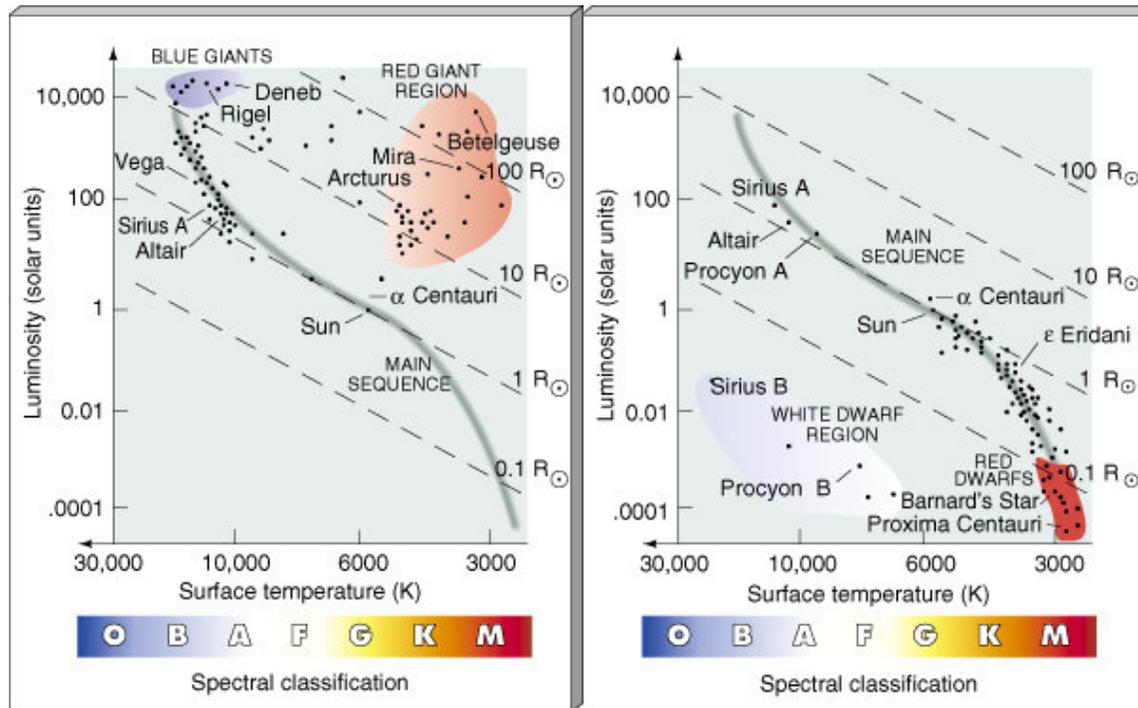


Trabajo B2: ESTRUCTURA ESTELAR

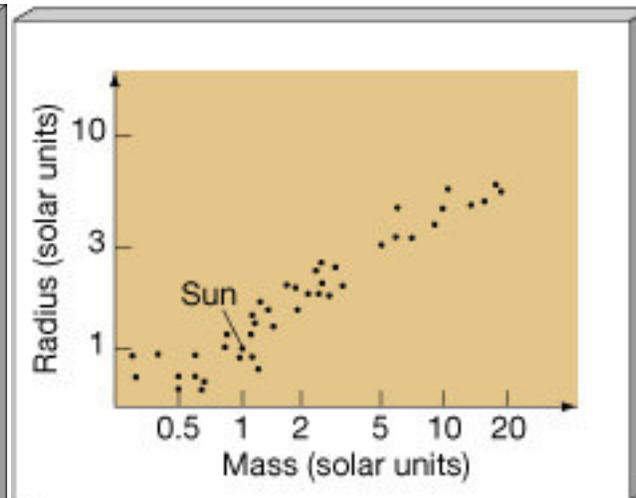
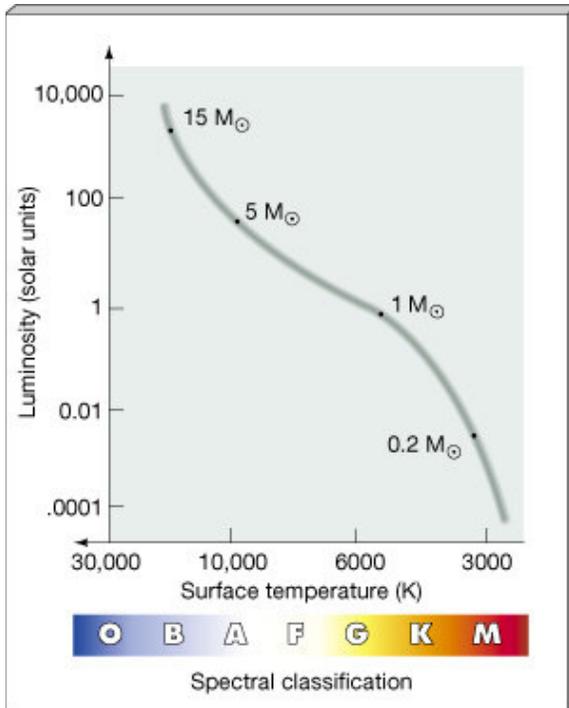
(a) Observaciones básicas de estrellas en la secuencia principal
(realizando la conversión $H \rightarrow He$)



La temperatura superficial estelar se expresa habitualmente en K, la luminosidad absoluta en luminosidades solares ($L_{\odot} = 3,86 \cdot 10^{33} \text{ erg seg}^{-1}$) y el radio (tamaño) en radios solares ($R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^{10} \text{ cm}$)

