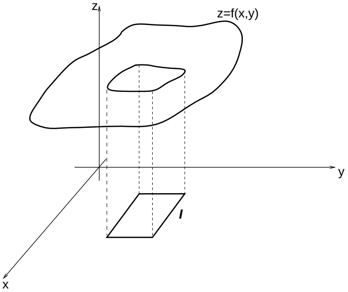
Lecturas de Cálculo Integral
Ampliación de Matemáticas
Grado en Ingeniería Civil

Curso 2018-19

Integral de Riemann en dos variables

Extensión del correspondiente concepto de una variable: si $f(x,y)$ es una función continua y positiva en un rectángulo I de $\mathbb{R}^2$, la integral de f sobre este rectángulo es el volumen entre la gráfica de la función y el plano XY, dentro del rectángulo I:



Cálculo Integral en más de una variable real

Veamos cómo calcular integrales dobles sobre rectángulos:

Teorema de Fubini

Si $f : I \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable Riemann en I tal que para cualquier $x \in [a, b]$ (salvo a lo sumo un número finito de valores) la función $f_x : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_x(y) := f(x, y)$ es integrable Riemann en $[c, d]$, entonces la función $\int_c^d f_x(y)dy$ es integrable Riemann en $[a, b]$ y, además,

$$\iint_I f = \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y)dy \right) dx \,.$$

De forma, similar, si $f_y(x) := f(x, y)$ resulta ser continua para cualquier $y \in [c, d]$ salvo un número finito de valores, entonces:

$$\iint_I f = \int_c^d \left(\int_a^b f_y(x)dx \right) dy \,.$$

Veamos ahora cómo calcular integrales dobles de una función f sobre dominios más generales (D) de $\mathbb{R}^2$:

Idea teórica: **a)** incluir D dentro de un rectángulo I de $\mathbb{R}^2$; **b)** extender la definición de la función f a I, asignando el valor 0 en aquellos puntos de I no incluidos en D; **c)** aplicar el Teorema de Fubini.

En la práctica: expresar una de las variables (x o y) que determinan el dominio D como función de la otra (y o x) e integrar respecto a esa variable. Posteriormente integrar la otra variable.

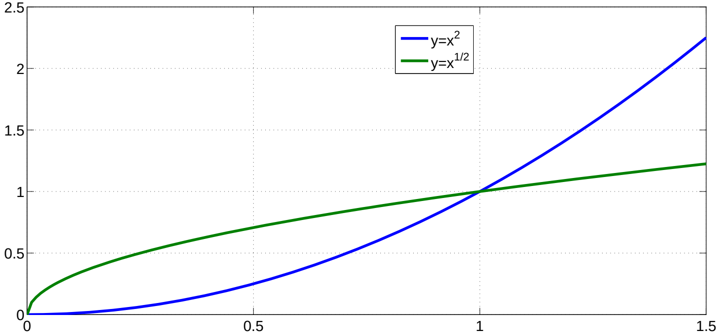
Mejor trabajemos con un ejemplo ...

Comentario previo: de acuerdo con lo discutido, el área de un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ ($\mu(D)$) delimitado por una curva cerrada vendrá dada por:

$$\mu(D) = \int\int_D 1 \, .$$

Ejemplo: Hallar el área de la superficie comprendida entre las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.
Este ejemplo se debería saber resolver con técnicas de integración en una variable (**hacer!**).

Las curvas se cortan en $(0, 0)$ y $(1, 1)$, como se muestra en la siguiente figura



2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
y=x2
y=x1/2

El dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ se expresa como

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ x^2 < y < \sqrt{x}\},$$

de modo que

$$\mu(D) = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1 \, dy \right) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx.$$

La última igualdad es lo que habríamos escrito, directamente, si hubiésemos razonado en términos de funciones de una sola variable. **El resultado de la última integral es $1/3$, que es el valor del área pedida.**

Idea básica: en ocasiones, la utilización de variables apropiadas en lugar de las originales, nos ayuda a simplificar la región de integración y/o el integrando (como ocurre con la integración en una variable).

