

**Lecturas Ecuaciones Diferenciales
Ordinarias (I)
Ampliación de Matemáticas. Grado en
Ingeniería Civil
Curso 2012-13**

Octubre 2012



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Motivación: Existen infinidad de problemas en Ciencia e Ingeniería que pueden ser expresados (*modelizados*) en términos de ecuaciones diferenciales. En ocasiones (pocas, desgraciadamente) las ecuaciones diferenciales que debemos resolver son relativamente simples y podremos encontrar **soluciones exactas** al problema con más o menos dificultad recurriendo a **métodos analíticos**. En otras ocasiones, deberemos recurrir a **esquemas numéricos** para determinar **soluciones aproximadas**. En este bloque temático introduciremos métodos analíticos para resolver un tipo particular de ecuaciones diferenciales denominadas **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**.

Pero antes, un primer ejemplo ...



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ejemplo: Un análisis de un lago contaminado revela la presencia de una bacteria que se encuentra con una concentración de A partículas/ m^3 . La concentración de la bacteria se reducirá conforme entre agua fresca al lago. Un estudio de ingeniería medioambiental ha determinado que, asumiendo una entrada continua de agua fresca en el lago, la concentración C de la bacteria como función del tiempo (expresado en semanas), puede modelizarse del siguiente modo:

$$\frac{dC}{dt} = \lambda C, \quad C(0) = A,$$

siendo λ una constante real.

Nos podemos preguntar:

- 1 ¿Es razonable el modelo establecido?. ¿Sería aceptable cualquier valor de λ ?
- 2 Asumiendo un valor de $\lambda = -0.06$?: ¿en cuántas semanas se reducirá a la mitad la concentración de la bacteria?; ¿cuál será la concentración de la bacteria al cabo de 7 semanas?.



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Empecemos ya con conceptos básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias ...

Ecuación diferencial ordinaria: definición

Una ecuación diferencial (o sistema de ecuaciones diferenciales) se dice que es ordinaria cuando la función (o funciones) **depende de una sola variable**. Es decir, que una ecuación diferencial ordinaria (abreviando: EDO) tiene la forma genérica: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Por contra, cuando las funciones incógnita dependan de varias variables y aparezcan derivadas parciales diremos que se trata de una **ecuación en derivadas parciales**.

Solución de una ecuación diferencial

Dada una ecuación diferencial, se dice que una función es solución de la ecuación si al sustituirla en la ecuación, ésta se verifica, es decir, da lugar a una identidad en la variable independiente de la ecuación.



Ejemplo: $C(t) = Ae^{-\lambda t}$ siendo, A una constante, es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = -\lambda C \quad (\text{nos ha aparecido en el primer ejemplo!})$$

pues $\frac{d}{dt} C(t) = -\lambda Ae^{-\lambda t} = -\lambda C(t)$. Es más, sea cual sea el valor de A , $C(t)$ es solución y se dice que $C(t)$ es la **solución general** de la ecuación diferencial, pues cualquier solución de la ecuación necesariamente tiene esta forma. Por contra, $\bar{C}(t) = e^{-\lambda t}$, también es solución de la ecuación diferencial, pero es una **solución particular** de la misma.



Más definiciones ...

Orden de una ecuación diferencial

Se denomina orden de una ecuación diferencial al máximo grado de derivación de la función incógnita.

Linealidad

Una ecuación diferencial se dice que es lineal cuando es lineal en las funciones incógnita y en sus derivadas (no hay productos entre derivadas ni entre derivadas y la función).

La ecuación del ejemplo anterior es lineal. Por contra, una ecuación como $(y')^2 - 2y' + 4y = 4x - 1$, no es lineal.



