Lecturas Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (II)
Ampliación de Matemáticas. Grado en Ingeniería Civil
Curso 2012-13

Noviembre 2012

En las Lecturas anteriores hemos tratado la resolución de EDOs de primer orden $y' = f(t, y)$. Ahora vamos a ocuparnos de EDOs de orden superior: en particular, nos ocuparemos de **ecuaciones diferenciales ordinarias lineales**.

Empecemos con algunas definiciones y conceptos básicos ...

Ecuación diferencial ordinaria lineal

La forma más general de una EDO lineal es

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y^{(1)} + a_0(x)y^{(0)} = A(x). \quad (1)$$

donde supondremos que las $a_i(x)$ y $A(x)$ son funciones continuas. Si a_n es distinto de cero en el intervalo en el que se quiere resolver la ecuación, podemos escribir ésta como:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = R(x). \quad (2)$$

EDO homogénea e inhomogénea

Se llama **ecuación homogénea asociada a la anterior ecuación diferencial** a aquélla que resulta de tomar $R(x) = 0$. Por contra, **una ecuación con** $R(x) \neq 0$ **se dice que es inhomogénea**.

EDO lineal: existencia y unicidad de solución

Sea $x_0 \in I$, siendo I un intervalo donde los coeficientes de la EDO lineal (2) son continuos. Se cumple entonces que la ecuación tiene una única solución en I cumpliendo unas condiciones $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$,..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$, donde $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ son números arbitrarios.

Comentario: Por la linealidad de las EDOs que estamos considerando, es evidente que si y_1, y_2,...y_m son distintas soluciones de la ecuación diferencial, entonces cualquier combinación lineal de ellas, con coeficientes constantes:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i(x)$$

sigue siendo solución de la ecuación diferencial. Si las funciones en cuestión fuesen **linealmente independientes**, podríamos pensar en que una combinación de éstas con n constantes arbitrarias, podría ser la **solución general** de la EDO. Veámoslo ...

Funciones linealmente independientes

$\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ es un **sistema de funciones linealmente independientes** sobre un intervalo $I \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0 \text{ en I } \Rightarrow \lambda_i = 0\,,\ i = 1, ..., n\right]$.
En caso contrario es un sistema linealmente dependiente.

Un criterio práctico para establecer la independencia lineal de un conjunto de n funciones se deriva del siguiente resultado:

Dependencia lineal de funciones: condición de Wronskiano

Si el sistema de funciones $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ es linealmente dependendiente sobre un intervalo I y las funciones tienen derivadas de orden $(n-1)$ entonces

$$W[\{f_i(x)\}_{i=1}^n](x) \equiv \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0\ , \quad \forall x \in I\,. \quad (3)$$

A este determinante le llamaremos Wronskiano de $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$.

Es decir, que si un conjunto de soluciones $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ **cumple que** $W[\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}](x) \neq 0 \ \forall x \in I$ **entonces** $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ **es linealmente independiente en** I**.**

Comentario: En el caso particular de funciones que son soluciones de una EDO lineal de orden n, no es necesario comprobar que el Wronskiano sea cero $\forall x \in I$ para saber si el conjunto es linealmente independiente en I. En concreto, se verifica el siguiente resultado:

Si los coeficientes de una EDO lineal homogénea de orden n son continuos en I, el Wronskiano de n soluciones o bien es distinto de cero en todo I (y entonces los n soluciones son linealmente independientes) o bien es cero en todo I.

y a partir de aquí:

Sean $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ soluciones de $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x) y^{(i)} = 0$ con coeficientes continuos en I entonces: $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ **linealmente independiente en** I **si y sólo si** $W[\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}](x) \neq 0$ **para algún** $x \in I$**.**

Resultados importantes para EDOs lineales homogéneas que se demuestran utilizando, en parte, el primero de los resultados que acabamos de ver, son:

Existen n soluciones linealmente independientes de la EDO

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x) y^{(i)} = 0$$

con coeficientes p_i continuos.