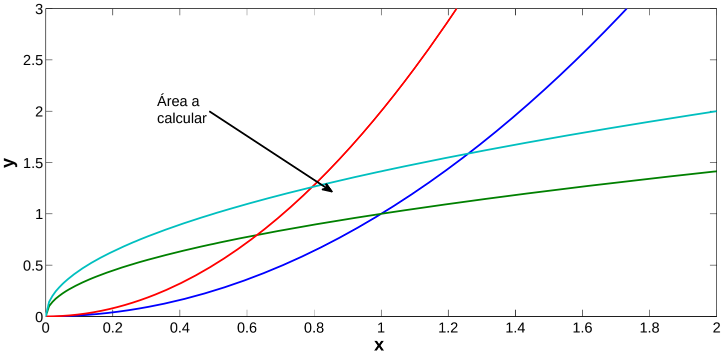
Teorema del cambio de variable (Integrales Dobles)
Sean $D, E \subset \mathbb{R}^2$, y sea $T : E \longrightarrow D$ una aplicación biyectiva dada por $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. Sea J el jacobiano de este cambio de variable; es decir,

$$J = det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

Supongamos, además, que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable. Entonces,

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_E f(x(u,v), y(u,v))\cdot \mid J \mid du\, dv\,.$$

Ejemplo 1: **Calcular** $\int\int_D dxdy$ **siendo** D **la región del plano limitada por las cuatro curvas;** $y = x^2$, $x = y^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2/2$.



Este problema se puede resolver: **a)** con técnicas de integración en una variable (hacer!); **b)** aplicando técnicas de dos variables en las variables originales (hacer!); **c)** considerando un cambio de variables. Por ejemplo:

$$u = x^2/y \ , \ v = y^2/x$$

Si nos restrigimos al primer cuadrante, donde se encuentra D, **estas ecuaciones efectivamente definen un cambio de variables** (aplicación biyectiva).
Los límites de la región D (cada una de las curvas), se corresponden con $u = 1$ ($y = x^2$), $u = 1/2$ ($y = 2x^2$), $v = 1$ ($x = y^2$) y $v = 2$ ($x = 2y^2$).
Es decir, conseguimos transformar el dominio original en un rectángulo.

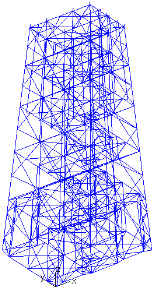
$$\int\int_D dxdy = \int\int_{D'} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

siendo $D' = \{(u,v) \mid 1/2 \leq u \leq 1\,, 1 \leq v \leq 2\}$.

Dado que $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = 3$ (hacer!), tenemos que $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1/3$ y de esta forma

$$\int\int_D dxdy = \int\int_{D'} \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}\int_{1/2}^{1}\int_{1}^{2} = 1/6\,.$$

Un comentario: Este tipo de transformaciones son de gran utilidad en, por poner un ejemplo, **Métodos de Elementos Finitos** en más de una dimensión (técnicas numéricas para resolver, normalmente, problemas vinculados a EDPs), de gran utilidad en geometrías variadas ...



Un ejemplo de cálculo de estructuras: triangularización para el diseño de una plataforma que ha de someterse a vibraciones de diverso tipo.

En este tipo de cálculos interesa transformar triángulos y cuadriláteros con vértices de coordenadas cualesquiera a triángulos y cuadriláteros "de referencia" ...

Ejemplo-Ejercicio 2:

Calcular $\int\int_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$ **donde** D **es el triángulo formado por los ejes coordenados y la recta** $x + y = 1$**.**

En este caso, el dominio D es muy sencillo y la dificultad se plantea con el integrando. Un cambio de variables que resulta útil es $u = y - x$, $v = y + x$. Continuar y comprobar que la solución que se obtiene es $e - e^{-1}$.

Por ejemplo:

1. Cálculo de áreas de superficies en $\mathbb{R}^2$: como ya comentamos, la superficie de la región $D \subset \mathbb{R}^2$ delimitada por una curva cerrada es: $\mu(D) = \int\int_D dxdy$.
2. Cálculo de volúmenes: $\int\int_D f(x,y)dxdy$ es el volumen comprendido entre la gráfica de $f(x,y)$ (supuesta positiva en D), el plano XY y la superficie lateral (perpendicular al plano XY) de base D.
3. Cálculo de áreas de superficies en $\mathbb{R}^3$ dadas por $z = f(x,y)$ con x e y en una región D;

$$S = \int\int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy\,.$$

Generalización del concepto de integral de Riemann a tres variables: muy sencillo conceptualmente!. **Las correspondientes particiones definirían ahora cubos en** $\mathbb{R}^3$ (recordemos que eran segmentos en una dimensión y rectángulos en dos dimensiones). De este modo,

$$\int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz$$

se obtendrá sumando los valores ínfimos u supremos de la función pesados en los “cubos elementales” de la partición.

