Funciones vectoriales de variable vectorial

Son aplicaciones entre espacios euclídeos, $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{f}: & X \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & Y \subset \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} & \longrightarrow & \mathbf{y} \end{array}$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ **e** $y_j = f_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $1 \leq j \leq n$

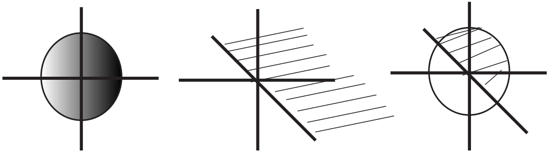
- $n = 1$, $m = 1$: **función real de variable real.**
- $n > 1$,$m = 1$: **función real de variable vectorial o función real de varias variables reales o función escalar de varias variables. A las funciones, f_j, reales de variable vectorial se les denomina funciones coordenadas.**
- $n > 1$,$m > 1$: **función vectorial de variable vectorial.**

$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n\}$, **es el dominio de definición.**
$Y = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \,|\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$, **es el conjunto imagen.**

$\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{y} = z$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
Es una función real de dos variables, el dominio es $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 - x^2 - y^2 \geq 0\right\}$**, que es un círculo de radio 1 y centro el origen.**

$\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{y} = z$, $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$.
Es una función real de dos variables, el dominio es $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y > 0\right\}$**, que es un semiplano, limitado por la recta** $x + y = 0$**, que no pertenece al dominio.**

$\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{y} = (f_1, f_2)$, $(f_1, f_2) = \left(\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \frac{1}{\sqrt{x+y}}\right)$.
El dominio es la intersección de los dos anteriores.

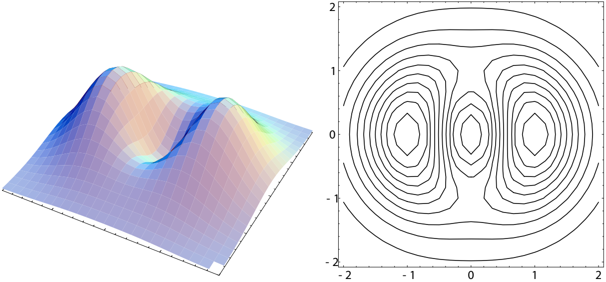


Gráficas

En el caso $n = 2$, $m = 1$, tenemos superficies en coordenadas cartesianas, su gráfica es

$$\left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = f\,(x,\, y) \in \mathbb{R},\ (x,\, y) \in X \subset \mathbb{R}^2\right\}$$

Si cortamos esta superficie por planos $z = k_i$, tenemos curvas, $k_i = f\,(x,\, y)$, que representamos en el plano $z = 0$, y que denominamos curvas de nivel



$$z = \left(3x^2 + y^2\right) e^{1-x^2-y^2}$$

Funciones reales: Sea "$\mathbf{a} \in X' \subset \mathbb{R}^n$", punto de acumulación de X',

$$\begin{array}{rccc} f: & X \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & Z \subset \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} & \longrightarrow & z \end{array}$$

f tiene límite en a y su valor es $l \in \mathbb{R}$, $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} = l$, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \textbf{tal que si } \mathbf{x} \in \mathrm{B}^*(\mathbf{a}, \delta) \bigcap X \to f(\mathbf{x}) \in \mathrm{B}(l, \varepsilon)$$

Funciones vectoriales: Sea "$\mathbf{a} \in X' \subset \mathbb{R}^n$", punto de acumulación de X',

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{f}: & X \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & Y \subset \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} & \longrightarrow & \mathbf{y} \end{array}$$

f tiene límite en a y su valor es $\mathbf{l}$, $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} = \mathbf{l}$, si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \textbf{tal que si } \mathbf{x} \in \mathrm{B}^*(\mathbf{a}, \delta) \bigcap X \to f(\mathbf{x}) \in \mathrm{B}(\mathbf{l}, \varepsilon)$$

El estudio del límite de una función vectorial

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{f}: & X \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & Y \subset \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} & \longrightarrow & \mathbf{y} \end{array}$$

se reduce al estudio de los límites de las m funciones componentes,

$$\mathbf{f} = \left(f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x}),\ \cdots,\ f_m(\mathbf{x})\right) \qquad \mathbf{l} = \left(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_m\right)$$

se tiene

$$\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \Leftrightarrow \exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = l_i,\ \ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

Límite: algunas propiedades

Sea

- **"a** $\in X' \subset \mathbb{R}^n$**", punto de acumulación.**
- $\mathbf{f}: \quad X \subset \mathbb{R}^n \quad \to \quad Y \subset \mathbb{R}^m$
- $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} = \mathbf{l}$

se cumple

1. **El límite si existe es único.**
2. **Si una función tiene límite está acotada,**
   $\exists M,\ r \in \mathbb{R}^+ \ / \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq M \ \ \forall \mathbf{x} \in \mathrm{B}^*(\mathbf{a},\ r)$
3. **El límite relativo a un subconjunto** $C \subset X$**, es también l,**
   $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ **tal que si** $\mathbf{x} \in \left(\mathrm{B}^*(\mathbf{a},\ \delta) \bigcap X\right) \bigcap C \to$
   $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{B}(\mathbf{l},\ \varepsilon)$.
   Son interesantes los límites a lo largo de sucesiones.
   Puede existir el límite relativo a un subconjunto y no existir el límite.