Abordemos ya algunos *métodos básicos de integración* (utilizaremos, en ocasiones, esta terminología) de EDOs. Estructuraremos el estudio de estos métodos del siguiente modo:

- **Métodos analíticos para ecuaciones de primer orden ($y' = f(x, y)$):**
 - 1 EDOs de variables separadas.
 - 2 EDOs reducibles a ecuaciones de variables separadas.
 - 3 EDOs exactas y transformables en exactas.
 - 4 EDOs lineales y reducibles a lineales.
- **Métodos analíticos para EDOs lineales de orden superior.**



Comenzaremos entonces estudiando métodos para ecuaciones de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

1. Ecuaciones de variables separables (o separadas)

Las ecuaciones de variables separables son las del tipo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x)}{f_2(y)},$$

que también se escriben (siempre que $f_2 \neq 0$), $f_2(y)dy = f_1(x)dx$.



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos elementales de integración

Integrando:

$$\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + C$$

y la solución general es entonces:

$$F_2(y) = F_1(x) + C ,$$

siendo F_1 y F_2 primitivas de f_1 y f_2 respectivamente.

También son ecuaciones de variables separables las ecuaciones del tipo

$$\phi_1(x)\psi_1(y)dx = \phi_2(x)\psi_2(y)dy$$

pues, dividiendo por $\psi_1(y)\phi_2(x)$ tenemos

$$\frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy ,$$

aunque la división podría eliminar soluciones que hacen que $\psi_1(y)\phi_2(x) = 0$; por otra parte, si ψ_1 o ϕ_2 son discontinuas pueden aparecer soluciones supérfluas que hagan que

$$\frac{1}{\psi_1(y)\phi_2(x)} = 0$$



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos elementales de integración

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $y' = y/x$.

Solución:

Reescribimos la ecuación como $dy = \frac{y}{x} dx$. Si $y \neq 0$ (que es una solución!) podemos escribir:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

e integrando

$$\ln |y| = \ln |x| + \ln C$$

donde $C > 0$ (hemos excluido la solución $y = 0$). De manera que

$$|y| = C|x|, C > 0.$$

Y como $y = 0$ también es solución podemos tomar $C \geq 0$. Si buscamos soluciones suaves, podemos escribir: $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$. Siendo estrictos, esta solución es la de la ecuación diferencial de partida para $x \neq 0$, puesto que para $x = 0$ la ecuación no tiene sentido.



2. Ecuaciones reducibles a ecuaciones de variables separadas

Estudiaremos **ecuaciones que son reducibles a ecuaciones en variables separadas mediante un cambio de variable**. En particular, consideraremos:

- 2.a) **Ecuaciones del tipo $y' = f(ax + by)$.**
- 2.b) **Ecuaciones homogéneas.**

2.a) Las ecuaciones del tipo $y' = f(ax + by)$ **se convierten en ecuaciones de variable separadas mediante el cambio de función $z = ax + by$** . Tenemos que

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} = a + bf(z)$$

y cuando $a + bf(z) \neq 0$ podemos escribir:

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx \rightarrow x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos la solución general de la ecuación diferencial.



Ejercicio: Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1$.

2.b) La resolución de EDOs homogéneas precisa, en primer lugar, de una definición:

Función homogénea de grado n

Se dice que una función $f(x, y)$ es homogénea de grado n en sus argumentos si se cumple la identidad

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

para cualesquiera t, x, y .

Por ejemplo: $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy^2$, es una función homogénea de grado 3; $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ es una función homogénea de grado 0.



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos elementales de integración

De manera que definimos:

EDO homogénea

Una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$ se dice que es homogénea si $f(x, y)$ es una función homogénea de grado cero.

Para este tipo de EDOs se puede demostrar que $f(x, y)$ se puede escribir como función de y/x , con lo cual:

$$y' = \phi(y/x)$$

Haciendo el cambio $y/x = u$, tenemos que $y' = u + xu'$, con lo que

$$x \frac{du}{dx} = \phi(u) - u$$

que es una **ecuación de variables separadas**.



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos elementales de integración

Si la EDO viene expresada en la forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 ,$$

la ecuación será homogénea cuando P y Q sean funciones homogéneas del mismo grado.