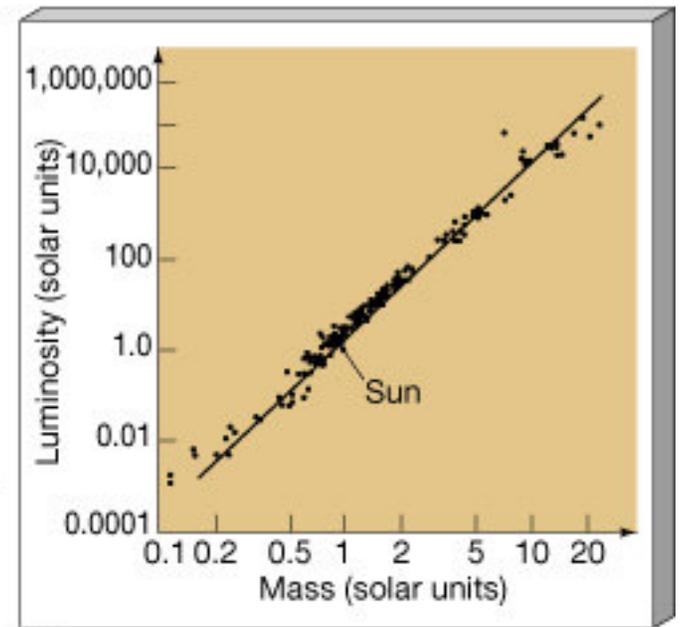
EMISION DE TIPO CUERPO NEGRO: Partiendo de la potencia monocromática irradiada hacia el exterior por unidad de superficie $F(\nu) = (2\pi h/c^2) \{ \nu^3 / [\exp(h\nu / kT) - 1] \}$, podemos encontrar la potencia total emergente por unidad de superficie (integrando sobre todas las frecuencias): $F = \sigma T^4$, $\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15c^2 h^3$. Si la estrella es considerada como una esfera de radio R , se obtiene la luminosidad $L = 4\pi\sigma R^2 T^4$ (ley LRT)

ley LRT $\rightarrow \log L = \log(4\pi\sigma R^2) + 4 \log T$ (ley desplazamiento Wien: $\lambda_{\max} T = \text{cte}$)



(a)

$$R \propto M$$



(b)

$$L \propto M^4$$

¿ESTRUCTURA ESTELAR?

En principio, las estrellas de la SP pueden modelarse como esferas con densidad universal constante ρ_0 . Sin embargo, este modelo conduce a $M = 4\pi \int_{[0,R]} \rho(r) r^2 dr = (4/3)\pi R^3 \rho_0$



$$R \propto M^{1/3} \rightarrow \text{NO OBSERVADO}$$

(b) Ecuación de equilibrio hidrostático (EQH) y relación masa-densidad (MD)

Para un elemento de fluido situado a una distancia r del centro, consideramos que la atracción gravitatoria de la masa estelar dentro de dicho radio es exactamente compensada por la fuerza hacia el exterior generada por la presión (gradiente de presión)

$$\rho (d^2r / dt^2) = G\rho(r)m(r) / r^2 + \partial P / \partial r$$



$$\text{EQH: } d^2r / dt^2 = 0$$

$$dP / dr = - G\rho(r)m(r) / r^2$$

Es evidente que se P decrece cuando r crece. Así, la presión es máxima en el centro de la estrella y mínima en su superficie. En otras palabras, $P_c = P(0) > P(R) = 0$. Por otro lado, la masa encerrada en una esfera de radio r vale $m(r) = \int_{[0,r]} 4\pi (r')^2 \rho(r') dr'$. Esta relación masa-densidad (MD) puede reescribirse como:

$$dm / dr = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Considerando las nuevas ecs. EQH+MD y un gas ideal clásico (no relativista), se obtiene el Teorema del Virial: $2E_T + E_{GR} = 0$, donde E_T es la energía térmica total de la estrella y E_{GR} es su energía de enlace gravitatorio (cohesión)

(c) Ecuación de transporte de energía (TE)

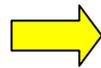
TRANSPORTE DE RADIACION: La ecuación para la conducción de calor es $F = -\kappa_c (dT/dr)$, donde F es el flujo de calor y κ_c es la conductividad. Para una estrella, tendremos una ecuación análoga para el transporte de radiación: $F \propto -dT/dr$, siendo F el flujo de radiación. Definiendo $L(r)$ como la energía (radiación) por unidad de tiempo cruzando la superficie esférica de radio r , entonces $L(r) = 4\pi r^2 F$ y $L = L(R)$ es la luminosidad total de la estrella. Finalmente, el gradiente de temperatura vale

$$dT / dr = - [3\kappa(r)\rho(r) / 4acT^3(r)] [L(r) / 4\pi r^2]$$

La **opacidad específica promedio** (κ en $\text{cm}^2 \text{gr}^{-1}$) caracteriza la interacción de la radiación con la materia

Los principales procesos que contribuyen a la opacidad son la *dispersión electrónica* (fotón colisiona con un electrón libre y cambia la dirección de su movimiento): $\kappa_e = 0,2(1 + X)$, las *transiciones libre-libre* (fotón es absorbido por un electrón libre y este se acelera, y radiación de frenado o “Bremsstrahlung”): $\kappa_{ff} \approx 3,68 \times 10^{22} (1 + X) (1 - Z) \rho T^{-3,5}$, y las *transiciones ligado-libre* (fotoionización de un átomo o ión, y recombinación radiativa): $\kappa_{bf} \approx 4,34 \times 10^{24} Z (1 + X) \rho T^{-3,5}$

Dada una **composición química** mediante los parámetros (X , Y , Z): $\rho(\text{H}) = X\rho$, $\rho(\text{He}) = Y\rho$ y $\rho(\text{metales}) = Z\rho$



$$\kappa(\rho, T) \approx 0,2(1 + X) + (3,68 \times 10^{22} + 4,34 \times 10^{24} Z) (1 + X) \rho T^{-3,5}$$

