)f(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h)}_{(1)} + \underbrace{f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{(2)} \end{aligned}$$

Al pasar al límite cuando  $h \rightarrow 0$ ,

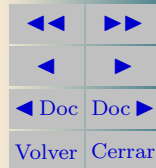
$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) \longrightarrow f'(x)g(x) \\ (2) \quad & f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \longrightarrow f(x)g'(x) \end{aligned}$$

obteniéndose

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 8.**

a) Si  $f(x) = (x^2 + 10)(1 - x^2)$ ,

$$f'(x) = (2x) \cdot (1 - x^2) + (x^2 + 10) \cdot (-2x)$$

b) Siendo  $f(x) = (x + x^2 + 1) \cdot (1 + x)$ ,

$$f'(x) = (1 + 2x) \cdot (-2x) + (x + x^2 + 1) \cdot (-2)$$

c) Si  $f(x) = (x^{10} + 1)(1 - x)$ ,

$$f'(x) = (10x^9) \cdot (1 - x) + (x^{10} + 1) \cdot (-1)$$

d) Siendo  $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (1 - x^2)$ ,

$$f'(x) = (2x - 2) \cdot (1 - x^2) + (x^2 - 2x) \cdot (-2x)$$

e) Siendo  $f(x) = (x^2 + x^3) \cdot (3 + x)$ ,

$$f'(x) = (2x + 3x^2) \cdot (3 + x) + (x^2 + x^3) \cdot (1)$$

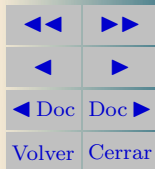
f) Siendo  $f(x) = (\sqrt{x^3} + x) \cdot (x - \sqrt[5]{x})$ .

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2}x^{1/2} + 1\right) \cdot (x - \sqrt[5]{x}) + (\sqrt{x^3} + x) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}x^{-4/5}\right)$$

Ejercicio 8

MaTEX

DERIVADAS





**Prueba del Teorema 4.5.** Siendo  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} &= \quad (\triangleleft \text{operando}) \\
 &= \frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{hg(x+h)g(x)} \quad (\triangleleft \text{introduciendo } f(x)g(x)) \\
 &= \frac{f(x+h)g(x) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - g(x+h)f(x)}{hg(x+h)g(x)} \\
 &= \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \frac{g(x)}{g(x+h)g(x)}}_{(1)} - \underbrace{\frac{f(x)}{g(x+h)g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{(2)}
 \end{aligned}$$

Al pasar al límite cuando  $h \rightarrow 0$ ,

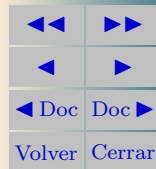
$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \frac{g(x)}{g(x+h)g(x)} \longrightarrow f'(x) \frac{g(x)}{g(x)^2} \\
 (2) \quad & \frac{f(x)}{g(x+h)g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)^2} g'(x)
 \end{aligned}$$

obteniéndose la fórmula para la derivada del cociente.

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 9.**

a) Si  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,

$$f'(x) = \frac{(0)(x) - (1)(1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

b) Si  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ ,

$$f'(x) = \frac{(2x)(x) - (x^2 + 1)(1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

c) Si  $f(x) = \frac{x^{10} + 1}{1 - x}$ ,

$$f'(x) = \frac{(10x^9)(1 - x) - (x^{10} + 1)(-1)}{(1 - x)^2}$$

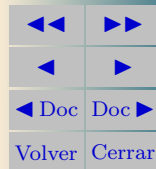
d) Siendo  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 3}$ ,

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)(x + 3) - (x^2 + x)(1)}{(x + 3)^2}$$

MaTEX

DERIVADAS

Ejercicio 9





**Prueba del Teorema 4.6.** Siendo  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ , y llamando a

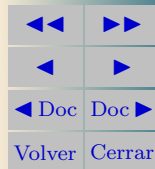
$$\Delta g = g(x+h) - g(x)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} &= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \frac{f(g(x) + \Delta g) - f(g(x))}{h} \\ &= \frac{f(g(x) + \Delta g) - f(g(x))}{\Delta g} \frac{\Delta g}{h} = \\ &= \underbrace{\frac{f(g(x) + \Delta g) - f(g(x))}{\Delta g}}_{(1)} \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{(2)} \\ (1) \quad &\frac{f(g(x) + \Delta g) - f(g(x))}{\Delta g} \longrightarrow f'(g(x)) \\ (2) \quad &\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \longrightarrow g'(x) \end{aligned}$$

MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 10.**

a) Si  $f(x) = (1 + 2x)^3$ ,

$$f'(x) = 3(1 + 2x)^2 (2)$$

b) Siendo  $f(x) = (x + x^2)^3$ ,

$$f'(x) = 3(x + x^2)^2 (1 + 2x)$$

c) Si  $f(x) = (x^{10} + 1)^2$ ,

$$f'(x) = 2(x^{10} + 1)(10x^9)$$

d) Siendo  $f(x) = (2x^3 + x)^3$ ,

$$f'(x) = 3(2x^3 + x)^2 (6x^2 + 1)$$

e) Si  $f(x) = f(x) = x^2(2x^3 + x)^3$ ,

$$f'(x) = 2x(2x^3 + x)^3 + x^2 \cdot 3(2x^3 + x)^2 (6x^2 + 1)$$

f) Siendo  $f(x) = (1 - x^2)^3(5 + x)^5$ ,

$$f'(x) = 3(1 - x^2)^2 (-2x)(5 + x)^5 + (1 - x^2)^3 \cdot 5(5 + x)^4$$

# MaTEX

# DERIVADAS

Ejercicio 10



**Ejercicio 11.**

a) Si  $f(x) = \text{sen}(3x + 1)$ .

$$f'(x) = 3 \cos(3x + 1)$$

b) Si  $f(x) = \text{sen}(x^3 + 1)$ .

$$f'(x) = 3x^2 \cos(x^3 + 1)$$

c) Si  $f(x) = \text{sen}^3(x^2 + 1)$ . Luego

$$f'(x) = 3 \text{sen}^2(x^2 + 1) \cos(x^2 + 1) (2x)$$

d) Si  $f(x) = \cos\left(\frac{x}{1-x}\right)$ .

$$f'(x) = -\text{sen}\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{1}{(1-x)^2}$$

e) Si  $f(x) = \tan(1 + 2x^2 + x^3)$ ,

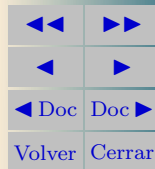
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(1 + 2x^2 + x^3)} (4x + 3x^2)$$

f) Si  $f(x) = \sec(1 - x^2) = \frac{1}{\cos(1 - x^2)}$

$$f'(x) = \frac{-\text{sen}(1 - x^2) (-2x)}{\cos^2(1 - x^2)}$$

MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 12.**

a) Si  $f(x) = e^{-5x+4x^2}$ .

$$f'(x) = e^{-5x+4x^2} (-5 + 8x)$$

b) Si  $f(x) = e^{x \operatorname{sen} x}$ .

$$f'(x) = e^{x \operatorname{sen} x} (\operatorname{sen} x + x \cos x)$$

c) Si  $f(x) = e^{1-\operatorname{sen}^2 x}$ . Luego

$$f'(x) = e^{1-\operatorname{sen}^2 x} (-2 \operatorname{sen} x \cos x)$$

d) Si  $f(x) = 2^{\tan 3x}$ .

$$f'(x) = 2^{\tan 3x} \ln 2 \frac{3}{\cos^2 3x}$$

e) Si  $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x}$ ,

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x} (2x + 3) \ln \frac{3}{5}$$

f) Si  $f(x) = a^{\operatorname{sen} x + \cos x}$

$$f'(x) = a^{\operatorname{sen} x + \cos x} \ln a (\cos x - \operatorname{sen} x)$$

# MaTEX

# DERIVADAS



**Ejercicio 13.**

a) Si  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x} + 1)$ .

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x} + 1} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

b) Si  $f(x) = \ln(x^2 + \operatorname{sen} x)$   $f'(x) = \frac{1}{x^2 + \operatorname{sen} x} (2x + \cos x)$

c) Si  $f(x) = \ln(x^2 \operatorname{sen} x)$ .

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 \operatorname{sen} x} (2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x)$$

d) Si  $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$ .

$$f'(x) = 2 \ln(1 + e^x) \frac{1}{1 + e^x} e^x$$

e) Si  $f(x) = \ln^2(1 + \ln x)$ .

$$f'(x) = 2 \ln(1 + \ln x) \frac{1}{1 + \ln x} \frac{1}{x}$$

f) Si  $f(x) = \log_5\left(\frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}\right)$ .