Importante: los teoremas de Fubini y del cambio de variable son aplicables, con la correspondiente extensión. Así, por ejemplo, para integrales en volumen, cuando se aplica cambio de variables hay que obtener la matriz Jacobiana, que en este caso será una matriz tres por tres.

Es habitual escribir las integrales en dos variables de la forma:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D f(x,y)dS\,,$$

y, de esta forma, escribir el teorema de cambio de variables como sigue:

$$\int\int_D f(x,y)dS = \int\int_{D'} f(u,v)dS\,,$$

donde D' es la región D escrita en las variables u, v, $f(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))$ y donde tenemos la regla de cálculo:

$$dS = dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv\ .$$

Llamaremos a *dS* Elemento de Superficie, que se "escribe de distinto modo según las coordenadas que se elijan".

De igual forma, escribiremos:

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int f(x,y,x)dV \ ,$$

de modo que si se realiza un cambio de variables, escribiríamos:

$$dV = dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw \ .$$

Llamaremos a dV Elemento de Volumen.

Ejercicio 1: Deducir los elementos de volumen es coordenadas cilíndricas y esféricas.

Solución:

1. Cilíndricas: $dV = rdrdzd\phi$.
2. Esféricas: $dV = r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$.

Ejercicio 2: Calcular, mediante integrales triples, el volumen de una esfera de radio R. Comentario: lógicamente, si D es la esfera, su volumen será $\int\int\int_D dV$.

Motivación: muchas ecuaciones y propiedades fundamentales de la Física (y, en consecuencia, de aplicación en Ingeniería) se derivan a partir de integrales de campos escalares y vectoriales sobre líneas, superficies y volúmenes.

Ejemplos:

1. Mecánica de Fluidos: Ecuación de continuidad.
2. Termodinámica: Ecuación de conducción del calor.
3. Mecánica: Campos de fuerza conservativos.

Integral de línea: va a generalizar el concepto de integral de Riemann en una variable. El dominio de integración será ahora una curva en $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$ en las aplicaciones que consideremos).

Curva en $\mathbb{R}^n$

Es una función $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que existen las derivadas de sus componentes y son continuas (es decir, que es de clase $\mathcal{C}^1$, a lo cual nos referiremos diciendo que la curva es suave).

En particular, una **curva en $\mathbb{R}^2$** es una función:

$$\begin{array}{rcl} C : D \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \to & (x(t), y(t)) \end{array}$$

siendo t el parámetro, que al ser variado va generando los puntos (x, y) de la curva.

Integral de línea de una función escalar (para curvas en $\mathbb{R}^2$)

Sea una curva en $\mathbb{R}^2$ que une los puntos A y B dada en forma paramétrica $t \to (x(t), y(t))$, definimos la integral de línea de una función continua $f(x, y)$ sobre la curva C entre $A = (x(a), y(a))$ y $B = (x(b), y(b))$ como:

$$\int_{C_{AB}} f\,dl = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt\,.$$

Casos particulares:

1. Si el parámetro de la curva es x, es decir, $t = x$, entonces $\int_{C_{AB}} f\,dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx\,.$
2. Si sobre la curva f una de las variables fuera constante (por ej. y) entonces: $\int_{C_{AB}} f\,dl = \int_a^b f(x(t), k)\sqrt{x'(t)^2}\,dt = \pm\int_{x_a}^{x_b} f(x, k)\,dx$ que es la conocida integral de Riemann en una variable.