Funciones reales: **Sea "**$\mathbf{a} = (a_1,\, a_2) \in X' \subset \mathbb{R}^2$**", punto de acumulación de** X'**,** $\begin{array}{llll} f: & X \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & Z \subset \mathbb{R} \\ & (x,\, y) & \longrightarrow & z = f(x,\, y) \end{array}$.

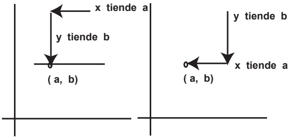
f **tiene límite** $l \in \mathbb{R}$ **en** $\mathbf{a} = (a_1,\, a_2)$**,** $\lim\limits_{(x,\, y) \to (a_1,\, a_2)} f(x,\, y) = l$**, si**

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \textbf{tal que si } \mathbf{x} \in \mathrm{B}^*(\mathbf{a},\, \delta) \to f(\mathbf{x}) \in \mathrm{B}^*(l,\, \varepsilon)\,.$$

A veces para demostrar que no existe límite se recurre al límite relativo a través de determinados subconjuntos, dando lugar a los llamados límites:

- **iterados**
- **radiales o direccionales**
- **a lo largo de curvas**

El límite se suele denominar límite doble.



$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,\ y)\right) \qquad \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,\ y)\right)$$

Sea $f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} & \textbf{si} \quad x+y \neq 0 \\ 0 & \textbf{si} \quad x+y = 0 \end{cases}$ **. Los iterados en** $(0,\ 0)$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{-y}{y}\right) = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(1) = 1$$

Luego no hay límite

Sea $f\,(x,\ y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y} & \textbf{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \textbf{si} \quad y = 0 \end{cases}$ **. Los iterados en** $(0,\ 0)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{y} \right) = \lim_{x \to 0} (\nexists) = \nexists \qquad \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \to 0} (0) = 0$$

Sin embargo si existe límite, y es cero, ya que

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{y} - 0 \right| = \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{y} \right| \leq |x| < \varepsilon$$

luego

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists \delta = \varepsilon \in \mathbb{R}^+$**tal que si** $\mathbf{x} \in \mathrm{B}^*\,(0,\ 0\,()\,,\ \delta) \to f\,(\mathbf{x}) \in \mathrm{B}^*\,(0,\ \varepsilon)\,.$

Si existen los reiterados, y son iguales, puede existir límite.

Límites radiales

Son límites relativos a través del subconjuto $y - b = m(x - a)$, es decir, a lo largo de rectas que pasan por el punto (a, b) Ejemplo:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{(x,\, y) \to (0,\, 0) \\ y = \lambda x}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x[\lambda x]}{x^2 + [\lambda x]^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

que depende de λ. Luego $\nexists \lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$.

Sin embargo los límites reiterados existen y son iguales. es

$$\lim_{x \to 0} \left[\lim_{y \to 0} f(x, y) \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{0}{x^2} \right] = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y \to 0} \left[\lim_{x \to 0} f(x, y) \right] = \lim_{y \to 0} \left[\frac{0}{y^2} \right] = \lim_{y \to 0} 0 = 0$$

A veces se hace estudia el límite a lo largo de una curva. Sea

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si} \quad (x,\, y) \neq (0,\, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,\, y) = (0,\, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{0}{x^2+0}\right] = \lim_{x\to 0}[0] = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{0}{0+y^4}\right] = \lim_{y\to 0}[0] = 0$$

Puede existir límite doble.
Veamos los direccionales:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x\,[mx]^2}{x^2+[mx]^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x\,[m]^2}{1+x^2\,[m]^4} = 0$$

Puede existir límite doble.

Por tanto hemos de seguir estudiando para ver si existe límite doble. Hagamos un acercamiento a lo largo de una parábola genérica: $y^2 = mx$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y^2=mx}} \frac{xy}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,[mx]}{x^2+[mx]^2} = \lim_{x\to 0} \frac{[m]}{1+[m]^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Cómo depende de m **no existe límite doble.**

Procedimiento general para el límite doble

Sea $\begin{cases} x = a + \rho\cos\theta \\ y = b + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ **,** $\rho > 0$, $\theta \in (0,\, 2\pi]$.