Sea $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ un sistema linealmente independientes de soluciones de la EDO $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x) y^{(i)} = 0$ con coeficientes continuos en I. Entonces, cualquier solución $f(x)$ de la EDO se puede escribir como combinación lineal de $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$, es decir, que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)$.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Como consecuencia de lo anterior se verifica que **hay n y no más de n soluciones linealmente independientes de una EDO lineal homogénea de orden n con coeficientes continuos.**

Conjunto fundamental de soluciones: definición

Dada una EDO lineal de orden n homogénea con coeficientes continuos, se llama **conjunto fundamental de soluciones** a un conjunto de n funciones linealmente independientes $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ que son soluciones de la ecuación. Se llama **espacio de soluciones de la ecuación al espacio generado por un conjunto fundamental** (base). Toda solución de la EDO está en el espacio de soluciones, es decir, que si $f(x)$ es solución, entonces $f(x) \in L[\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}]$ (donde L denota el espacio lineal de funciones).

Y otro resultado que nos dará la *clave práctica* para resolver EDOs lineales es ...

Si $Y(x)$ es una solución particular de $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x)y^{(i)} = R(x)$ y $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ es una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea asociada ($y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x)y^{(i)} = 0$), entonces **la solución general de la ecuación inhomogénea es:**

$$f(x) = Y(x) + L[f_1, ..., f_n]$$

es decir, que la solución general se puede expresar como

$$f(x) = Y(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) \ .$$

Es decir, **encontrar la solución general de una EDO lineal inhomogénea** consiste en:

1. **Encontrar una base de soluciones para la EDO homogénea.**
2. **Escribir la solución general de la EDO homogénea como combinación lineal, con constante arbitrarias, de este conjunto fundamental.**
3. **Hallar una solución particular de la EDO inhomogénea.**
4. **Sumar a esta solución particular la solución general de la EDO homogénea.**

Empecemos por abordar los dos primeros puntos ...

... **centrándonos en el caso particular de EDOs lineales homogéneas con coeficientes constantes.** Veamos cómo obtener un conjunto fundamental de soluciones de esta ecuación, empezando con una definición:

Polinomio característico: definición

Dada una **EDO lineal homogénea con coeficientes constantes**

$$a_n y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

se llama **polinomio característico de la ecuación** a:

$$P(r) = a_n r^n + ... + a_1 r + a_0 \, .$$

A la ecuación $P(r) = a_n r^n + ... + a_1 r + a_0 = 0$ la denominaremos *ecuación característica*.

Las raíces de la ecuación anterior, que pueden ser reales y/o complejas, serán la clave para determinar el conjunto fundamental de soluciones de la EDO.

Distingamos varios casos:

Regla 1: Todas las raíces reales y distintas

Sea $\sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i)} = 0$, $a_n \neq 0$, tal que **la ecuación característica tiene n raíces reales distintas $\{r_i\}_{i=1}^{n}$.** La **solución general de la EDO se puede escribir entonces como:**

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i x}$$

siendo c_i constantes arbitrarias.

Regla 2: Todas las raíces reales pero hay raíces múltiples

Sea $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0$, $a_n \neq 0$, tal que **la ecuación característica tiene** m **raíces reales distintas** $\{r_i\}_{i=1}^{m}$ **con grado de multiplicidad** m_i. La **solución general de la EDO se puede escribir:**

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} P_{m_i}(x) e^{r_i x}$$

siendo $P_{m_i}(x)$ **distintos polinomios de grado** m_i **con coeficientes indeterminados.**

El caso que nos queda por abordar (polinomio característico con raíces complejas) se engloba en la solución general de la EDO:

Regla 3: Solución general

Sea $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0$, $a_n \neq 0$, tal que **la ecuación característica tiene** m **raíces distintas** $\{r_i\}_{i=1}^{n}$ **con grado de multiplicidad** m_i. La **solución general de la EDO se puede escribir:**

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} P_{m_i}(x) e^{r_i x}$$

siendo $P_{m_i}(x)$ **distintos polinomios de grado** m_i **con coeficientes indeterminados, reales para los** r_i **reales y complejos para** r_i **complejos. Los coeficientes de los polinomios han de ser tales que la solución general sea real.**

La Regla 3, tal y como acabamos de enunciarla, involucrará en general expresiones complejas (aunque la solución general de la EDO es real, según hemos visto). Un enunciado más práctico de la Regla 3 es el siguiente:

Regla 3: Enunciado operativo

Sea $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0$, $a_n \neq 0$. **La solución general es la suma de la contribución para las raíces reales, si las hay, según la Regla 2 más la contribución de las raíces complejas, si las hay. Por cada par de raíces complejo-conjugadas** $a \pm ib$ **con multiplicidad** λ **se añade un sumando:**

$$e^{ax}(P_\lambda(x)\cos bx + Q_\lambda(x)\sin bx)$$

con P_λ **y** Q_λ **polinomios reales de grado** λ **con coeficientes reales indeterminados.**

Nada mejor que poner en práctica las reglas anteriores con el siguiente ejercicio:

Ejercicio: Hallar la solución general de las siguientes EDOs lineales:

1. $y'' - 5y' + 6y = 0.$
2. $y'' + y' + y = 0.$
3. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$

Comentario: En cuanto los coeficientes de la EDO lineal no son constantes o intentamos resolver una ecuación inhomogénea, nuestras esperanzas de **resolver la ecuación diferencial en términos de funciones elementales, como acabamos de hacer, se reducen considerablemente**, aunque habrá casos en los que todavía será posible ...

Vamos a abordar ahora el **punto 3** del listado de *tareas* enunciadas en la página 10. **Continuaremos centrándonos en EDOs lineales con coeficientes constantes pero ahora con un término inhomogéneo** $R(x)$:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = R(x)$$

con a_i constantes ($a_n \neq 0$) y $R(x)$ una función que posee un número finito de derivadas linealmente independientes.
Vamos a considerar un primer método para obtener una solución particular de la EDO: el **método de los coeficientes indeterminados**.
Consideremos que $R(x)$ está formado por las funciones elementales x^m ($m \in \mathbb{N}$), e^{px}, $\sin qx$, $\cos qx$, y combinaciones lineales de estas funciones con productos finitos de estas funciones.

Si una función de las anteriores tiene n derivadas linealmente independientes (incluida la derivada de orden cero), llamaremos **familia de dicha función a un conjunto de n funciones independientes de manera que las n derivadas se pueden escribir como combinación lineal de ellas**; no admitimos sumas de funciones elementales en la familia.

Algunos ejemplos:

$$\mathbf{Fam}(x^m) = \{1, x, x^2, ..., x^m\}.$$
$$\mathbf{Fam}(e^{px}) = \{e^{px}\}.$$
$$\mathbf{Fam}(\sin qx) = \mathbf{Fam}(\cos qx) = \{\sin qx, \cos qx\}.$$
$$\mathbf{Fam}(x \sin qx) = \mathbf{Fam}(x \cos qx) = \{x \sin qx, x \cos qx, \sin qx, \cos qx\}.$$

Por la definición, es evidente que la **familia de una suma se puede obtener del siguiente modo:**

$$\textbf{Fam}(h_1(x) + h_2(x)) = \textbf{Fam}(h_1(x)) \bigcup \textbf{Fam}(h_2(x))$$

Con esta definición de familia generada por una función, podemos dar una regla de cálculo sencilla para generar la solución general, a saber:

Obtención de una sol. particular de la EDO inhomogénea

Dada una EDO $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = R(x)$, con a_i constantes ($a_n \neq 0$) y $R(x)$ una función que posee un número finito de derivadas linealmente independientes. Se puede obtener una solución particular de la EDO por el siguiente procedimiento

1. Se resuelve la ecuación homogénea.
2. Se forma la familia de $R(x)$.
3. Si algún elemento, y_1, de la familia de $R(x)$ es solución de la ecuación homogénea, se multiplica por x^m, siendo m el menor número natural tal que $x^m y_1$ ya no es solución de la homogénea.
4. Se forma una combinación lineal, con coeficientes constantes, de todas las funciones de la familia, con la sustitución descrita en el anterior punto. Las constantes se determinan exigiendo que esta combinación lineal sea solución de la EDO inhomogénea.