TRANSPORTE CONVECTIVO: Si ocurre un transporte de energía por convección (elementos de fluido de capas internas calientes se desplazan hacia capas más externas y frías, y viceversa), entonces la ec. TE se escribe

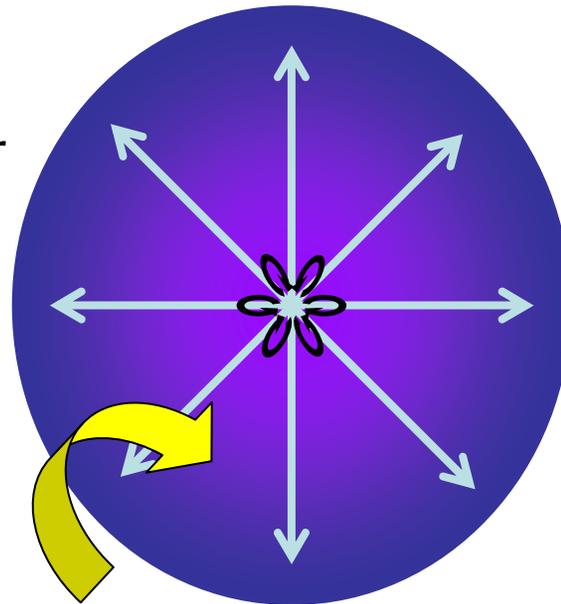
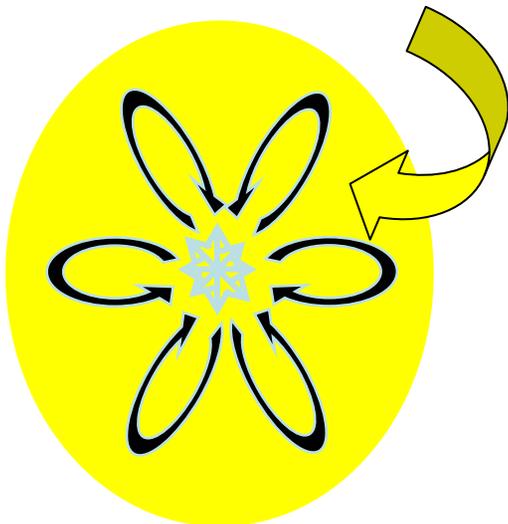
$$dT / dr = (1 - 1/\gamma) [T(r) / P(r)] (dP / dr) = - (1 - 1/\gamma) [T(r) / P(r)] [G\rho(r)m(r) / r^2]$$

Una región es inestable frente a convección cuando se verifica $|dT/dr|_{\text{rad}} > |dT/dr|_{\text{conv}}$.

Para un gas ideal completamente ionizado, el **índice adiabático** vale:

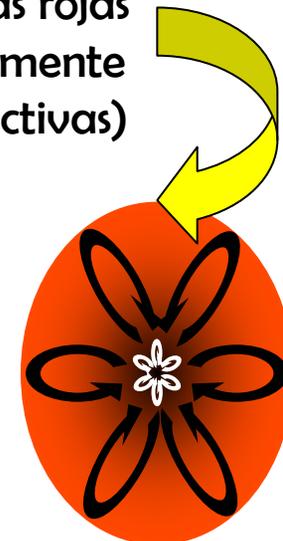
$$\gamma = 5 / 3$$

$M < 1,5 M_{\odot}$, $T_c < 1,8 \times 10^7$ K
(núcleo radiativo +
envoltura convectiva; por
ejemplo, el Sol)



$M > 1,5 M_{\odot}$, $T_c > 1,8 \times 10^7$ K (núcleo
convectivo + envoltura radiativa)

Enanas rojas
(totalmente
convectivas)



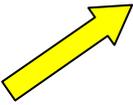
(d) Ecuación de producción de energía (PE)

Mediante procesos de fusión termonuclear (**conversión H → He**), se genera cierta cantidad de energía por unidad de masa y por unidad de tiempo, a una distancia r del centro de la estrella. Si nos fijamos en una capa esférica de espesor dr , la energía adicional añadida al campo de radiación será $dL = 4\pi r^2 \rho \epsilon dr$. Así, se obtiene la ec. PE

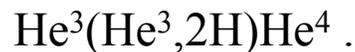
$$dL / dr = 4\pi r^2 \rho(r)\epsilon(r)$$

Aparte de la **composición química**, la **razón de producción de energía** ϵ (erg gr⁻¹ seg⁻¹) depende de las condiciones físicas del material en un radio dado. Es decir,

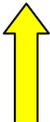
$$\epsilon = \epsilon(\rho, T)$$

Cadenas protón-proton (pp) 

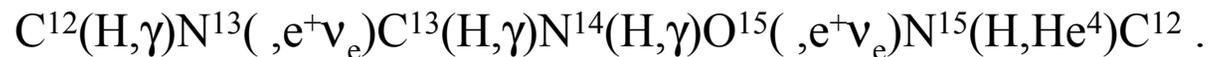
La cadena pp principal consiste en el conjunto de reacciones:



$$T_c < 1,8 \times 10^7 \text{ K y } \epsilon \approx \epsilon_0 \rho T^4 \text{ (erg gr}^{-1} \text{ seg}^{-1}\text{)}$$

Ciclo Carbono-Nitrógeno-Oxígeno (CNO) 

El C¹² actúa como catalizador para convertir 4H en He⁴, sin ser “destruido” en el proceso. El ciclo CNO incluye al ciclo CN:



$$T_c > 1,8 \times 10^7 \text{ K (M > 1,5 M}_\odot\text{) y } \epsilon \approx \epsilon_0 \rho T^{18} \text{ (erg gr}^{-1} \text{ seg}^{-1}\text{)}$$

