PRÁCTICAS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

PRÁCTICA 6

Página web de la asignatura: **http://personales.unican.es/gila/MNII.html**

El objetivo de esta última práctica de la asignatura es implementar la regla trapezoidal recurrente para evaluar integrales y probar esta regla de cuadratura para ciertas integrales tipo. Recordemos en este punto el algoritmo que describimos en clase:

Algoritmo: Regla trapezoidal para evaluar $\int_a^b f(x)dx$ con error absoluto menor que ϵ.
Input: $\epsilon > 0$, $f(x)$, b, a.
Output: $\int_a^b f(x)dx$

(1) $h = b - a$, $I = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$

(2) $\Delta = 1 + \epsilon$; $n = 0$

(3) Repetir mientras $\Delta > \epsilon$

(4) n=n+1;h=h/2

(5) $I_n = I/2 + h \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a + (2i - 1)h)$

(6) $\Delta = |I_n - I|$

(7) $I = I_n$

(6) Ir a (3)

Se trata de implementar este algoritmo en Matlab haciendo una serie de modificaciones. En primer lugar, consideraremos el criterio de error relativo en lugar del de error absoluto para parar el algoritmo. Esto quiere decir que tomaremos $\Delta = |1 - I/I_n|$. Esta modificación obligará a tomar alguna precaución adicional, como más adelante se comentará (por ejemplo, no se puede considerar el error relativo cuando $I_n = 0$).

Para evitar problemas cuando no se alcance la precisión requerida conviene no tomar una precisión relativa demasiado exigente: nos conformaremos con una precisión de 10^{-8}. A la vez, conviene también limitar el número máximo de iteraciones de la regla trapezoidal (dejaremos que la regla itere 16 veces como máximo) Por otro lado, conviene exigirle a la regla trapezoidal que realice un número mínimo de iteraciones (por ejemplo, 4 iteraciones al menos). En resumen, además del criterio de parada mediante el error relativo exigiremos que el algoritmo realice no menos de 4 y no más de 16 iteraciones.

Para poder probar la regla de cuadratura con diversas funciones sin necesidad de crear un fichero distinto para cada una de ellas, utilizaremos los comandos **inline** y **feval** de matlab. De forma más explícita, las dos primeras lineas de la función **trap.m**, implementando la regla trapezoidal, serán

```
function [ti,n]=trap(func,eps,a,b)
funci=inline(func);
```

donde el significado de las variables de entrada es:

1. func: cadena alfanumérica con la expresión cuya integral queremos evaluar, por ejemplo, 'x^2', si queremos evaluar $\int_a^b x^2 dx$.
2. eps: tolerancia de error relativo (como antes dijimos, tomaremos 10^{-8})
3. a, b: extremos de integración

Por otra parte las salidas serán

1. ti: valor numérico de la integral
2. n: número de iteraciones

Dentro del programa **trap.m** deberemos evaluar la función que hemos introducido como input (func). Esto se consigue mediante el comando **feval**. Por ejemplo, para calcular el valor de la función en $x = a$, escribiríamos

```
feval(funci,a)
```

donde la variable funci ha sido definida anteriormente mediante el comando inline (ver más arriba).

Como primera comprobación del método, podemos probar con una función lineal, ya que sabemos que la regla trapezoidal debe ser exacta en este caso. Así, por ejemplo, ejecutando

```
>> [it,n]=trap('10*x-4',1.e-8,0,1)
```

deberíamos obtener it=1, n=4. Efectivamente, $\int_0^1 (10x - 4)dx = 1$, y obtenemos que se han realizado 4 iteraciones porque, como antes decíamos, conviene obligar al programa a que realice al menos 4 iteraciones (aunque para este ejemplo concreto sea completamente innecesario).

Además de la función **trap.m**, la realización de la práctica incluye la escritura de un programa principal, **prac6.m**, (que utilizará la función **trap.m**) donde comprobaremos el funcionamiento de la rutina para las integrales que a continuación discutiremos. Para cada una de las integrales se proporcionará el valor de la integral, el número de iteraciones y el error relativo cometido (comparando con el resultado exacto, que será conocido). En **prac6.m** consideraremos de forma sucesiva las siguientes integrales:

1. $\int_{-1}^{1} x^2 dx$
2. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos(x)dx$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} cos(mx)exp(-x^2)dx$, para $m = 0, 4, 8, 9, 10$

Por supuesto que para las integrales impropias no podemos integrar sobre todo el eje real, sino que deberemos escoger un intervalo suficientemente amplio, tomando unos límites de integración razonables. En la práctica, para las integrales que queremos calcular, será suficiente considerar la aproximación:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \approx \int_{-10}^{10} f(x)dx$$

Recordemos además que el valor exacto de las integrales impropias consideradas es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} cos(mx)e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}e^{-m^2/4}$$