SOLUCIONES. Ejercicios Series de Fourier

1.- Determinar los coeficientes de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} -\pi, & \text{para } -\pi < t < 0, \\ \pi, & \text{para } 0 < t < \pi, \\ 0, & \text{para } t = 0, \pi, \end{cases}$$

para un periodo $T = 2\pi$.

Solución: Estamos, lógicamente, considerando una extensión periódica de esta función. Trivialmente, $a_0 = 0$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\cos mt\,dt\right] + \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} \pi\cos mt\,dt\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{-\pi}{m}\sin mt|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{m}\sin mt|_{0}^{\pi} = 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\sin mt\,dt\right] + \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} \pi\sin mt\,dt\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{m}\cos mt|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\frac{-\pi}{m}\cos mt|_{0}^{\pi} = \frac{2}{m} - \frac{2}{m}\cos m\pi \\ &= \frac{2}{m}\left(1-(-1)^m\right) = \begin{cases} \frac{4}{m}, & \text{si } m \text{ es impar,} \\ 0, & \text{si } m \text{ es par.} \end{cases} \end{aligned}$$

De modo que la serie de Fourier de f(t) es:

$$f(t) = 4\sin t + \frac{4}{3}\sin 3t + \frac{4}{5}\sin 5t + ...$$

Los polinomios trigonométricos

$$\phi_1(t) = 4\sin t,\ \phi_2(t) = 4\sin t + \frac{4}{3}\sin 3t,\ \phi_3(t) = 4\sin t + \frac{4}{3}\sin 3t + \frac{4}{5}\sin 5t$$

son aproximaciones a f(t) que son progresivamente mejores según va creciendo el número de términos.

La figura ilustrando la comparación puede verse en la Lectura 4 donde este ejercicio está resuelto como ejemplo de cálculo.

∎

2.- La función $f(t) = \cos^2 t$ es periódica, de periodo 2π. Determinar su serie de Fourier. Indicación: este ejercicio es casi trivial utilizando identidades trigonométricas.

Solución: Efectivamente si recordamos que

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2},$$

nos podemos dar cuenta de que esta expresión nos proporciona, precisamente, la serie de Fourier de la función. Los únicos coeficientes de la serie de Fourier no nulos son entonces $a_0 = 1$ y $a_2 = 1/2$. En la figura se muestra la comparación del polinomio trigonométrico $\phi_2 = 1/2 + \cos(2t)/2$ con la función (coinciden exactamente, lógicamente).

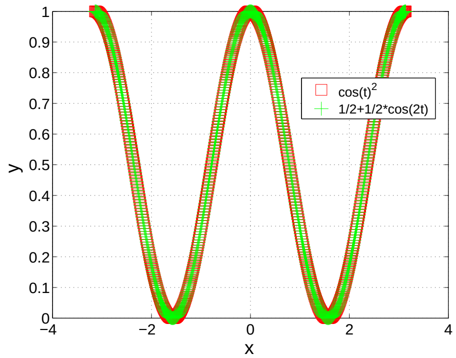

Figura 1:

3.- La función $f(t) = \sin^3 t$ es periódica, de periodo 2π. Determinar su serie de Fourier.

Solución:

Podemos darnos cuenta de que esta función es impar (dado que la función $\sin(t)$ lo es), por lo que sólo serán no nulos los coeficientes asociados a las funciones seno (de todos modos, se puede hacer el cálculo explícito de los coeficientes a_k como comprobación).

Los coeficientes que acompañan a la función seno vendrán dados por:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3(t)\sin(kt)\,dt\right] = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\frac{(1-\cos(2t))}{2}\sin(kt)\,dt\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\sin(kt)\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\cos(2t)\sin(kt)\,dt\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[I_1 - I_2\right] \end{aligned}$$

Directamente, la primera de las integrales I_1 vale π si $k = 1$ y 0 en otro caso (recordemos que es una de las integrales trigonométricas incluidas en la Lectura 4). Para hacer la segunda integral consideramos que $\cos(u) - \cos(v) = -2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)$, de modo que:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\sin(kt)\cos(2t)\,dt = \frac{-1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left((k+1)t\right) - cos\left((k-1)t\right)\right]\cos(2t)\,dt = \\ &= \frac{-1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left((k+1)t\right)\cos(2t)\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} cos\left((k-1)t\right)\cos(2t)\,dt\right] = \frac{-1}{2}\left[I_{2,a} + I_{2,b}\right]. \end{aligned}$$

Otra vez directamente, la integral $I_{2,a}$ vale π si $k = 1$ y 0 en otro caso; la segunda integral $I_{2,b}$ vale π si $k = 3$ y 0 en otro caso.