(e) Ecuación de estado

Dada una **composición química** (X,Y,Z)



$$P = P(\rho, T)$$

- La presión dominante será la debida al gas de partículas. Si consideramos un gas ideal clásico, la presión debida a las partículas de tipo i será $P_i = n_i kT$, donde n_i es su densidad número. La presión total del gas es la suma de las presiones ejercidas por cada una de las componentes (ley de Dalton): $P_{\text{gas}} = kT \sum n_i$. Suponiendo ionización total, podemos sumar las densidades número de electrones, H, He y metales, y obtener $\sum n_i \approx (\rho / 2m_H) (1 + 3X + Y/2)$, siendo m_H la masa de un núcleo de H (protón)
- Debemos incluir también la presión debida a la radiación P_{rad} . Dicha presión vale $P_{\text{rad}} = (1/3) aT^4$



$$P \approx kT (\rho / 2m_H) (1 + 3X + Y/2) + (1/3) aT^4$$

(f) Perspectiva global

Dada una **composición química** (por ejemplo, $X = 0,6$, $Y = 0,38$ y $Z = 0,02$ para estrellas de población I, o $X = 0,9$, $Y = 0,099$ y $Z = 0,001$ para estrellas de población II), tenemos que resolver cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$dP / dr = - G \rho m / r^2 \text{ (EQH)}$$

+

$$dm / dr = 4\pi r^2 \rho \text{ (MD)}$$

+

$$dT / dr = - [3 \kappa(\rho, T) \rho / 4ac T^3] (L / 4\pi r^2) \text{ (TR) o}$$

$$dT / dr = - (1 - 1 / \gamma) (T / P) (G \rho m / r^2) \text{ (TC)}$$

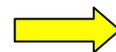
+

$$dL / dr = 4\pi r^2 \rho \varepsilon(\rho, T) \text{ (PE) ,}$$

teniendo en cuenta la ecuación de estado $P = P(\rho, T)$. Para obtener una solución única, se requieren cuatro condiciones de contorno.



Problema involucrando cálculos complejos. ¿Se puede usar un modelo analítico “realista” para describir la estructura estelar?



MODELO DE CLAYTON (1986)

(g) Modelo de Clayton

La aproximación de Clayton consiste en partir de un **perfil de presión “razonable” $P(r)$** , y entonces usar dicho perfil para resolver la estructura estelar completa. Por ejemplo, las ecs. EQH+MD pueden integrarse para obtener el perfil de densidad $\rho(r)$. Entonces, se puede usar la ecuación de estado para encontrar el perfil de temperatura $T(r)$. Evidentemente, el problema del método está en el punto de partida, es decir, en la elección del comportamiento de la presión.

- La presión promedio $\langle P \rangle$ dentro de una estrella de volumen V está relacionada con su energía térmica total: $E_T = (3/2) \langle P \rangle V$ (gas ideal clásico). Si se verifican las ecs. EQH+MD, se cumple el Teorema del Virial ($2E_T + E_{GR} = 0$), y por lo tanto, $\langle P \rangle = - E_{GR} / 3V$ ($E_{GR} \approx - G M^2 / R$). Para una estrella de tipo solar, la presión central $P_c \approx 2 \times 10^{16}$ Pa (modelo numérico) es unas 200 veces su presión promedio $\langle P \rangle$. Así, **un modelo “realista” debe ser capaz de explicar grandes variaciones de presión**
- Los gradientes de presión están descritos mediante la ec. EQH. Para radios muy pequeños ($r \rightarrow 0$), se puede mostrar fácilmente que $dP / dr = - (4\pi/3) G \rho_c^2 r$. Por otro lado, cerca de la superficie ($r \rightarrow R$), se tiene que $dP / dr = - G M \rho(r) / r^2$. Por consiguiente, **el EQH exige que el gradiente de presión dentro de una estrella es cero en el centro, varía inicialmente de forma lineal en r , y se aproxima a cero nuevamente cuando la densidad decrece cerca de la superficie**

Basándose en los puntos anteriores, Clayton sugirió que el gradiente de presión dentro de una estrella puede aproximarse como

$$dP / dr = - (4\pi/3) G \rho_c^2 r \exp(- r^2 / a^2),$$

donde a es un parámetro libre (como ρ_c) con dimensiones de longitud.

Este gradiente de Clayton es una descripción precisa para radios pequeños. Aunque el modelo funciona peor para radios grandes, también es capaz de reproducir un pequeño gradiente de presión cerca de la superficie de la estrella cuando $a \ll R$. El mínimo de dP/dr está situado en $r_0 = a / (2)^{1/2}$.

Integrando el gradiente de Clayton e imponiendo $P(R) = 0$, se obtiene el perfil de presión

→
$$P(r) = (2\pi/3) G \rho_c^2 a^2 [\exp(- r^2 / a^2) - \exp(- R^2 / a^2)] .$$

Mediante las ecs. EQH+MD ($x = r/a$):

→
$$m(r) = (4\pi/3) a^3 \rho_c \Phi(x) ,$$

→
$$\rho(r) = \rho_c [x^3 / \Phi(x)] \exp(- x^2) ,$$

$$\Phi(x) = [6 - 3(x^4 + 2x^2 + 2) \exp(- x^2)]^{1/2} .$$

Finalmente, usando la ecuación de estado para un gas ideal clásico (ionización total):

→
$$T(r) = m_{\text{eff}} P(r) / k \rho(r) , \quad m_{\text{eff}} = 2 m_H / (1 + 3X + Y/2)$$

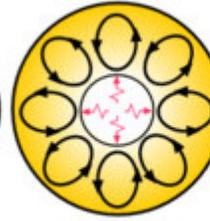
(h) Soluciones numéricas exactas

El libro *“Stellar interiors: physical principles, structure, and evolution”* (C. J. Hansen & S. D. Kawaler, Springer, 1994) contiene un “diskette” con programas sobre modelos estelares: código fuente en FORTRAN (ZAMS.FOR) y ejecutable (ZAMS.EXE).