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 5} \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \frac{-\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)^2} = -\frac{1}{\ln 5} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

MaTeX

DERIVADAS



**Prueba del Teorema 5.4.** Sea la función  $f(x)$  y su inversa  $g(x) = f^{-1}(x)$ .  
Teniendo en cuenta la identidad

$$(f \circ g)(x) = x$$

derivando con la regla de la cadena se tiene

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

despejando  $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

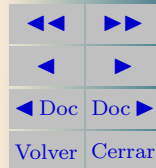
luego

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



MaTEX

DERIVADAS



**Teorema 13(a)** Teniendo en cuenta la identidad

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x$$

derivando con la regla de la cadena se tiene

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) \cdot (\operatorname{arc\,sen} x)' = 1$$

(19)

Teniendo en cuenta que

$$\cos(f) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 f}$$

$$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

y despejando en (19),

$$(\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

□



MaTeX

DERIVADAS



**Teorema 13(b)** Teniendo en cuenta la identidad

$$\cos(\arccos x) = x$$

derivando con la regla de la cadena se tiene

$$-\sin(\arccos x) \cdot (\arccos x)' = 1 \quad (20)$$

Teniendo en cuenta que

$$\sin(f) = \sqrt{1 - \cos^2 f}$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

y despejando en (20),

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

□



MaTeX

DERIVADAS



**Teorema 13(c)** Teniendo en cuenta la identidad

$$\tan(\arctan x) = x$$

derivando con la regla de la cadena se tiene

$$\frac{1}{\cos^2(\arctan x)} \cdot (\arctan x)' = 1 \quad (21)$$

Teniendo en cuenta que

$$\cos^2(f) = \frac{1}{1 + \tan^2 f}$$

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

y despejando en (21),

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

□



MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 14.**

$$a) \text{ Si } f(x) = \arcsen(-x) \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - (-x)^2}}$$

$$b) \text{ Si } f(x) = \arctan(x^2) \quad f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1 + x^4}}$$

$$c) \text{ Si } f(x) = \arcsen(\ln x + x).$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\ln x + x)^2}} \left( \frac{1}{x} + 1 \right)$$

$$d) \text{ Si } f(x) = \arccos(1 - x).$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}} (-1)$$

$$e) \text{ Si } f(x) = \arctan(\sen x).$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sen x)^2} \cos x$$

$$f) \text{ Si } f(x) = \arctan(\ln x).$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \frac{1}{x}$$

MaTeX

DERIVADAS



Ejercicio 14

**Ejercicio 15.**

- a)  $V(10) - V(5) = 500 - 2000 = -1500$  libros, es el incremento en las ventas de libros al pasar de un precio de 5 euros a un precio de 10 euros, como es negativo se pierden 1500 libros en las ventas.
- b)  $\frac{V(10) - V(5)}{10 - 5} = \frac{500 - 2000}{10 - 5} = -300$  libros/euro, es el incremento medio en las ventas de libros al pasar de un precio de 5 euros a un precio de 10 euros, como es negativo se pierden 300 libros en las ventas por cada euro que aumenta en el precio.
- c)  $V'(5) = -25$  libros/euro, es la variación instantánea en las ventas de libros con un precio de 5 euros, como es negativo con este precio las ventas están cayendo a razón de 300 libros por euro

Ejercicio 15



MaTeX

DERIVADAS



**Ejercicio 16.**

- a) La altura en el instante  $t = 0$ , es  $f(0) = 125$  metros, que corresponde a la altura desde la que se suelta la pelota.
- b) La velocidad de caída corresponde a  $f'(t)$

$$v(t) = f'(t) = -4t$$

En el momento  $t = 2$  la velocidad es

$$v(2) = -8 \text{ m/s}$$

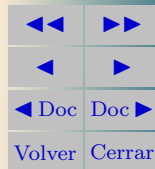
y significa al ser negativa, que en ese instante la pelota está perdiendo altura a razón de 8 m/s.

Ejercicio 16



MaTeX

DERIVADAS



**Ejercicio 17.** Siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \leq 1 \\ ax + b & 1 < x \end{cases}$$

- Para que sea continua en  $x = 1$

$$f(1^-) = 0 = f(1^+) = a + b \implies a + b = 0$$

- Para que sea derivable en  $x = 1$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x < 1 \\ a & 1 < x \end{cases}$$

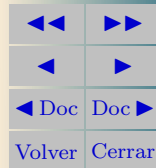
$$f'(1^-) = 3 = f'(1^+) = a \implies \boxed{a = 3}$$

Sustituyendo en la ecuación  $a + b = 0$ , se tiene  $\boxed{b = -3}$

Ejercicio 17

MaT<sub>E</sub>X

DERIVADAS



**Ejercicio 18.** Siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x \leq 0 \\ ax + b & 0 < x \end{cases}$$

- Para que sea continua en  $x = 0$

$$f(0^-) = 1 = f(0^+) = b \implies \boxed{b = 1}$$

- Para que sea derivable en  $x = 0$ .