Como es bien sabido, **la solución general se puede escribir como la solución particular obtenida más la solución general de la homogénea.**

Ejemplo: Hallar la solución general de la ecuación $y'' - 3y' + 2y = 3 + 2x + e^x$.
Sol.:
Hayamos la solución general de la homogénea. Las raíces del polinomio característico son:

$$s^2 - 3s + 2 = 0 \rightarrow s = 1, 2$$

luego la solución general de la EDO homogénea es:
$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Continúa $\Rightarrow$

Por otra parte:

$Fam(R(x)) = Fam(1) \cup Fam(2x) \cup Fam(e^x) = \{1\} \cup \{1, x\} \cup \{e^x\} = \{1, x, e^x\}$

pero e^x es solución de la homogénea. Multiplicamos por x y xe^x ya no es solución de la homogénea.
Tomamos una combinación lineal:

$$y_P = a_1 + a_2 x + a_3 x e^x$$

calculamos su primera y segunda derivadas y las llevamos a la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= a_3(2+x)e^x - 3(a_2 + a_3(1+x)e^x) + \\ &+ 2(a_1 + a_2 x + a_3 x e^x) = 3 + 2x + e^x, \end{aligned}$$

e igualando coeficientes vemos que para que y_P sea solución de la ecuación: $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$. Tenemos pues una solución particular:

$$y_P(x) = 3 + x - xe^x$$

y por lo tanto la solución general de la ecuación inhomogénea es:

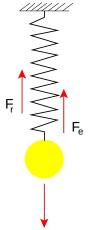
$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3 + x - xe^x.$$

Un ejemplo (físico) de aplicación:

El desplazamiento respecto a la posición de equilibrio $u(t)$ de un objeto de masa m sujeto a un muelle colgado de un resorte de constante k se puede describir, de forma aproximada, por una EDO lineal de segundo orden que se obtiene a partir del balance de fuerzas que actúan en cada instante:

$$mu'' + bu' + ku = F(t),$$

siendo $F(t)$ la fuerza externa que actúa sobre el objeto. En esta EDO se está asumiendo una fuerza de fricción proporcional a la velocidad del objeto u' y de sentido opuesto a la misma. Continúa ⇒



Si se supone que no se aplica ninguna fuerza externa sobre el objeto $F(t) = 0$, la EDO a resolver sería:

$$mu'' + bu' + ku = 0,$$

que tiene como ecuación característica $P(r) = mr^2 + br + k = 0$ con raíces $r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$.
Podemos distinguir 2 casos:

- Si $b^2 < 4mk$, las raíces son complejas. La solución general de la EDO corresponde, como sabemos, $u(t) = e^{-bt/2m}(A\cos(wt) + B\sin(wt))$; es decir, a un **sistema oscilante** con oscilaciones amortiguadas en el tiempo. En mecánica hablaríamos de un **oscilador subamortiguado**.
- Si $b^2 \geq 4mk$, las raíces son reales y de multiplicidad uno o dos. La solución general de la EDO será entonces $u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ o $u(t) = e^{r_1 t}(A + Bt)$, respectivamente. Esta situación corresponde, claramente a un **sistema que no oscila**. El término que se utiliza es de **oscilador sobreamortiguado**.

Vamos ahora a desviarnos de las ecuaciones con coeficientes constantes considerando ahora **EDOs con coeficientes variables**. De nuevo, **no puede haber métodos generales de resolución que expresen la solución en términos de funciones elementales pues, de hecho, la mayor parte de estas ecuaciones no admiten este tipo de expresión para la solución.**

Hay, sin embargo, algunos casos de EDOs con coeficientes variables que sí pueden ser reducidos a otros que ya hemos abordado. Consideraremos dos tipos de problemas: **a) Ecuaciones de Euler-Cauchy** y **b) Resolución de EDOs por reducción de orden**.

a) Ecuaciones de Euler-Cauchy

Las **ecuaciones de Euler-Cauchy** son del tipo:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 x y' + a_0 y = f(x).$$

Estas ecuaciones se pueden transformar en ecuaciones con coeficientes constantes considerando el cambio $|x| = e^z$, es decir, $z = \ln x$.

En efecto: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} Dy$, donde el operador diferencial D significa derivación respecto a z, es decir $D = \frac{d}{dz}$. Tenemos entonces que $xy' = Dy$.