La definición puede, por supuesto, extenderse a fácilmente a curvas en $\mathbb{R}^3$ o sin más a $\mathbb{R}^n$:
Sea la curva

$$\begin{array}{rcl} C : D \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \to & \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) \end{array}$$

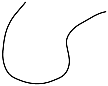
Consideremos $\boldsymbol{x}'(t) = (x_1'(t), ..., x_n'(t))$ y sea $||\boldsymbol{x}'(t)||$ el módulo de este vector. Entonces

Integral de línea de una función escalar (para curvas en $\mathbb{R}^n$)

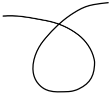
$$\int_{C_{AB}} f dl = \int_a^b f(\boldsymbol{x}(t))||\boldsymbol{x}'(t)||dt \qquad (1)$$

Comentario: **$\boldsymbol{x}'(t_0)$ es un vector tangente a la curva $\boldsymbol{x}(t)$ en $t = t_0$ (es el** *vector velocidad de la curva* **en ese punto).**

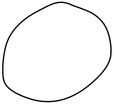
Comentario: **en los cálculos consideraremos siempre que las curvas son** *suaves* **y** *simples* **(o la unión de curvas suaves y simples).**



suave y simple



suave pero no simple



simple y cerrada

En las definiciones anteriores asumimos que *f* era una función *escalar* (es decir, los valores de la función eran números reales). Es posible extender la definición de integral de línea a funciones (*campos*, por su aplicación en Física) vectoriales (es decir, los valores de la función son elementos de $\mathbb{R}^n$).

Integral de línea de una función vectorial (para curvas en $\mathbb{R}^n$)

Sea $\boldsymbol{r} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva suave que une los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. Denotamos por C_{AB} el lugar de los puntos de la curva desde $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$. Sea $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Definimos la integral de línea de $\boldsymbol{F}$ sobre la curva $\boldsymbol{r}$ entre los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ de $\mathbb{R}^n$ como:

$$\int_{C_{AB}} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \int_{C_{AB}} (\boldsymbol{F}.\boldsymbol{T})\, dl$$

representando $\boldsymbol{T}$ el vector unitario (variable) tangente a la curva. Es decir, que la integral de $\boldsymbol{F}$ sobre la curva $\boldsymbol{r}(t)$ es la integral de línea de la función escalar $\boldsymbol{F}.\boldsymbol{T}$ (proyección de $\boldsymbol{F}$ sobre la tangente) sobre la curva.

Comentario: Asumiendo que $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$, es claro que el vector unitario tangente a la curva en $t = t_0$ es $\boldsymbol{T}(t_0) = \boldsymbol{r}'(t_0)/||\boldsymbol{r}'(t_0)||$ y por lo tanto, podemos escribir:

$$\int_{C_{AB}} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dr} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)).\boldsymbol{r}'(t)dt$$

donde $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{r}(b) = \boldsymbol{B}$.

Ejemplo: Sea $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (z, y, x)$. Calcular la integral de línea de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la curva $y = x^2$, $z = x$ entre $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$.

Solución:

Escogemos como parámetro $t = x$ de forma que $\boldsymbol{r}'(t) = (1, 2t, 1)$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) = (t, t^2, t)$ y $\boldsymbol{r}(0) = (0, 0, 0)$, $\boldsymbol{r}(1) = (1, 1, 1)$. Luego $\boldsymbol{F}.\boldsymbol{r}' = t + 2t^3 + t$ y entonces

$$\int_C \boldsymbol{F}\boldsymbol{dr} = \int_0^1 (2t + 2t^3)dt = 3/2\,.$$

Un teorema fundamental es la **regla de Barrow para integrales de línea**.

Regla de Barrow

Sea ϕ una función escalar tal que la función $\nabla\phi$ es continua y sea C un camino suave que une los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, entonces:

$$\int_{C_{AB}} \nabla\phi\, \boldsymbol{dr} = \phi(\boldsymbol{B}) - \phi(\boldsymbol{A})$$

Este Teorema nos garantiza que **si una función vectorial continua se puede escribir como el gradiente de una función escalar, entonces la integral de camino entre A y B es la misma para cualquier camino suave a trozos uniendo estos dos puntos, es decir, que sólo depende de los puntos iniciales y finales del camino**. **Una función vectorial que cumple esta propiedad se dice que es un campo conservativo**.

Campo conservativo: definición

Diremos que un campo vectorial es **conservativo** si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones (equivalentes entre sí).