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

Solución:

Podemos ver que $x = 0$ no puede ser solución, de manera que podemos escribir

$$y' = \sqrt{1 - (y/x)^2} + y/x ,$$

que es una ecuación homogénea. Consideramos el cambio $u = y/x$ con lo cual:

$$x \frac{du}{dx} + u = \sqrt{1 - u^2} + u \rightarrow x \frac{du}{dx} = \sqrt{1 - u^2}$$



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos elementales de integración

Vemos que $u^2 = 1$, es solución de la ecuación diferencial. Estas soluciones se pierden al dividir por la raíz, lo cual debemos tener en cuenta. Escribimos:

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x},$$

e integrando

$$\arcsin u = \ln|x| + \ln|C|, C \neq 0 \rightarrow u = \sin(\ln|Cx|).$$

Es decir que **las soluciones de la ecuación diferencial son:**

$$y = x \sin(\ln(Cx)) \quad Cx > 0$$

junto con las dos soluciones singulares $y = \pm x$.



3. Ecuaciones diferenciales ordinarias exactas

Considerando una familia de curvas $\phi(x, y) = C = \phi(x_0, y_0)$ podemos encontrar una ecuación diferencial que dé como solución general esta familia de curvas. Para ello diferenciamos, de modo que:

$$0 = D\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy$$

Consideremos la situación inversa: partimos de una ecuación diferencial

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

y **queremos ver si existe alguna función** $\phi(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = Q(x, y)$$

en cuyo caso la ecuación diferencial se podría escribir

$$D\phi = 0$$

con solución $\phi(x, y) = C$.



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos elementales de integración

Cuando esto sea así se dirá que $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ es una **diferencial exacta** y se dirá que la ecuación diferencial es **exacta**.

EDO exacta: Condición necesaria y suficiente

Sea $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones de clase C^1 (en un dominio simplemente conexo), entonces $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta si y sólo si $P_y = Q_x$.

La solución de la ecuación diferencial sería $\phi(x, y) = C$, pues ϕ es la **función potencial del campo vectorial** $\mathbf{F} = (P, Q)$. Entonces, identificando $F^x = P$, $F^y = Q$ (ver **Lectura 3!**), tenemos que:

$$\phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(\bar{x}, y) d\bar{x} + \int_{y_0}^y Q(x_0, \bar{y}) d\bar{y} + \phi(x_0, y_0).$$



Ejercicio: Integrar la ecuación

$$(e^{x+y} - \cos x)dx + (e^{x+y} - \sin y)dy = 0. \text{ Hacer!}$$

3.a Búsqueda de factor integrante

Si $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ no es una ecuación exacta hay ocasiones en las que se puede encontrar un factor $\mu(x, y)$ de manera que

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

sea una ecuación diferencial exacta. $\mu(x, y)$ recibe el nombre de *factor integrante de la EDO*.

De hecho, **cuando la ecuación diferencial tiene una solución general $\phi(x, y) = C$ es seguro que existe factor integrante (una cosa bien distinta es saber obtenerlo!)**:

Sea $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, $P, Q \in \mathcal{C}^1$ una ecuación con solución general $\phi(x, y) = C$. Entonces, la ecuación diferencial admite factor integrante.



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos elementales de integración

No existen métodos generales de búsqueda de factor integrante. En algunos casos, se puede encontrar por inspección. En otros seremos capaces de encontrar el factor integrante suponiendo una determinada dependencia funcional de éste. En cualquier caso, **no hay garantía de encontrar el factor integrante mediante ningún método concreto.**

Veamos las **condiciones que debe cumplir el factor integrante**: si $Pdx + Qdy = 0$ admite como factor integrante $\mu(x, y)$, querrá decir que $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$ es exacta, con lo cual

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \rightarrow \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$$

es decir, que

$$Q\mu_x - P\mu_y = \mu(P_y - Q_x) .$$

De manera que tenemos una ecuación en derivadas parciales para μ y todo se complica: **necesitamos resolver una ecuación en derivadas parciales para resolver una EDO!**