Es $\lim\limits_{(x,\,y)\to(a_1,\,a_2)} f(x,\,y) = l \Leftrightarrow \exists F(\rho)\,, \Big/ \lim\limits_{\rho\to 0} F(\rho) = 0$**, siendo**

$$|f(a + \rho\cos\theta,\; b + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) - l| \leq F(\rho)$$

Ejemplo: $f(x,\,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2 + y^4}$, $(x,\,y) \neq (0,\,0)$.

- **Calculamos los reiterados, si existen y son iguales, pasamos a**
- **calcular los direccionales,si existen y son iguales**
- **¿existe límite doble?**

si existe ha de ser cero (valor de los reiterados y direccionales),

$$|f(a + \rho\cos\theta,\; b + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) - 0| = \left|\frac{\rho^3\left(\cos^3\theta + \mathrm{sen}^3\,\theta\right)}{\rho^2\left(1 + \rho^2\,\mathrm{sen}^4\,\theta\right)}\right| \leq$$

$$\left|\frac{\rho\,(1+1)}{1 + \rho^2\,\mathrm{sen}^4\,\theta}\right| \leq \left|\frac{2\rho}{1}\right| = 2\rho \to 0$$

Obtener el dominio de definición y el límite en $(0, 0)$**, si existe, de** $\mathbf{f}: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$**,** $\mathbf{f} = \left(\dfrac{x^2+y^2}{1+x+y}, \sqrt{x^2+y^2} \right)$**.**

- **El dominio es la intersección de los dominios, siendo:**
  - **El dominio de** $f_1(x, y) = \dfrac{x^2+y^2}{1+x+y}$ **es** $\mathbb{R}^2 \bigcap \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1+x+y = 0 \right\}^c$
  - **El dominio de** $f_2(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ **es** $\mathbb{R}^2$

Luego $D(\mathbf{f}) = \mathbb{R}^2 \bigcap \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1+x+y = 0 \right\}^c$

El cálculo del límite se traduce en el cálculo de los límites de las funciones reales f_1 **y** f_2**.**

El límite de f_2 **es trivial e igual a cero: aplicando la definición de límite obtenemos** $\delta = \varepsilon$**.**

Ejemplo de límite de función vectorial (2)

En el límite de f_1, tenemos

- **iterados**
  - $$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{1+x+y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{y^2}{1+y}\right)=\frac{0}{1}=0$$
  - $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{1+x+y}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1+x}\right)=\frac{0}{1}=0$$
- **direccionales o radiales**
  - $$\lim_{\substack{(x,\, y)\to(0,\, 0)\\ y=\lambda x}}\frac{x^2+y^2}{1+x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+[\lambda x]^2}{1+x+[\lambda x]}=0$$
- **Determinemos $F(\rho)$, por lo anterior el límite e $l=0$, luego**
  - $$\left|\frac{\rho^2}{1+\rho\left(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\right)}-0\right|=\left|\frac{\rho^2}{1+\rho\left(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta\right)}\right|$$

    esta expresión toma un valor máximo cuando el denominador, como función de θ, tome un valor mínimo.

$g(\theta) = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \to g^{(1)}(\theta) = -\operatorname{sen}\theta + \cos\theta \to g^{(1)}(\theta) = 0 \to \theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}$;

$g^{(2)}(\theta) = -\cos\theta - \operatorname{sen}\theta \to g^{(2)}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$; $g^{(2)}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$g(\theta)$ **tiene un máximo en** $\theta = \frac{\pi}{4}$ **de valor** $\sqrt{2}$

$g(\theta)$ **tiene un mínimo en** $\theta = \frac{3\pi}{4}$ **de valor** $-\sqrt{2}$

Por tanto $1 + \rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \geq 1 - \sqrt{2}\rho$ **y este valor, si** $\rho < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$**, no se anula y permanece acotado inferiormente por un número positivo, por lo que**

$$\lim_{\rho\to 0}\left|\frac{\rho^2}{1 + \rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}\right| = 0$$

Concluimos finalmente que

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^2 + y^2}{1 + x + y} = 0$$

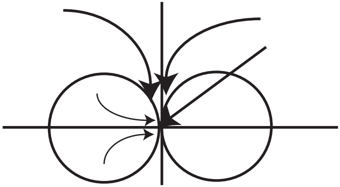
y

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \left(\frac{x^2 + y^2}{1 + x + y},\ \sqrt{x^2 + y^2}\right) = (0,\ 0)$$

Sea $f(x,\,y) \equiv \left(x^2+2x+y^2\right)\left(x^2-2x+y^2\right)$**, definida en** M**, una aplicación de** $\mathbb{R}^2$ **en** $\mathbb{R}$**. Sea:** $M=\mathbb{R}^2-\left\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\,|x=0\right\}$ **. Se define la aplicación** $sig.[f(x,\,y)]$ **de la forma siguiente:**

$$sig.[f(x,\,y)] = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad f(x,y)>0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x,\,y)=0 \\ -1 & \text{si} \quad f(x,\,y)<0 \end{cases}$$

Determinar el límite direccional, si existe, en $(0,\,0)$ **de la función:** $sig.[f(x,\,y)]$**. ¿ Existe límite doble, es decir** $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} sig.[f(x,\,y)]$ **?**



Cualquier acercamiento radial o direccional al origen es a través de la zona en la que la función toma el valor -1, luego:

el límite direccional tiene ese valor.