Resumiendo, obtenemos: $b_1 = 3/4$ y $b_3 = -1/4$ (el resto de coeficientes son cero). Luego

$$f(t) = \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t).$$

En la figura 2 se muestra la comparación entre ambas expresiones (que coinciden exactamente como sucedía en ele ejercicio anterior).

4.- La función

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{para } -\pi < t < \pi, \\ 0, & \text{para } t = \pi, \end{cases}$$

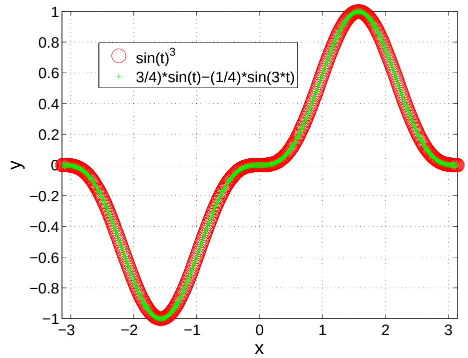

Figura 2:

puede ser extendida a una función periódica, de periodo 2π. Determinar la serie de Fourier de esta extensión.

Solución: Empecemos calculando los coeficientes que acompañan a los cosenos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt\right] = 0,$$

y

$$a_m = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} t\cos mt\,dt\right] = (\text{integrando por partes}) = 0.$$

Este resultado era de esperar ya que la función del ejercicio es impar.

Respecto a los coeficientes que acompañan a las funciones seno:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(kt)\,dt\right] = (\text{Integrando por partes}) = \frac{-2\cos(k\pi)}{k} = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}.$$

Luego,

$$f(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) + \frac{2}{3}\sin(3t) - \frac{1}{2}\sin(4t) + ...$$

En la figura 3 se muestra la comparación entre la función del enunciado y su serie de Fourier con los 4 primeros términos.

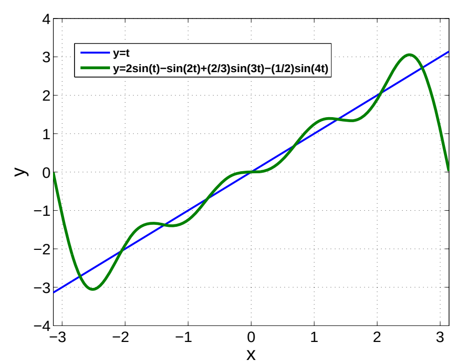

Figura 3:

■

5.- La función

$$f(t) = |t|, \;\; t \in [-\pi, \pi],$$

puede ser extendida a una función periódica, de periodo 2π. Determinar la serie de Fourier de esta extensión.

Solución:

La función de este ejercicio es par por lo que es de esperar que los coeficientes que acompañan a las funciones seno sean nulos. De todos modos, se puede comprobar fácilmente que es así:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(kt)\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} t\sin(kt)\,dt + \int_{0}^{\pi} t\sin(kt)\,dt\right] = 0.$$

Vemos que la integral es 0 sin más que hacer el cambio $t \to -t$ en una cualquiera de las dos integrales.

Respecto a los coeficientes que acompañan a los cosenos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} t\,dt + \int_{0}^{\pi} t\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left(2\frac{\pi^2}{2}\right) = \pi,$$

y

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(kt)\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} t\cos(kt)\,dt + \int_{0}^{\pi} t\cos(kt)\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[2\frac{((-1)^k - 1)}{k^2}\right].$$

Por tanto, de estos coeficientes sólo los impares serán no nulos. Finalmente, los primeros términos de la serie de Fourier de la función serían:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos t - \frac{4}{9\pi}\cos(3t) - \frac{4}{25\pi}\cos(5t) - \ldots$$

En la figura 4 se muestra la comparación entre el polinomio trigonométrico $\phi(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos t - \frac{4}{9\pi}\cos(3t) - \frac{4}{25\pi}\cos(5t)$ y la función.