Sigamos con la derivada segunda:

$$y'' = -\frac{1}{x^2} Dy + \frac{1}{x}\frac{d}{dz}(Dy)\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2} Dy + \frac{1}{x^2} D^2 y$$

de modo que

$$x^2 y'' = D(D-1)y = D^2 y - Dy.$$

De forma similar, y procediendo por inducción, podemos probar que:

$$x^k y^{(k)} = D(D-1)...(D-k+1)y$$

.

Ejercicio: Encontrar la solución general de $x^3y''' + 4x^2y'' - 5xy' - 15y = x^4$.

Hacer!

Consideremos ahora el otro tipo de problemas de EDOs con coeficientes variables:

b) Resolución de EDOs por reducción de orden

Por reducción de orden entendemos **convertir el problema de resolver una ecuación diferencial de un determinado orden en otra de un orden inferior.**

Veamos algunas reducciones de orden particulares ...

Nos restringimos a EDOs de segundo orden, aunque los cambios que se describan puedan aplicarse a ecuaciones de orden superior.

Consideremos pues una **EDO de segundo orden genérica** $f(x, y, y', y'') = 0$. En algunos casos en los que falta la x o la y o alguna derivada, el problema se puede transformar en un problema de primer orden. En particular, consideremos dos casos:

1. **En f falta la y: $f(x, y', y'') = 0$. Hacemos el cambio de función $y' = p$ y la ecuación diferencial se escribe ahora: $f(x, p, p') = 0$.**
2. **En f falta la x: $f(y, y', y'') = 0$. De nuevo, el cambio de función es: $y' = p$ y la segunda derivada se escribe:**

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

luego nos queda la ecuación de primer orden:

$$f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Para **EDOs lineales de orden n homogéneas**

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x) y^{(i)} = 0$$

también es posible realizar una *reducción de orden* de la EDO si, por alguna razón, **se conoce una solución particular y_1.** En ese caso, mediante el cambio de función:

$$y(x) = \phi(x) y_1(x)$$

obtenemos una ecuación de orden $n-1$ en ϕ' . Si conocemos más soluciones independientes, repitiendo este proceso se puede reducir el orden en una unidad por cada solución particular.

Ilustremos el procedimiento con una EDO lineal de segundo orden ...

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Supongamos que conocemos una solución particular y_1 de la EDO homogénea de una ecuación lineal de segundo orden:

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = R(x).$$

Hacemos $y = \phi(x)y_1$ y llevamos y a la ecuación diferencial. Tenemos que

$$\phi(x)[y_1'' + p_1(x)y_1' + p_0(x)y_1] + y_1\phi'' + [2y_1' + p_1y_1]\phi' = R(x).$$

El primer sumando se anula por ser y_1 una solución de la ecuación homogénea. Tenemos entonces que, llamando $u = \phi'$:

$$y_1u' + [2y_1' + p_1y_1]u = R(x)\,,$$

que es una **EDO lineal de primer orden**, *que sabemos como integrar!*

Ejercicio: **Hallar la solución general de la ecuación $(1-2x)y'' + 2y' + (2x-3)y = 0$, sabiendo que una solución particular de la ecuación es $y = e^x$. Hacer!**

Aun cuando nuestra EDO no se ajuste a los casos descritos anteriormente, veamos que todavía tenemos algún recurso a nuestro alcance para intentar resolverla ...

El método de variación de parámetros

Para una EDO lineal de coeficientes variables inhomogénea

$$y^{(n)} + \sum_{i=o}^{n-1} p_i(x) y^{(i)} = R(x)$$

de la que **conocemos un conjunto fundamental de soluciones de la EDO homogénea** $\{f_i\}_{i=1}^{n}$, veamos que es posible (en algunos casos) obtener una solución particular utilizando lo que se denomina **el método de variación de parámetros**.

Estudiaremos este método para EDOs de segundo orden y posteriormente lo generalizaremos para ecuaciones de orden superior:
Consideremos pues la ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = R(x),$$

y sea $\{f_1, f_2\}$ un sistema fundamental de soluciones de la homogénea.
La idea consiste en buscar una solución de la forma:

$$y_p(x) = b_1(x)f_1(x) + b_2(x)f_2(x).$$

Como tenemos dos funciones desconocidas, debemos plantear dos ecuaciones sobre estos coeficientes para poder obtenerlos!