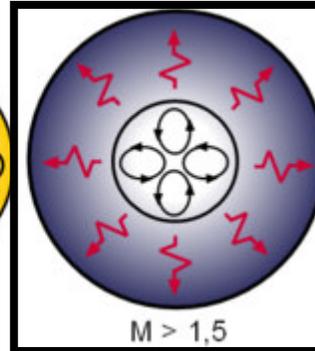
<http://personales.unican.es/goicol/>



$M < 0,5$



0,5 - 1,5



$M > 1,5$

**Problemas
48-51
($M = 3M_{\odot}$)**

ENTRADA

M (M_{\odot}): 3.

X e Y: .70 .29

Parámetros iniciales (para buscar una solución al conjunto de ecuaciones):

P_c (CGS): 1.141e17

T_c (K): 2.347e7

R (cm): 1.276e11

L (L_{\odot}): 89.35

Nombre Fichero de Salida: **datos**

¿Estudios de Pulsación? (Y/N): N

iteraciones



SALIDA (datos)

Parámetros finales:

P_c : 1.2920D+17

T_c : 2.4978D+07

R: 1.1956D+11

L (CGS): 5.1900D+35

T_{eff} : 1.5025D+04

LOG(T_{eff}): 4.1768

LOG(L/LSUN): 2.1300

Mas cosas ...

Datos en 200 capas (desde el centro hasta la superficie):

mrptdl.dat (incluye las primeras 100 capas)

	1-m/M	log(r)	log(P)	log(T)	log(ρ)	log(L)
2	9.98776351D-01	9.54801	17.1020	7.3939	1.5917	34.3998
3	9.97511452D-01	9.65203	17.0963	7.3917	1.5882	34.6665
4	9.96203968D-01	9.71394	17.0914	7.3898	1.5853	34.8236
5	9.94852527D-01	9.75867	17.0869	7.3880	1.5825	34.9343
6	9.93455716D-01	9.79400	17.0826	7.3863	1.5800	35.0194
7	9.92012082D-01	9.82340	17.0785	7.3847	1.5774	35.0882
8	9.90520130D-01	9.84870	17.0744	7.3831	1.5750	35.1458
9	9.88978322D-01	9.87101	17.0704	7.3816	1.5726	35.1950
10	9.87385079D-01	9.89105	17.0665	7.3800	1.5702	35.2380
...						
200	1.00000048D-10	11.07757	3.3317	4.1768	-8.9595	35.7152

+

otros.dat (incluye las primeras 100 capas)

	log(ϵ)	log(κ)
2	3.4712	-.4063	34.2923	.7808 .39173 .39173 1.7870
3	3.4310	-.4054	34.5479	.7611 .39179 .39179 1.6397
4	3.3963	-.4046	34.6976	.7482 .39184 .39184 1.5560
...				
200	-20.0000	.9371	.0000	.0000 .12498 .20259 .1250

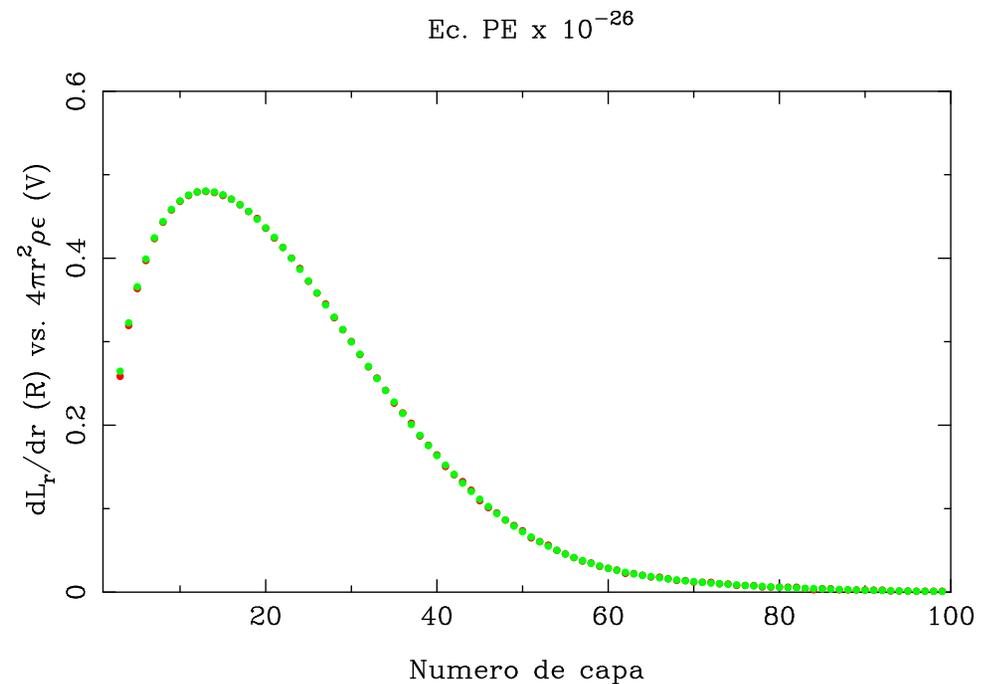
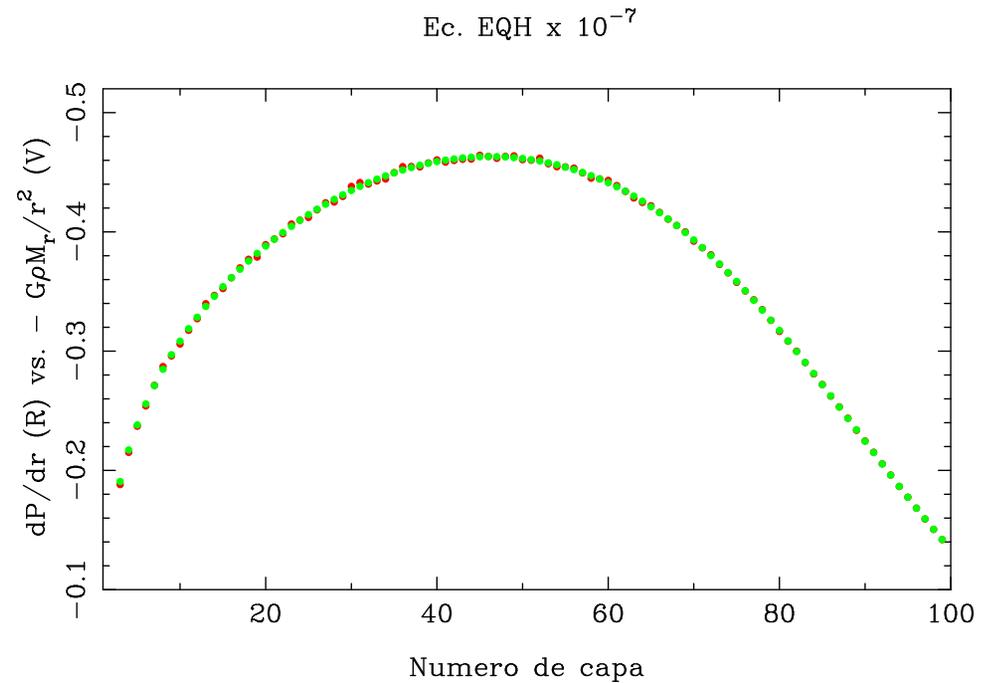
Analizando datos...