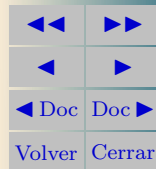
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x < 0 \\ a & 0 < x \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 0 = f'(0^+) = a \implies \boxed{a = 0}$$

Ejercicio 18

MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 19.** Siendo

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & x \leq 1 \\ 2bx - 2 & 1 < x \end{cases}$$

- Para que sea continua en  $x = 1$

$$f(1^-) = a + b - 1 = f(1^+) = 2b - 2 \implies \boxed{a = b - 1}$$

- Para que sea derivable en  $x = 1$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x < 1 \\ 2b & 1 < x \end{cases}$$

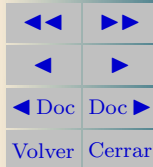
$$f'(1^-) = 2a + b = f'(1^+) = 2b \implies \boxed{2a = b}$$

Resolviendo el sistema con las dos condiciones se obtiene  $a = 1$  y  $b = 2$

Ejercicio 19

MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 20.**

a) Si  $f(x) = \ln^2(1 + \cos x)^3$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \ln(1 + \cos x)^3 \frac{1}{(1 + \cos x)^3} 3(1 + \cos x)^2(-\operatorname{sen} x) \\ &= -6 \ln(1 + \cos x)^3 \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)} \end{aligned}$$

b) Si  $f(x) = \operatorname{sen} x(1 + \cos x)^3$ .

$$f'(x) = \cos x(1 + \cos x)^3 + \operatorname{sen} x 3(1 + \cos x)^2(-\operatorname{sen} x)$$

c) Si  $f(x) = e^{1-\operatorname{sen} x}$ .

$$f'(x) = -e^{1-\operatorname{sen} x} \cos x$$

d) Si  $f(x) = 8^{x-\ln x}$ .

$$f'(x) = 8^{x-\ln x} \cdot \ln 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Ejercicio 20

MaTEX

DERIVADAS



**Ejercicio 21.**

a) Si  $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x})^2$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1 - \sqrt{x})^2} 2(1 - \sqrt{x}) \frac{-1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})} \end{aligned}$$

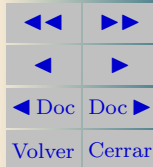
b) Si  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}} \cdot \\ &\quad \frac{\sec^2 x(1 - \tan x) + (1 + \tan x)\sec^2 x}{(1 - \tan x)^2} \\ &= \frac{1 - \tan x}{2(1 + \tan x)} \cdot \frac{2\sec^2 x}{(1 - \tan x)^2} \\ &= \frac{\sec^2 x}{(1 + \tan x)(1 - \tan x)} \end{aligned}$$

MaTEX

DERIVADAS

Ejercicio 21



**Ejercicio 22.**

a) Si  $f(x) = x^2 \cdot \arctan x^{-1/2}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 \cdot \frac{1}{1 + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2} \cdot \frac{-1}{2} x^{-3/2} \\ &= 2x \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{1 + (\frac{1}{\sqrt{x}})^2} \end{aligned}$$

b) Si  $f(x) = x^x$ . Aplicando logaritmos

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= x \ln x \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\ f'(x) &= (\ln x + 1) \cdot x^x \end{aligned}$$

Ejercicio 22

MaTeX

DERIVADAS



**Ejercicio 23.**

a) Si  $f(x) = (\tan x)^{\sen x}$ . Aplicando logaritmos

$$\ln f(x) = \sen x \ln \tan x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln \tan x + \sen x \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln \tan x + \frac{1}{\cos x}$$

$$f'(x) = \left( \cos x \ln \tan x + \frac{1}{\cos x} \right) \cdot (\tan x)^{\sen x}$$

b) Si  $f(x) = e^x \cdot \sqrt{x}$ . Aplicando logaritmos

$$\ln f(x) = x + \frac{1}{2} \ln x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \frac{1}{x}$$

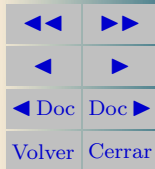
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \left( 1 - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) \cdot e^x \cdot \sqrt{x}$$

MaTeX

DERIVADAS

Ejercicio 23



## Soluciones a los Tests

**Solución al Test:** La continuidad no implica la derivabilidad. Por ejemplo

$$f(x) = |x|$$

es continua en 0, sin embargo no es derivable en 0.

Final del Test



MaTEX

DERIVADAS



## Índice alfabético

derivabilidad y continuidad, 14

derivada, 11

de una constante, 20

de una potencia, 20

en un punto, 11

función, 19

laterales, 15

derivadas

arcos trigonométricos, 30

exponenciales, 26

logarítmicas, 27

trigonométricas, 25

Ecuación de la tangente, 10

ecuación de la tangente, 10

El problema de la tangente, 9

regla, 21

de la cadena, 24

de la inversa, 29

de la suma, 21

del cociente, 23

del producto, 22

Variación instantánea, 7

Variación media, 4



MaTeX

DERIVADAS

