PRIMER EXAMEN PARCIAL DE AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. TURNO DE MAÑANA.

23 de OCTUBRE de 2012

SOLUCIONES

1.- (3 ptos.) Calcular

$$\int\int_D x^y \, dx \, dy,$$

siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

SOL:

El dominio de integración es trivial. Lo único que hay que decidir es cuál es el orden de integración de las variables.

Se ve inmediatamente que conviene integrar primero en x y luego en y, por la sencillez de la integral que resulta tras el primer proceso de integración:

$$\int\int_D x^y \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_0^1 x^y \, dx = \int_0^1 dy \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 =$$
$$\int_0^1 \frac{1}{y+1} \, dy = [\log(y+1)]_0^1 = \log(2).$$

2.- (4 ptos.) Verificar el teorema de Gauss (es decir, comprobar que se obtiene el mismo resultado calculando las dos expresiones integrales involucradas) para el siguiente campo vectorial:

$$\mathbf{F} = \left(x^2,\, y^2,\, z^2\right),$$

siendo S la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 5$ junto con sus bases $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, z = 5\}$ y $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$.

SOL:

Lo que tenemos que hacer para aplicar el teorema de Gauss es parametrizar las superficies de modo que las normales apunten hacia afuera o, aún ms fácil, tener en cuenta de modo directo cómo estará orientado el vector normal.

Sean S_1, S_2 y S_3, la base inferior, la base superior y la superficie lateral del cilindro, respectivamente. Así, para calcular

$$\int\int_{S_1} \mathbf{FdS}$$

siendo S_1 la base inferior $z = 0$, el vector normal apuntará hacia valores de z negativos, es decir, que

$$\int\int_{S_1} \mathbf{FdS} = -\int\int_{S_1} \mathbf{Fk} dxdy = -\int\int_{S_1} z^2 dxdy = 0$$

pues $z = 0$ sobre S_1.

Sobre la base superior, S_2, el vector normal apunta en la dirección de z positivo luego:

$$\int\int_{S_2} \mathbf{FdS} = \int\int_{S_2} \mathbf{Fk} dxdy = \int\int_{S_2} z^2 dxdy$$

y como $z = 5$ sobre la base superior:

$$\int\int_{S_2} \mathbf{FdS} = 25 \int\int_{S_2} dxdy = 25 \times \pi(2)^2 = 100\pi.$$

Para el lateral, S_3 debemos escoger una parametrización. Lo natural es escoger coordenadas cilíndricas con radio 2, siendo la parametrización $\mathbf{r}(u,v) = (2\cos u, 2\sin u, v)$ y

$$S_3 = \{(2\cos u, 2\sin u, v)\,,\ 0 \le u < 2\pi\,,\ 0 \le v \le 5\}$$

tenemos que $\mathbf{T}_u = (-2\sin u, 2\cos u, 0)$ y $\mathbf{T}_v = (0,0,1)$ y $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = 2(\cos u, \sin u, 0)$, que claramente apunta hacia afuera de S_3. Tenemos pues que:

$$\begin{aligned}\int\int_{S_3} \mathbf{FdS} = & \int_0^5 \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) dudv = \\ & = \int_0^5 \int_0^{2\pi} (4\cos^2 u, 4\sin^2 u, v^2).(2\cos u, 2\sin u, 0)dudv \\ & = \int_0^5 \left(\int_0^{2\pi} (8\cos^3 u + 8\sin^3 u)du\right) dv = 0\end{aligned}$$

De modo que

$$\int\int_S \mathbf{FdS} = 100\pi$$

y la integral en volumen $\int\int\int_V \nabla\mathbf{F}dV$ tiene que salir igual. Veámoslo:

$$\int\int\int_V \nabla\mathbf{F}dV = \int\int\int_V (2x + 2y + 2z)dxdydz$$

y pasando a coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned}\int\int\int_V \nabla\mathbf{F}dV = & \int_0^5 \int_0^2 \int_0^{2\pi} (2r\cos\theta + 2r\sin\theta + 2z)rd\theta\, dr\, dz \\ & = 2\pi \int_0^5 \int_0^2 2zrdrdz = 8\pi \int_0^5 zdz = 100\pi.\end{aligned}$$

3.- (3 ptos.) Determinar las series de Fourier seno y coseno de la función

$$f(t) = \begin{cases} 3t, & \text{para } 0 \le t \le \pi/2, \\ 3\pi - 3t, & \text{para } \pi/2 < t \le \pi. \end{cases}$$

$f(t)$ está definida en $[0,\, \pi]$.

SOL:

En las expresiones vistas en teoría tenemos que hacer $L = \pi$. Los coeficientes de la serie de Fourier seno de la función vendrán dados entonces por:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} 3t\sin(kt)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} 3(\pi - t)\sin(kt)\,dt\right] = \text{(Integración por partes)} = 3\frac{4\sin(k\pi/2)}{\pi k^2},$$

y la **serie de Fourier seno** de $f(t)$ será entonces

$$f(t) = 3\left(\frac{4}{\pi}\sin t - \frac{4}{9\pi}\sin(3t) + \frac{4}{25\pi}\sin(5t) - \frac{4}{49\pi}\sin(7t) + ...\right)$$

Respecto a la serie de Fourier coseno de la función, en primer lugar calculamos a_0:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} 3t\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} 3(\pi - t)\,dt\right] = 3\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] = 3\frac{\pi}{2}.$$

El resto de coeficientes a_k vendrán dados por:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} 3t\cos(kt)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} 3(\pi - t)\cos(kt)\,dt\right] = (\text{Integración por partes}) = \\ &= 3\frac{2}{\pi k^2}\left[2\cos(k\pi/2) - 1 + (-1)^{k+1}\right], \end{aligned}$$

de modo que la **serie de Fourier coseno** de $f(t)$ viene dada por:

$$f(t) = 3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos(2t) - \frac{2}{9\pi}\cos(6t) - ...\right)$$