1. $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de un campo escalar ϕ, al que se le llama función escalar del campo conservativo $\boldsymbol{F}$.
2. Para cualesquiera caminos suaves C_{AB}, $\bar{C}_{AB}$ que unan los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ (desde $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, por ejemplo), se tiene que $\int_{C_{AB}} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \int_{\bar{C}_{AB}} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}$
3. Si C es una curva cerrada (que empieza y termina en un mismo punto) entonces $\int_C \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} \equiv \oint_C \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} (\textit{Integral de Circulación}) = 0$.

Campo conservativo: propiedad 1

Si $\boldsymbol{F}$ es un campo conservativo con función potencial ϕ, entonces $\phi + K$, siendo K una constante, también es una función potencial del mismo campo $\boldsymbol{F}$.

Campo conservativo: condición (necesaria) de Green para campos de $\mathbb{R}^2$

Si $\boldsymbol{F} = (F^x, F^y)$, $\boldsymbol{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, es conservativo en el dominio D, teniendo F^x y F^y derivadas parciales continuas en D, entonces $F^y_x = F^x_y$.

Campo conservativo: condición (suficiente) de Green para campos de $\mathbb{R}^2$

Sea $\boldsymbol{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial con dominio D **simplemente conexo** de tal forma que las derivadas parciales de sus componentes F^x, F^y tienen primeras derivadas parciales continuas en D cumpliéndose que $F^y_x = F^x_y$. Entonces $\boldsymbol{F}$ es conservativo.

Dominio simplemente conexo: dominio ***sin agujeros*** **y sin** ***piezas separadas*.**

Ejemplo: Estudiar si el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y) = (2xy, x^2)$ es un campo conservativo. Obtener su función potencial.

Solución:

$\boldsymbol{F}$ es un campo $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}^2$ y se cumple que $F^y_x = F^x_y$, luego es un campo conservativo. Calculemos la función potencial $\phi(x, y)$:
Como $\boldsymbol{F} = \nabla\phi(x, y)$, se verifica que

$$\phi_x = F^x = 2xy \Rightarrow \phi(x, y) = x^2y + C(y)$$

y derivando $\phi_y = x^2 + C'(y)$, pero $\phi_y = F^y = x^2$ luego $C'(y) = 0$ y $C(y)$ es una constante (podemos tomarla cero), de modo que una función potencial es

$$\phi(x, y) = x^2y.$$

Comentario: Para campos vectoriales de $\mathbb{R}^3$ la definición de los campos conservativos no cambia, aunque sí ligeramente la condición de Green: se deberá verificar $F^y_x = F^x_y$, $F^y_z = F^z_y$, $F^z_x = F^x_z$ simultáneamente. Estas condiciones se pueden escribir de modo más simple introduciendo el operador rotacional.

Rotacional de un campo vectorial: definición

Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que escribimos como $\boldsymbol{F} = F^x \boldsymbol{i} + F^y \boldsymbol{j} + F^z \boldsymbol{k}$, siendo $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ la base canónica. Definimos el campo rotacional de $\boldsymbol{F}$ como:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F^x & F^y & F^z \end{vmatrix} = (F^z_y - F^y_z)\boldsymbol{i} + (F^x_z - F^z_x)\boldsymbol{j} + (F^y_x - F^x_y)\boldsymbol{k}$$

Un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de una función escalar $\longleftrightarrow$ $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$.

Acabamos de generalizar el concepto de integral de Riemann "adaptándolo" a la integración sobre curvas en el espacio, no necesariamente rectas. Es de esperar que podamos también encontrar una generalización del concepto de integral doble que nos permita integrar sobre superficies curvadas en el espacio.
Un elemento esencial del cálculo será la parametrización de las superficies

Superficie parametrizada: definición

Una superficie parametrizada en $\mathbb{R}^3$ es una función $\boldsymbol{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. La superficie S correspondiente a la función $\boldsymbol{r}$ es la imagen $S = \boldsymbol{r}(D)$. Escribiremos

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

y si $\boldsymbol{r}$ es diferenciable se dirá que S es una superficie diferenciable.