La primera de las ecuaciones será, lógicamente, la ecuación diferencial que queremos resolver.
Derivando la expresión de la solución que buscamos (y_p):

$$y_p' = b_1 f_1' + b_2 f_2' + b_1' f_1 + b_2' f_2,$$

y **tomemos como segunda ecuación para determinar los coeficientes**

$$b_1' f_1 + b_2' f_2 = 0 \ .$$

Haciendo esto llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} b_1' f_1' + b_2' f_2' & = & R(x)\,, \\ b_1' f_1 + b_2' f_2 & = & 0 \end{array}$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones son:

$$b_1' = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y_2' \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}}, \quad b_2' = \frac{\det\begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R(x) \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}}$$

e **integrando (si podemos hacerlo analíticamente!) obtendremos las expresiones para $b_1(x)$ y $b_2(x)$.**

Ejercicio: Hallar la solución general de la ecuación diferencial: $x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln(x))$ sabiendo que $\{\cos(\ln(x)), \sin(\ln(x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la homogénea (este problema también se puede resolver directamente sabiendo que es una ecuación de Euler-Cauchy). Hacer!

Generalización a orden *n*: de modo análogo, para una ecuación de orden n:

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x) y^{(i)} = 0$$

con un conjunto de soluciones fundamentales de la homogénea $\{f_i\}_{i=1}^{n}$, plantearíamos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i=0}^{n} b_i' f_i^{(k)} = 0 \ , \quad k = 0, 1, ..., n-2 \\ &\textstyle\sum_{i=0}^{n} b_i' f_i^{(n-1)} = R(x) \end{aligned} \qquad (4)$$

y resolviendo: $b_i' = \dfrac{W_i}{W[f_1, ..., f_n]}$, donde W denota el Wronskiano de las funciones y W_i es el resultado de sustituir la columna i de W por

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R(x) \end{bmatrix}.$$

Llegados a este punto, nos podemos plantear **qué hacer si la EDO lineal que estamos considerando no tiene soluciones en términos de funciones elementales o si no disponemos de información adicional sobre las soluciones de la ecuación diferencial.** De hecho hay ecuaciones diferenciales fundamentales para la física y la ingeniería (muchas de ellas "inocentes" EDOs lineales de segundo orden con coeficientes variables) que, lejos de ser resolubles en términos de funciones elementales, definen nuevas funciones, a las que se les suele englobar en la extensa y difusa categoría de **funciones especiales: funciones no elementales que aparecen asiduamente en determinados problemas de la física y la ingeniería...**

Ejemplo: La EDO $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$ **tiene como par de soluciones independientes las denominadas** *funciones de Bessel* $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$.

Veamos que, bajo determinadas condiciones, en estos casos podemos obtener soluciones en forma de **serie de potencias** alrededor de un punto. Centrémonos en **EDOs lineales de segundo orden con coeficientes variables**:

Series entorno a un punto ordinario de una ecuación de segundo orden.

Consideremos, como acabamos de comentar, ecuaciones lineales de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

que, si $a_2 \neq 0$, podemos escribir en la forma estándar

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Buscaremos soluciones en forma de series de potencias, cuyo comportamiento estará relacionado con el comportamiento de las funciones p y q en un entorno de ese punto.

Empecemos con una definición:

Punto ordinario

Un punto x_0 se dice que es un **punto ordinario de la ecuación diferencial** si tanto $p(x)$ como $q(x)$ son analíticas en x_0. **Cuando un punto no es ordinario se dice que es singular.**

Sigamos con un par de resultados importantes:

Sea x_0 un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \ .$$

Existe una única función analítica en x_0, $y(x)$, que es solución de la ecuación diferencial satisfaciendo unas condiciones iniciales dadas: $y(x) = a_0$, $y'(x_0) = a_1$. Si el desarrollo en serie de $p(x)$ y $q(x)$ tienen un radio de convergencia R entonces el desarrollo en serie de la solución tiene el mismo radio de convergencia.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Sea x_0 un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \; .$$

Entonces **la ecuación posee dos soluciones analíticas independientes de la forma**

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \;\; , \;\; y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

en un entorno de x_0. En consecuencia, toda solución es analítica entorno a $x = x_0$.
Además, el radio de convergencia de cualquier solución en serie de potencias entorno a x_0 es al menos igual que la distancia desde x_0 al punto singular más próximo (real o complejo) de la ecuación diferencial.