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos elementales de integración

Restrinjamos nuestra búsqueda a factores μ con una dependencia conocida respecto a una variable $s = g(x, y)$, con g de clase C^1 . Entonces

$$\mu_x = \dot{\mu} s_x, \quad \mu_y = \dot{\mu} s_y$$

donde el punto denota derivada respecto a s . Tenemos entonces que $\dot{\mu}(s_x Q - s_y P) = \mu(P_y - Q_x)$, es decir, que:

$$h(s) = \frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\frac{P_y - Q_x}{s_y P - s_x Q}$$

En resumen, **para que la ecuación diferencial $Pdx + Qdy = 0$ admita un factor integrante en función de s , se deberá cumplir que**

$$h(s) = -\frac{P_y - Q_x}{s_y P - s_x Q}$$

es decir, **que se puede escribir este cociente como función de s exclusivamente**. En ese caso, el factor integrante se puede tomar

$$\mu = \exp\left(-\int h(s) ds\right).$$



Ejercicio: Resolver la EDO $(4x + 3y^3)dx + 3xy^2dy = 0$ asumiendo la existencia de un factor integrante $s = x$. **Hacer!**

4. Ecuación diferencial lineal de primer orden

Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** tiene la forma:

$$a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y + c(x) = 0,$$

donde supondremos que los coeficientes son continuos. Si $a(x) \neq 0$ podremos escribir:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Veamos cómo se puede dar una expresión explícita general, en términos de integrales, de una ecuación de este tipo:



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos elementales de integración

Para empezar, busquemos la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

llamada **ecuación homogénea**. Esta ecuación es de variables **separadas**, que podemos integrar fácilmente. Llegamos así a la solución general

$$y = C \exp\left(-\int P(x)dx\right).$$

Para hallar **una solución general de la ecuación completa** (llamada **inhomogénea si $Q(x) \neq 0$**), aplicamos el **método de variación de constantes** (que explicaremos en la siguiente lectura), haciendo que la constante C pase a ser una función de x . Buscamos entonces una solución de la forma

$$y(x) = v(x) \exp\left(-\int P(x)dx\right) \equiv v(x)u(x)$$

siendo u , como sabemos, solución de la ecuación homogénea.



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos elementales de integración

Llevando $y = vu$ a la ecuación diferencial llegamos a:

$$v(u' + Pu) + v'u = Q$$

y como u es solución de la homogénea el primer término se cancela, con lo cual

$$v' = \frac{1}{u}Q = Q \exp\left(\int P dx\right)$$

e integrando: $v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C$.

Y como $y = uv$, tenemos que la solución general buscada es:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} \right].$$

Lógicamente **el punto crucial para poder determinar una solución analítica de la EDO lineal de primer orden será poder integrar de manera exacta las funciones implicadas ...**

Ejercicio: Resolver la EDO $xy' - 3y = x^4$. **Hacer!**



4.a) EDOs reducibles a EDOs lineales

Vamos a considerar **dos tipos de ecuaciones que son reducibles a ecuaciones lineales** de primer orden y que aparecen vinculadas a determinados problemas en Física e Ingeniería:

- **Ecuación de Bernouilli.**
- **Ecuación de Ricatti.**



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos elementales de integración

Las **ecuaciones de Bernouilli** son aquellas de la forma

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0.$$

Los casos $n = 0, 1$ corresponden a ecuaciones lineales de primer orden. Ambos casos sabemos resolverlos. Supongamos pues que $n \neq 0, 1$. Dividiendo por y^n (perdiendo la solución trivial $y = 0$), tenemos que:

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} + b(x) = 0,$$

y haciendo el cambio $u = 1/y^{n-1}$, tenemos:

$$\frac{1}{1-n}u' + a(x)u + b(x) = 0.$$

De manera que con este cambio llegamos a una ecuación lineal de primer orden:

$$u' + (1-n)a(x)u = -(1-n)b(x).$$



Ejercicio: Integrar la ecuación $xy' + y + x^2y^3 = 0$. **Hacer!**

Las **ecuaciones de Ricatti** son aquellas de la forma

$$y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0$$

No existen métodos generales para este tipo de ecuaciones. Sin embargo, cuando se conoce una solución particular, la ecuación se puede reducir a una de Bernouilli, que si sabemos integrar.