La única excepción es la recta $x = 0$, mas este subconjunto del plano no pertenece al dominio de definición de la función.

No existe $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} sig.\left[f\left(x,\ y\right)\right]$ **ya que si nos acercamos al origen por la circunferencia** $\left(x-2\right)^2+y^2=4$**, es decir** $x^2-4x+y^2=0$ **tenemos:**

$$f\left(x,\ y\right)\equiv\left(x^2+2x+y^2\right)\left(x^2-2x+y^2\right)=\left(4x+2x\right)\left(4x-2x\right)=12x^2>0$$

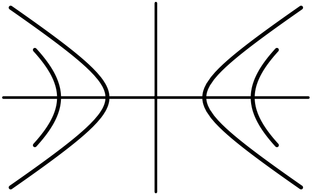
y por tanto: $sig.\left[f\left(x,\ y\right)\right]=1$**.**

Supuesto $f(x, y) \equiv \left(x^2 - 1 - y^2\right)\left(x^2 - 4 - y^2\right)$**, determinar el límite direccional, si existe, en los puntos:**

$$(0, 0), \quad (-1, 0), \quad (1, 0), \quad (-2, 0), \quad (2, 0)$$

de la función: $sig.\left[f(x, y)\right]$ **definida en** $M \equiv \mathbb{R}^2$**. Existe límite**

direccional en el primer punto y vale $+1$**, y no existe en ninguno de los cuatro restantes.**



$$\mathbf{f}: \begin{array}{ccc} X \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & Y \subset \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} & \longrightarrow & \mathbf{y} \end{array}$$

es continua en $\mathbf{a} \in X$ **si**

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \textbf{tal que si } \mathbf{x} \in \mathrm{B}(\mathbf{a}, \delta) \bigcap X \to f(\mathbf{x}) \in \mathrm{B}(\mathbf{f}(\mathbf{a}), \varepsilon)$$

Si $\mathbf{a} \in X'$**, la definición de continuidad se traduce en que**

- $\exists \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$
- $\mathbf{l} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$$

Por lo visto, si $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x}))$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f_1(\mathbf{x}), \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f_2(\mathbf{x}), \cdots, \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f_m(\mathbf{x})\right) = (f_1(\mathbf{a}), f_2(\mathbf{a}), \cdots, f_m(\mathbf{a}))$$

- **Si $\mathbf{f}, \mathbf{g}: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son continuas en $\mathbf{a} \in X$, la combinación lineal: $\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es continua en a.**
- **$f, g : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas en $\mathbf{a} \in X$, el producto $f \times g$ es continuo en a**
- **$f, g : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas en $\mathbf{a} \in X$, $g(\mathbf{a}) \neq 0$, el cociente $\frac{f}{g}$ es continuo en a**

Función compuesta:
Sea $\mathbf{f}: X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{g}: Y \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, se define la función compuesta

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

Si f es continua en $\mathbf{a} \in X$ y g es continua en $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in Y$ entonces $\mathbf{h} \equiv \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es continua en a

Propiedades

- Una función es continua en un conjunto cuado lo es en todos y cada uno de los puntos del conjunto.
- Sea $\mathbf{f}: \quad X \subset \mathbb{R}^n \quad \longrightarrow \quad Y \subset \mathbb{R}^m$, siendo $Y = \mathbf{f}(X)$, que es continua en X. Entonces, si X es cerrado y acotado, también $Y = \mathbf{f}(X)$ es cerrado y acotado.
- Teorema de Weierstrass

  Sea $f: \quad X \subset \mathbb{R}^n \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$ continua en X, siendo X un conjunto cerrado y acotado. Entonces el conjunto $Y = \{f(\mathbf{x}) \,|\mathbf{x} \in X\} \subset \mathbb{R}$ posee un máximo y un mínimo, es decir, existen dos puntos $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ pertenecientes a X tales que

  $$\forall \mathbf{x} \in X \Rightarrow f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2)$$

  Esta propiedad nos permitirá determinar la existencia de máximos y mínimos de funciones reales de variable vectorial o de variable real.