Ejemplo: Hallar la solución general de $2y'' + xy' + y = 0$ **alrededor de** $x = 0$**.**

Sol: *$x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación. Podemos pues probar con una serie de potencias alrededor de $x = 0$:*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,.$$

Llevamos la serie a la ecuación diferencial. El término en primera derivada es

$$xy' = x\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$$

Cont. $\Rightarrow$

y el término en segunda derivada se escribe

$$2y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

luego:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n]x^n = 0$$

y para que se cumpla la igualdad se debe cumplir la siguiente relación

$$a_{n+2} = -a_n/(2(n+2)).$$

Tenemos entonces una relación entre los coeficientes pares y otra entre los impares, lo cual nos deja dos constantes independientes que podemos tomar como a_0 y a_1. *Para los coeficientes de índice par $a_{2k} = -a_{2k-2}/4k$, de lo que deducimos que $a_{2n} = (-1)^n a_0/(4^n n!)$. Para los impares:* $a_{2k+1} = -a_{2k-1}/(2(2k+1))$, *luego* $a_{2n+1} = (-1)^n a_1/(2^n(2n+1)!!)$.

Cont. $\Rightarrow$

Con esto ya tenemos la solución general:

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n n!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n (2n+1)!!} x^{2n+1}.$$

De hecho, la primera serie de la solución general es fácil de sumar:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n n!} x^{2n} = e^{-x^2/4}.$$

Es decir, que **tenemos una expresión analítica para una solución** $y_1 = e^{-x^2/4}$ *(aunque no para la segunda). Con esto, podemos considerar un método alternativo para encontrar una segunda solución independiente aplicando, por ejemplo, reducción de orden. Haciendo esto llegaríamos a que una segunda solución independiente sería*

$$y_2(x) = e^{-x^2/4} \int_0^x e^{\bar{x}^2/4} d\bar{x} \,.$$

La solución general es entonces $y = Ay_1 + By_2$*, es decir:*
$y = e^{-x^2/4} \left(A + B \int_0^x e^{\bar{x}^2/4} d\bar{x} \right).$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Comentario: Cuando en la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

p o q o ambos tengan una singularidad en x_0, ya no podemos garantizar la existencia de dos soluciones independientes en forma de series de potencias. Sin embargo, cuando el punto es **singular regular**, aún habrá casos en los que seremos capaces de escribir soluciones en términos de **series de Frobenius**.

Punto singular regular

Un punto x_0 singular de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

se dice que **es regular si tanto** $(x - x_0)p(x)$ **como** $(x - x_0)^2 q(x)$ **son analíticas en** x_0. De otro modo, se dice que x_0 es un punto singular irregular.

Los puntos singulares regulares tienen la propiedad de que en su vecindad la ecuación diferencial se aproxima en cierto sentido a una ecuación de Euler-Cauchy, que sabemos resolver.

Supongamos que consideramos $x = 0$. El siguiente resultado nos proporciona la clave sobre la obtención de soluciones en serie "especiales" en el caso de que $x = 0$ sea un punto singular regular ...

Sea $x = 0$ un **punto singular regular** de la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ y sean $p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x)$, $q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x)$. Si las raíces de la **ecuación indicial**

$$s^2 + (p_0 - 1)s + q_0 = 0 \ ,$$

r_1 y r_2, con $r_1 \geq r_2$, son reales, entonces la ecuación diferencial tiene al menos una solución de la forma:

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ \ (a_0 \neq 0)$$

donde la solución es válida al menos donde lo son los desarrollos de $xp(x)$ y $x^2 q(x)$.
Además, si $r_1 - r_2$ no es entero, la ecuación diferencial tiene una segunda solución independiente (con el mismo radio de convergencia que la anterior solución) de la forma

$$y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ \ (b_0 \neq 0)$$