PRIMER EXAMEN PARCIAL DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. TURNO DE TARDE.

23 DE OCTUBRE DE 2012

SOLUCIONES

1.- (3 ptos.) Calcular el volumen limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$, $y^2 = x$.

SOL:

Es fácil comprobar que el dominio de $\mathbb{R}^3$ en cuestión viene expresado como

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq \sqrt{x},\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2(x^2 + y^2)\right\}.$$

De modo que

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_D dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\,dy = \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + y^3/3\right]_x^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x^{5/2} + x^{3/2}/3 - x^3 - x^3/3\right) dx = \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

2.- (4 ptos.) Utilizar el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\int_C (-y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz)\,,$$

donde C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$. La orientación de C es tal que gira en el sentido que lleva el eje X al eje Y. Verificar el resultado haciendo directamente la integral de línea.

SOLS:

Este ejercicio estaba propuesto en las lecturas. Además, es muy parecido al ejercicio 18(a) de la hoja de problemas:

Calculemos en primer lugar la integral de línea correspondiente. La curva C en cuestión viene expresada por las ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rl} x(t) = & \cos t \\ y(t) = & \sin t \\ z(t) = & 1 - \sin t - \cos t \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rr} x'(t) = & -\sin t \\ y'(t) = & \cos t \\ z'(t) = & \sin t - \cos t \end{array}\right., \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

donde las últimas componentes $(x'(t), y'(t), z'(t))$ son las del vector tangente a la curva en cada punto $\mathbf{r}'(t)$.

Por otra parte, la expresión del campo vectorial que aparece como integrando $\mathbf{F} = (-y^3,\ x^3,\ -z^3)$ en términos de la parametrización de la curva es:

$$\mathbf{F}(r(t)) = \left(-\sin^3 t,\ \cos^3 t,\ -(1 - \cos t - \sin t)^3\right),$$

luego

$$\mathbf{F}(r(t))\dot{\mathbf{r}}'(t) = \sin^4 t + \cos^4 t + (\cos t - \sin t)(1 - \cos t - \sin t)^3.$$

La integral de línea se podrá calcular entonces como

$$\int_0^{2\pi} \left(\sin^4 t + \cos^4 t + (\cos t - \sin t)(1 - \cos t - \sin t)^3\right)\, dt = \frac{3\pi}{2}.$$

Nota: los dos primeros integrandos son no nulos y dan una contribución $3\pi/4$ cada uno. El tercero es nulo.

Al ser una curva cerrada, podemos aplicar el teorema de Stokes (es lo que vamos a comprobar): La superficie en cuestión vendrá expresada por las ecuaciones $x^2+y^2 \leq 1$, $x+y+z=1$. Una parametrización conveniente de esta superficie (no la única, por supuesto) se puede obtener utilizando la expresión en polares para x e y:

$$S(r,t) = \left(r\cos t,\, r\sin t,\, 1 - r(\cos t + \sin t)\right),$$

donde el dominio D de variación de parámetros es:

$$D = \{(r,t) | 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

Los vectores tangentes a la superficie correspondientes a los parámetros r y t vendrán dados por:

$$\mathbf{T}_r = (\cos t,\, \sin t,\, -(\cos t + \sin t)),\ \ \mathbf{T}_t = r(-\sin t, \cos t,\, (\sin t - \cos t)).$$

y la normal a la superficie es, por tanto,

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_t = r(1,1,1).$$

Por otra parte, el rotacional de $\mathbf{F}$ vendrá dado por:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(0,\, 0,\, 3(x^2+y^2)\right) = \left(0,\, 0,\, 3r^2\right),$$

por tanto, la expresión que aparece en el integrando será:

$$\nabla \times \mathbf{F}\dot{\mathbf{n}} = 3r^3.$$

De modo que

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \int_D (\nabla \times \mathbf{F}\dot{\mathbf{n}}\, dr\, dt = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 (3r^3)\, dr = \frac{3\pi}{2},$$

que es lo que queríamos comprobar.

3.- (3 ptos.) Obtener el desarrollo de Fourier de la función $f(t) = 2(t^2 - t)$ en el intervalo $[-\pi,\, \pi]$ considerando su extensión periódica con periodo 2π.

SOLS:

Este ejercicio es casi idéntico al último de la Hoja 1 donde se ha fijado $L = \pi$ y se ha tomado el doble de la función que aparece en ese enunciado.

Para un L cualquiera, los coeficientes de Fourier de la función venían dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\, dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} 2(t^2 - t)\, dt = 4\frac{L^2}{3},$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\,dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} 2(t^2 - t)\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\,dt = \frac{8(-1)^k L^2}{k^2\pi^2},$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\,dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} 2(t^2 - t)\sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right)\,dt = \frac{4L(-1)^k}{k\pi}.$$

De modo que fijando $L = \pi$ la serie de Fourier de la función será:

$$f(t) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{8(-1)^m}{m^2}\cos(mt) + \frac{4(-1)^m}{m}\sin(mt)\right].$$