P48: Testar las ecs. de EQH y PE en las primeras 100 capas (test de autoconsistencia de la solución)

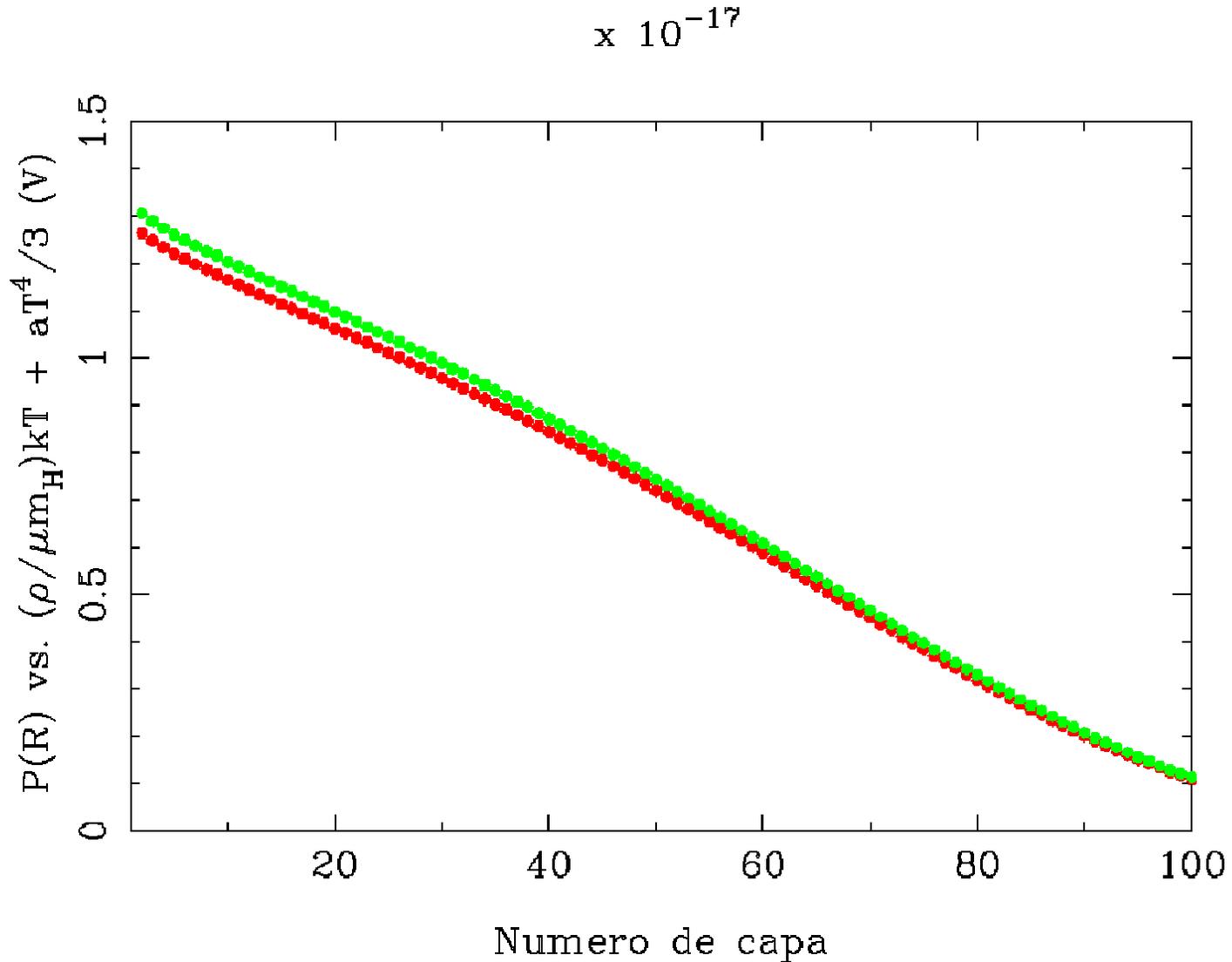
$$dP / dr = - G \rho m / r^2 \text{ (EQH)} \quad \longrightarrow$$