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos elementales de integración

Supongamos pues que conocemos una solución particular de la ecuación, y_1 . Escribiendo $y = y_1 + u$ y llevándolo a la ecuación diferencial:

$$y_1' + u' + a(x)(y_1^2 + 2y_1u + u^2) + b(x)(y_1 + u) + c(x) = 0$$

y teniendo en cuenta que

$$y_1' + a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x) = 0$$

llegamos a

$$u' + a(x)u^2 + (2a(x)y_1 + b(x))u = 0$$

que, efectivamente, es una ecuación de Bernoulli, que **será reducible a una EDO lineal de primer orden en la variable $z = 1/u$.**

Podríamos pues reducir directamente la ecuación de Riccati a una lineal mediante el cambio de función $y = y_1 + \frac{1}{z}$, quedándonos una EDO lineal de primer orden en z .



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Métodos elementales de integración

Ejercicio: Integrar la ecuación $y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2$ sabiendo que una solución particular es $y_1(x) = x$. **Hacer!**



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

El problema de Cauchy: Existencia y unicidad de soluciones

Es posible establecer la existencia de solución del problema de valores iniciales, o **problema de Cauchy**, para ecuaciones de la forma

$$y'(t) = f(t, y),$$

usando *soluciones aproximadas* que son poligonales, es decir funciones lineales a trozos. Tales poligonales fueron consideradas por Euler y permiten *probar* la existencia de solución, así como el *cálculo* de soluciones aproximadas con error prescrito. Esto último será interesante para construir aproximaciones numéricas al problema ...



Teorema de Cauchy

Sea $f(t, y(t))$ verificando las hipótesis siguientes:

- (H1) f es continua en la banda $[t_0 - a, t_0 + a] \times R^n$ verificando además la acotación

$$|f(t, y)| \leq M \text{ para todo } (t, y) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times R^n$$

- (H2) f satisface la condición de Lipschitz global siguiente

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

para todo

$$(t, y_1), (t, y_2) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times R^n.$$



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

El problema de Cauchy: Existencia y unicidad de soluciones

Teorema de Cauchy (Cont.)

Entonces existe una única función

$$y : (t_0 - a, t_0 + a) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \forall t \in (t_0 - a, t_0 + a) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

No demostraremos el teorema aunque, como hemos mencionado, en su demostración se hace uso de soluciones aproximadas al problema de tipo poligonal con error prescrito (**poligonales de Euler**). Veamos cómo se construyen, empezando en primer lugar por la definición de solución aproximada de (1) ...



Solución aproximada con error ϵ

Dada la función

$$y_\epsilon : [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

decimos que es una solución aproximada del problema (1) con error $\epsilon > 0$ si:

- a) $(t, y_\epsilon(t)) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ si $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$.
- b) y_ϵ es continua en $[t_0 - a, t_0 + a]$ y tiene derivada acotada salvo, a lo más, en un número finito de puntos, $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r\} \subset [t_0 - a, t_0 + a]$.
- c) $|y'_\epsilon(t) - f(t, y_\epsilon(t))| \leq \epsilon$ para todo $t \in [t_0 - a, t_0 + a] - \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r\}$ y verifica $|y_\epsilon(t_0) - y_0| \leq \epsilon$



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

El problema de Cauchy: Existencia y unicidad de soluciones

Estas poligonales son la base para construir el **método de Euler explícito** (el más simple de los métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas de EDOs de primer orden).