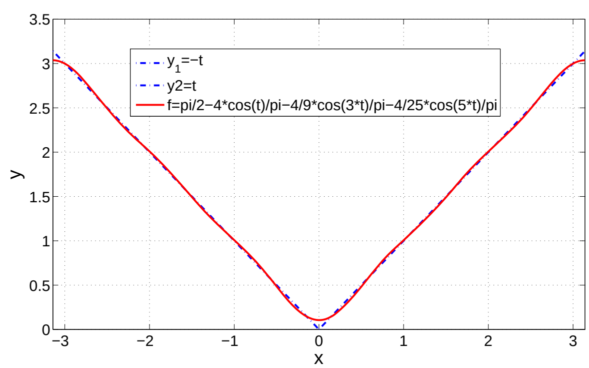

Figura 4:

∎

6.- Determinar las series de Fourier seno y coseno de

1.
$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{para } 0 \le t \le \pi/2, \\ \pi - t, & \text{para } \pi/2 < t \le \pi. \end{cases}$$

$f(t)$ está definida en $[0, \pi]$.

Solución:

En las expresiones vistas en teoría tenemos que hacer $L = \pi$. Los coeficientes de la serie de Fourier seno de la función vendrán dados entonces por:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} t\sin(kt)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\sin(kt)\,dt\right] = (\text{Integración por partes}) = \frac{4\sin(k\pi/2)}{\pi k^2},$$

y la **serie de Fourier seno** de $f(t)$ será entonces

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sin t - \frac{4}{9\pi}\sin(3t) + \frac{4}{25\pi}\sin(5t) - \frac{4}{49\pi}\sin(7t) + ...$$

Respecto a la serie de Fourier coseno de la función, en primer lugar calculamos a_0:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} t\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\,dt\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi}{2}.$$

El resto de coeficientes a_k vendrán dados por:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} t\cos(kt)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(kt)\,dt\right] = (\text{Integración por partes}) = \\ &= \frac{2}{\pi k^2}\left[2\cos(k\pi/2) - 1 + (-1)^{k+1}\right], \end{aligned}$$

de modo que la **serie de Fourier coseno** de $f(t)$ viene dada por:

$$f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos(2t) - \frac{2}{9\pi}\cos(6t) - ...$$

En la figura 5 se muestra la comparación de la función con las series de Fourier seno y coseno (truncadas en el número de términos que se indica en la figura).

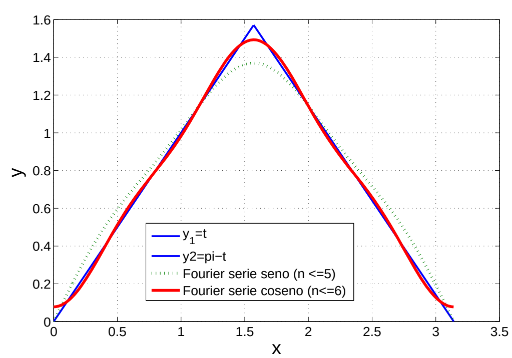

Figura 5:

∎

2.

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{para } 0 \le t < 5, \\ 10 - t, & \text{para } 5 \le t \le 10. \end{cases}$$

$f(t)$ está definida en $[0,\, 10]$.

Solución:

En este caso hemos de tomar $L = 10$ en las expresiones vistas en las sesiones de teoría.

Los coeficientes de la serie de Fourier seno de la función vendrán dados entonces por:

$$b_k = \frac{2}{10}\left[\int_0^5 t \sin\left(\frac{k\pi t}{10}\right)\, dt + \int_5^{10} (10-t)\sin\left(\frac{k\pi t}{10}\right)\, dt\right] = (\text{Integración por partes}) = \frac{40\sin(k\pi/2)}{\pi^2 k^2},$$

y la **serie de Fourier seno** de $f(t)$ será entonces

$$f(t) = \frac{40}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) - \frac{40}{9\pi^2}\sin\left(\frac{3\pi t}{10}\right) + \ldots$$

Respecto a la serie de Fourier coseno de la función, en primer lugar calculamos a_0:

$$a_0 = \frac{2}{10}\left[\int_0^5 t\, dt + \int_5^{10} (10-t)\, dt\right] = 5.$$

El resto de coeficientes a_k vendrán dados por:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{10}\left[\int_0^5 t\cos(kt)\, dt + \int_5^{10} (10-t)\cos(kt)\, dt\right] = (\text{Integración por partes}) = \\ &= \frac{20}{\pi^2 k^2}\left[2\cos(k\pi/2) - 1 + (-1)^{k+1}\right], \end{aligned}$$

de modo que la **serie de Fourier coseno** de $f(t)$ viene dada por:

$$f(t) = \frac{5}{2} - \frac{20}{\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi t}{10}\right) + \ldots$$

En la figura 6 se muestra la comparación de la función con las series de Fourier seno y coseno (truncadas en el número de términos que se indica en la figura).