$$dL / dr = 4\pi r^2 \rho \varepsilon \text{ (PE)} \quad \longrightarrow$$

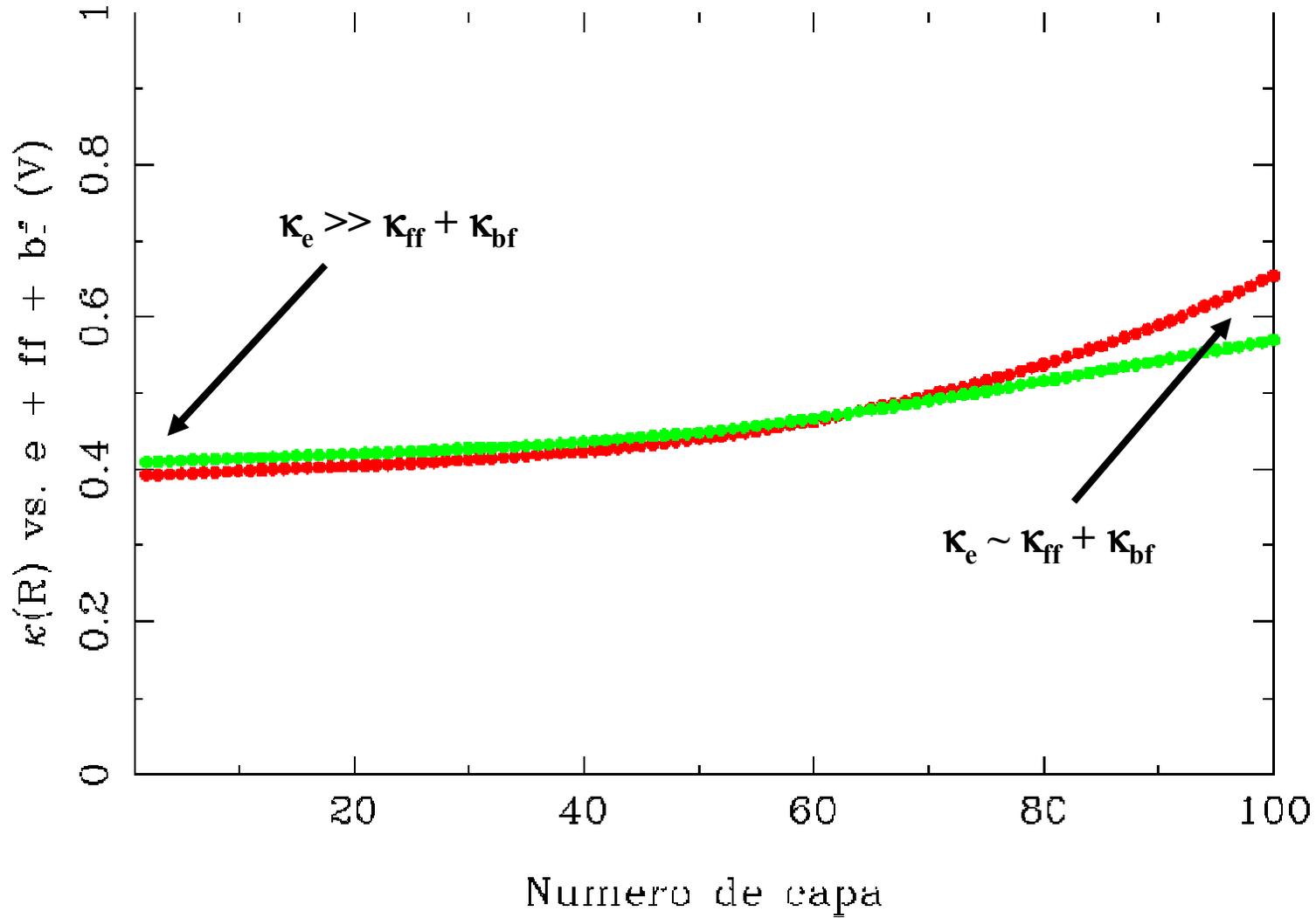
$$[G \text{ (CGS)} = 6.6732 \times 10^{-8} + \\ (dF/dr)_i = (1/2)(F_i - F_{i-1})/(r_i - r_{i-1}) + \\ (1/2)(F_{i+1} - F_i)/(r_{i+1} - r_i)]$$