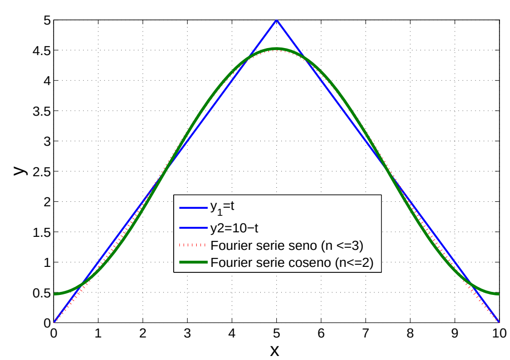

Figura 6:

∎

3.

$$f(t) = t(\pi - t)$$

$f(t)$ está definida en $[0,\, \pi]$.

Solución:

Como en el primer apartado de este ejercicio, en las expresiones vistas en teoría tenemos que hacer $L = \pi$. Los coeficientes de la serie de Fourier seno de la función vendrán dados entonces por:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\sin(kt)\,dt = (\text{Integración por partes}) = \frac{4\left(1+(-1)^{k+1}\right)}{\pi k^3},$$

y la **serie de Fourier seno** de $f(t)$ será entonces

$$f(t) = \frac{8}{\pi}\sin t + \frac{8}{27\pi}\sin(3t) + \frac{8}{125\pi}\sin(5t) + ...$$

Respecto a la serie de Fourier coseno de la función, en primer lugar calculamos a_0:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\,dt = \frac{\pi^2}{3}.$$

El resto de coeficientes a_k vendrán dados por:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\cos(kt)\,dt = (\text{Integración por partes}) = \frac{-2\left(1+(-1)^{k}\right)}{k^2},$$

de modo que la **serie de Fourier coseno** de $f(t)$ viene dada por:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{6} - \cos(2t) - \frac{1}{4}\cos(4t) - \frac{1}{9}\cos(6t)...$$

En la figura 7 se muestra la comparación de la función con las series de Fourier seno y coseno (truncadas en el número de términos que se indica en la figura).

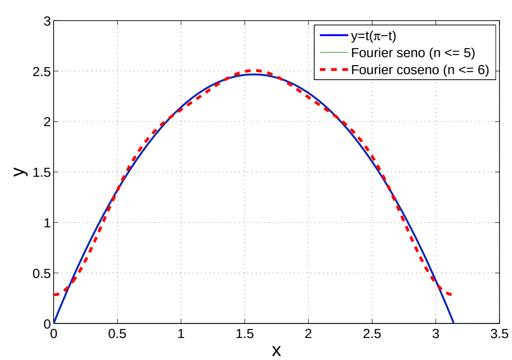

Figura 7:

∎

7.- Desarrollar e^{-x} en serie de senos y cosenos entre $[0, \pi]$, tomando este intervalo como período.

Solución:

La gráfica de la función en su período es la de la izquierda y, con el factor de escala, en el período $[0, 2\pi]$ la de la derecha en la figura 8

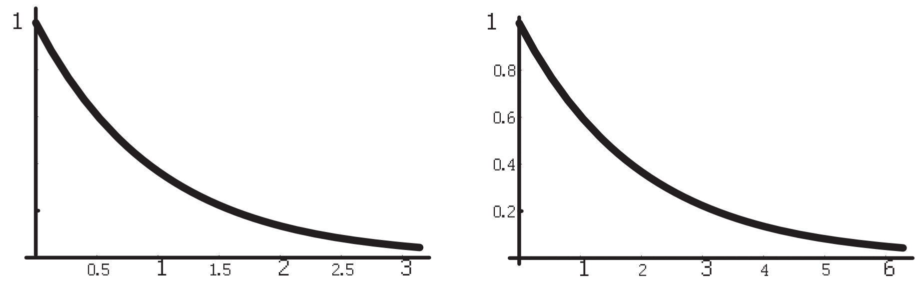

Figura 8:

La función que nos dan tiene un período π, y tenemos $\left\{\begin{array}{l} x \longleftrightarrow \pi \\ u \longleftrightarrow 2\pi \end{array}\right\}$, por lo que trabajamos con la función $e^{-\frac{u}{2}}$.