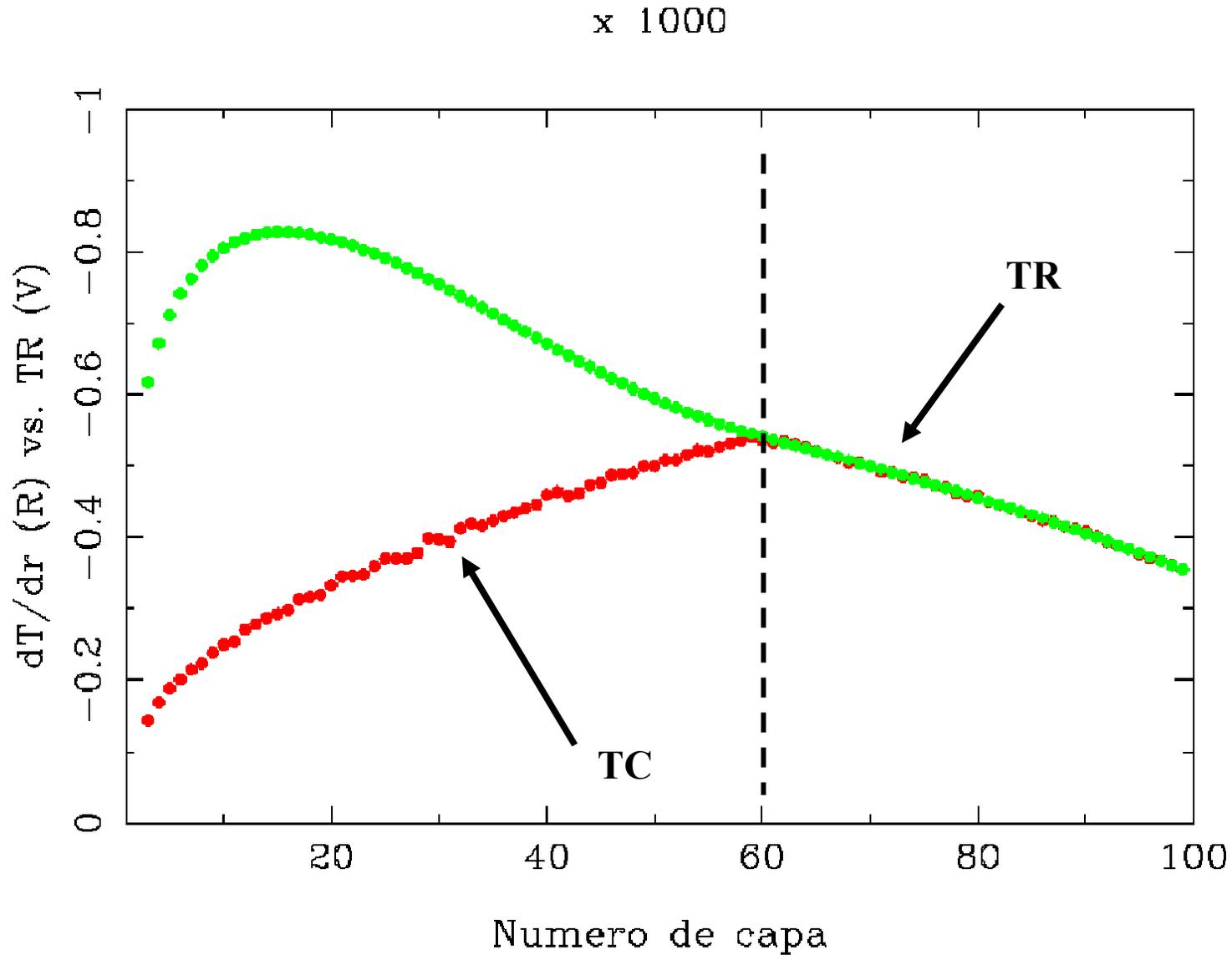
P49: Comparar P(r) de la solución exacta con el comportamiento de $P \approx kT (\rho / 2m_H) (1 + 3X + Y/2) + (1/3) aT^4$ [presión de un gas ideal de H, He, metales (totalmente ionizados) y electrones + presión de la radiación]



P50: Comparar $\kappa(r)$ de la solución exacta con el comportamiento de $\kappa \approx 0,2(1 + X) + (3,68 \times 10^{22} + 4,34 \times 10^{24} Z) (1 + X) \rho T^{-3,5}$ [opacidad global $\kappa_e + \kappa_{ff} + \kappa_{bf}$ aproximada]



P51: Comparar dT/dr de la solución exacta con el comportamiento $(dT/dr)_{\text{rad}} = - [3 \kappa \rho / 4ac T^3] (L / 4\pi r^2)$ [gradiente de temperatura asociado al transporte radiativo]



OBJETIVOS DEL TRABAJO

- Se usará el fichero **mrptdl.dat** para comparar el gradiente de temperatura dT/dr de la solución exacta de la estrella de $3M_{\odot}$ ($X = 0.70$, $Y = 0.29$) con el comportamiento $(dT/dr)_{\text{conv}} = - (1 - 1/\gamma) (T / P) (G \rho m / r^2)$ [tomar $\gamma = 5/3$; gradiente de temperatura asociado al transporte convectivo para un gas ideal completamente ionizado]. Discutir los resultados
- Usar el fichero **mrptdl.dat** para deducir el modelo de Clayton correspondiente a la solución exacta de la estrella de $3M_{\odot}$ ($X = 0.70$, $Y = 0.29$). En primer lugar, determinar la densidad central ρ_c mediante el perfil exacto de ρ . Entonces, ajustar la ley $-(4\pi/3) G \rho_c^2 r \exp(-r^2 / a^2)$ a los valores exactos de dP/dr , para determinar el valor de a . Comparar el parámetro a y el radio estelar R . Discutir si los perfiles de presión, densidad y temperatura de Clayton son o no realistas
- Usar el fichero **estrellas.dat** (con masas, composiciones y valores iniciales de P_c , T_c , R y L) para deducir parámetros de estructura finales mediante el ejecutable ZAMS.EXE, es decir, valores finales de P_c , T_c , R , L y $T_{\text{eff}} = T(R)$. Dibujar R vs. M y L vs. M (usar escalas log-log), y ajustar ambas relaciones a leyes de potencias: $R \propto M^{\alpha}$ y $L \propto M^{\beta}$. ¿Hay consistencia entre los resultados y observaciones?. Finalmente, construir un diagrama de Hertzsprung-Russell, y comprobar si la distribución de puntos sigue la secuencia principal