Tenemos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}\,u$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{u}{2}}\cos nu\,\mathrm{d}\,u$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{u}{2}}\operatorname{sen} nu\,\mathrm{d}\,u$$

Recordando

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}\,x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[b\operatorname{sen} bx + a\cos bx\right] + C$$
$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,\mathrm{d}\,x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\operatorname{sen} bx - b\cos bx\right] + C$$

tenemos

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{\pi}(-2)\,e^{-\frac{u}{2}}\Big|_0^{2\pi} = -\frac{2}{\pi}\left(e^{-\pi}-1\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{u}{2}}\cos nu\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{\pi}\,\frac{e^{-\frac{u}{2}}}{\frac{1}{2^2}+n^2}\left[n\operatorname{sen} nu - \frac{1}{2}\cos nu\right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{e^{-\pi}}{\frac{1}{2^2}+n^2}\left[0-\frac{1}{2}\right] - \frac{1}{\pi}\frac{1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\left[0-\frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{u}{2}}\operatorname{sen} nu\,\mathrm{d}\,u = \frac{1}{\pi}\frac{e^{-\frac{u}{2}}}{a^2+b^2}\left[a\operatorname{sen} bu - b\cos bu\right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{e^{-\pi}}{\frac{1}{2^2}+n^2}\left[0-n\right] - \frac{1}{\pi}\frac{1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\left[0-n\right] = -\frac{n}{\pi}\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}$$

luego

$$e^{-\frac{u}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{2}{\pi}\left(e^{-\pi}-1\right) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\cos nu - \frac{n}{\pi}\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\operatorname{sen} nu$$

y volviendo a la variable x

$$e^{-x} = -\frac{1}{2}\frac{2}{\pi}\left(e^{-\pi}-1\right) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\cos 2nx - \frac{n}{\pi}\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\operatorname{sen} 2nx$$

En la figura 9 se muestra la comparación de la función con el polinomio trigonométrico que incluye los términos hasta $n = 2$ (inclusive).

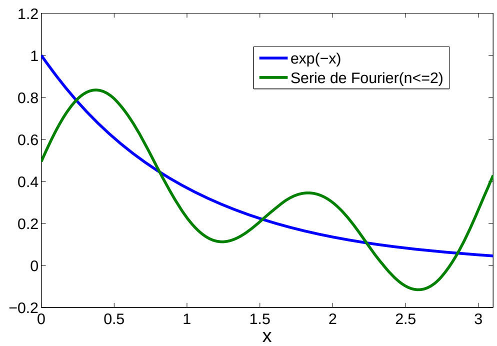

Figura 9:

$\blacksquare$

8.- Desarrollar e^{-x} en serie de senos y cosenos entre $[0, \pi]$, basándose en la expresión compleja.

Solución:

Tenemos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

recordando

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad\qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

es

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

que podemos reordenar en potencias de e^{ikx}, $k \in \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{inx}\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) + e^{-inx}\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)$$

si

$$\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = c_n \qquad\qquad \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} = c_{-n} \qquad\qquad \frac{a_0}{2} = c_0$$

tenemos

$$f(x) = \cdots c_{-n}e^{-inx} + \cdots + c_{-2}e^{-i2x} + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1e^{ix} + c_2e^{i2x} + \cdots + c_ne^{inx} + \cdots$$

si multiplicamos la igualdad anterior por e^{ipx}, $p \in \mathbb{Z}$ y fijo

$$f(x)\,e^{ipx} = \left(\cdots c_{-n}e^{-inx} + \cdots + c_{-2}e^{-i2x} + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1e^{ix} + c_2e^{i2x} + \cdots + c_ne^{inx} + \cdots\right)e^{ipx}$$

e integramos entre 0 y 2π tenemos integrales del siguiente tipo en el segundo miembro

$$\int_0^{2\pi} c_n e^{inx} e^{ipx} = c_n \left.\frac{e^{i(n+p)x}}{i(n+p)}\right|_0^{2\pi} = c_n \frac{e^{i(n+p)2\pi} - 1}{i(n+p)} = 0 \text{ si } n + p \neq 0$$

si $n + p = 0$

$$\int_0^{2\pi} c_n e^{inx} e^{-inx}\, \mathrm{d}\, x = 2\pi c_n$$

luego es

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}\, x = 2\pi c_n \to c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}\, x$$

Si hacemos el ejercicio será

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{u}{2}}\, \mathrm{d}\, u = -\frac{1}{2\pi} 2e^{-\frac{u}{2}}\Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{\pi}\left(e^{-\pi}-1\right)$$

y

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{u}{2}} e^{-inu}\, \mathrm{d}\, u = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-\frac{u}{2}} e^{-inu}}{-\frac{1}{2}-in}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-\pi}e^{-i2\pi n}}{-\frac{1}{2}-in} - \frac{1}{-\frac{1}{2}-in}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\right]\left[\frac{1}{2}-in\right]$$

teniendo en cuenta que

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

es

$$a_n = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\right]\left[\frac{1}{2}-in\right] - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\right]\left[\frac{1}{2}-i(-n)\right] = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\right]$$

y

$$b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right)$$

es

$$\frac{1}{i} b_n = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\right]\left[\frac{1}{2}-in\right] + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\right]\left[\frac{1}{2}-i(-n)\right] = \frac{i2n}{2\pi}\left[\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\right]$$

luego

$$b_n = -\frac{n}{\pi}\left[\frac{e^{-\pi}-1}{\frac{1}{2^2}+n^2}\right]$$

■

9.- Obtener el desarrollo de Fourier de la función $f(t) = t^2 - t$ en el intervalo $[-L, L]$ considerando su extensión periódica con periodo $2L$.

Los coeficientes de Fourier de la función vendrán dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\, dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} (t^2 - t)\, dt = 2\frac{L^2}{3},$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\, dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} (t^2 - t)\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\, dt = \frac{4(-1)^k L^2}{k^2\pi^2},$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\, dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} (t^2 - t)\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\, dt = \frac{2L(-1)^k}{k\pi}.$$

De modo que la serie de Fourier de la función será:

$$f(t) = \frac{L^2}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{4(-1)^m L^2}{m^2\pi^2} \cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) + \frac{2L(-1)^m}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi t}{L}\right) \right].$$

Fijando, por ejemplo, el valor de L a 1 obtenemos:

$$f(t) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t) + \frac{1}{\pi}\cos(2\pi t) + ... - \frac{2}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{1}{\pi}\sin(2\pi t) + ...$$

En la gráfica de la figura 10 se muestra la comparación de la función con el polinomio trigonométrico $\phi_5(t) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t) + \frac{1}{\pi}\cos(2\pi t) - \frac{2}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{1}{\pi}\sin(2\pi t)$.

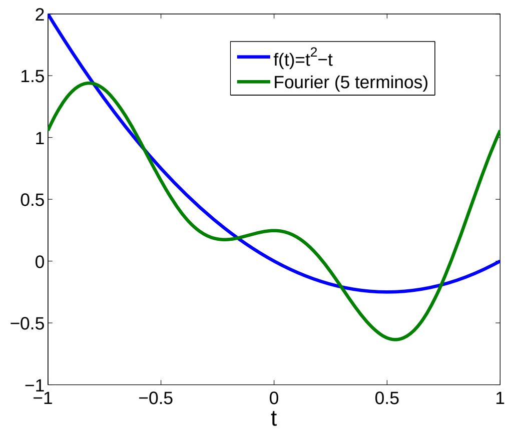

Figura 10:

Septiembre 10/09/13.

1.- Sea la semiesfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$, $z\geq 0$, y el cilindro $(x-a)^2+y^2=a^2$. Al hallar la intersección del cilindro con la esfera, se produce un cuerpo cilíndrico, cuya base está en el plano $z=0$ y cuya "tapa" está sobre la esfera. se pide:

1. El volumen del sólido así definido.
2. El área de la "tapa" del sólido.
3. El área lateral del sólido.

Solución:

La "z" de la "tapa" es la de la esfera: $z=+\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$. El dominio de integración es el círculo: $D\equiv(x-a)^2+y^2\leq a^2$, luego será

$$\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

Pasando a coordenadas polares será

$$D\equiv(x-a)^2+y^2\leq a^2\to\rho^2-2\rho a\cos\theta\leq 1\to\left\{\begin{array}{l}0\leq\rho\leq 2a\cos\theta\\ -\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

luego

$$\begin{aligned}V=&\iint_{D_1}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho\right]\mathrm{d}\,\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{2}{3}\frac{1}{2}\left(4a^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2a\cos\theta}\mathrm{d}\,\theta=\\ =&-\frac{2^3a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[|\mathrm{sen}\,\theta|^3-1\right]\mathrm{d}\,\theta=-\frac{2^3a^3}{3}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^3\,\theta\,\mathrm{d}\,\theta+\frac{2^3a^3}{3}\pi\end{aligned}$$

siendo

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^3\,\theta\,\mathrm{d}\,\theta=\mathrm{B}\left(2,\,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(2)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{3}$$

finalemte

$$V=-\frac{2^3a^3}{3}\frac{4}{3}+\frac{2^3a^3}{3}\pi=\frac{2^3a^3}{9}\left[3\pi-4\right]$$

El área de la tapa viene dada por

$$\iint_D|\mathrm{d}\,\Omega|$$

La normal a la superficie viene dada por la dirección y sentido del vector

$$(2x,\,2y,\,2z)\to\mathbf{n}=\frac{(x,\,y,\,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{(x,\,y,\,z)}{2a}$$

luego

$$S=\iint_\Omega|\mathrm{d}\,\Omega|=\iint_\Omega\frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{\cos\gamma}=\iint_\Omega\frac{2a\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{z}=\iint_D\frac{2a\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}$$

Con el mismo cambio a coordenadas polares

$$\begin{aligned} S = & \; 2a \iint_D \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} = 2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2a\cos\theta} \frac{\rho}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\,\mathrm{d}\,\rho \right] \mathrm{d}\,\theta = \\ = & \; 2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{4a^2-\rho^2} \right]_0^{2a\cos\theta} \mathrm{d}\,\theta = (2a)^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\left|\operatorname{sen}\theta\right| + 1 \right] \mathrm{d}\,\theta = (2a)^2 \left(\pi - 2\right) \end{aligned}$$

El área lateral del cilindro dentro de la esfera, si la planteamos como curvilínea es,

$$A = \oint_C z\,\mathrm{d}\,s$$

donde $C \equiv (x-a)^2 + y^2 = a^2$ y $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$. Haciendo el mismo cabio a coordenadas polares

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \to \rho = 2a\cos\theta \Rightarrow \mathrm{d}\,s = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,\mathrm{d}\,\theta = 2a\,\mathrm{d}\,\theta$$

por tanto

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2a\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\,\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2a\sqrt{4a^2 - (2a)^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = 2\cdot(2a)^2$$

Si lo hacemos directamente, proyectando sobre $y = 0$ será

$$F(x,\,y,\,z) \equiv (x-a)^2 + y^2 = a^2 \to \mathbf{n} = \frac{(x-a,\,y,\,0)}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = \frac{(x-a,\,y,\,0)}{a}$$

Luego, teniendo en cuenta la simetría y si

$$D \equiv \left\{ \begin{array}{l} 0 \le x \le 2a \\ 0 \le z \le \sqrt{4a^2-x^2-y^2} \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} 0 \le x \le 2a \\ 0 \le z \le \sqrt{4a^2 - x^2 - \left(a^2 - (x-a)^2\right)} \end{array} \right.$$

es decir

$$D \equiv \left\{ \begin{array}{l} 0 \le x \le 2a \\ 0 \le z \le \sqrt{2a}\sqrt{2a-x} \end{array} \right.$$

luego

$$\begin{aligned} A = & \; 2\int_0^{2a} \left[\int_0^{\sqrt{2a}\sqrt{2a-x}} \frac{\mathrm{d}\,z}{\frac{y}{a}} \right] \mathrm{d}\,x = 2a \int_0^{2a} \left[\int_0^{\sqrt{2a}\sqrt{2a-x}} \frac{\mathrm{d}\,z}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}} \right] \mathrm{d}\,x = \\ = & \; 2a \int_0^{2a} \frac{\sqrt{2a}\sqrt{2a-x}}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}\,\mathrm{d}\,x = 2a \int_0^{2a} \frac{\sqrt{2a}\sqrt{2a-x}}{\sqrt{2ax-x^2}}\,\mathrm{d}\,x = 2a\int_0^{2a} \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x = \\ = & \; 2a\sqrt{2a}\;\, 2\sqrt{x}\Big|_0^{2a} = 2\cdot 2a\left(\sqrt{2a}\right)^2 = 2\cdot(2a)^2 \end{aligned}$$