Dos ejemplos sencillos de parametrización de superficies son los siguientes:

1. **Parametrización del plano en coordenadas polares**. El plano $z = k$ se puede parametrizar utilizando coordenadas polares:

$$\{(x, y, k)\,,\; x, y \in \mathbb{R}\} = \{(r\cos\phi, r\sin\phi, k)\,,\; r \geq 0, 0 \leq \phi < 2\pi\}\,.$$

2. **Parametrización de una esfera mediante coordenadas esféricas**. Una esfera de radio R se puede parametrizar utilizando dos ángulos:

$$\begin{aligned} x(\theta,\phi) &= R\sin\theta\cos\phi \\ y(\theta,\phi) &= R\sin\theta\sin\phi \\ z(\theta,\phi) &= R\cos\theta \end{aligned}$$

De modo que la esfera S es:

$$S = \{(x(\theta,\phi), y(\theta,\phi), z(\theta,\phi))\; 0 \leq \theta < \pi\,,\; 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

Observación: Consideraremos en todo momento superficies diferenciables $S = S(u, v)$. Fijado uno de los parámetros, pongamos que v, al variar el otro obtendríamos una curva en $\mathbb{R}^3$.
Las tangentes a esta curva en cada punto se pueden obtener por derivación respecto a u:

$$\boldsymbol{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{k}$$

y de similar forma podríamos obtener el vector tangente a la superficie a lo largo de la dirección de v**:**

$$\boldsymbol{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\boldsymbol{k}$$

Dado un punto de la superficie S, como ambos vectores $\boldsymbol{T}_u$ y $\boldsymbol{T}_v$ son tangentes a dos curvas contenidas en S, **ambos son ortogonales al vector normal a la superficie** en ese punto y por lo tanto, por las propiedades del producto vectorial,

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v$$

es normal a las superficie, siempre, claro está, que $\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v \neq 0$ en el punto en cuestión (si esto es así, diríamos que la superficie parametrizada no es suave; consideraremos que esto no ocurre).
Comentario: Esto nos permite obtener la ecuación del plano tangente en un punto (x_0, y_0, z_0):

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\boldsymbol{N} = 0$$

donde $\boldsymbol{N}$ se evalúa en (x_0, y_0, z_0).

Ejemplo:

Considerando la parametrización de la esfera antes considerada, tendríamos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_\theta &= R(\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, -\sin\theta) \\ \boldsymbol{T}_\phi &= R(-\sin\phi\sin\theta, \cos\phi\sin\theta, 0) \end{aligned}$$

y $\boldsymbol{T}_\theta \times \boldsymbol{T}_\phi = R\sin\theta(R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta) = R\sin\theta\boldsymbol{r}$. *Por lo tanto, si* $\sin\theta \neq 0$, *se trata de un vector proporcional al vector* (x, y, z) *que tiene la dirección radial, como cabría esperar del vector normal a la superificie de una esfera.*
El caso $\sin\theta = 0$ $(\theta = 0, \pi)$ *presenta un problema en la parametrización: diríamos que la superficie parametrizada no es suave para esos valores de* θ.

Ya estamos en condiciones de definir la integral de una función escalar sobre una superficie parametrizada ...

Integral de una función escalar sobre una superficie parametrizada: definición

Si $f(x, y, z)$ es una función escalar continua, definida sobre una superficie S, estando S parametrizada por el campo vectorial $\boldsymbol{r}(u, v)$, con u y v variando en un dominio D, se define la integral de f sobre S como:

$$\int_S f(x, y, z) dS = \int\int_D f(\boldsymbol{r}(u, v)) ||\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v|| dudv$$

Observaciones:

1. La integral doble de Riemann puede verse como un caso particular de esta definición (yendo a una dimensión más, eso sí).
2. La fórmula de cambio de variable está, de algún modo, contenida en esta definición.

Integral de una función vectorial sobre una superficie parametrizada: definición

Si $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ es un campo vectorial continuo, definido sobre una superficie S, estando S parametrizada por el campo vectorial $\boldsymbol{r}(u, v)$, con u y v variando en un dominio D, se define la integral de $\boldsymbol{F}$ sobre S como:

$$\int_S \boldsymbol{F}(x, y, z)\boldsymbol{dS} = \int \int_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u, v)).(\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v)dudv$$

Área de una superficie S en $\mathbb{R}^3$

Si S es una superficie en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por el campo vectorial $\boldsymbol{r}(u, v)$, con u y v variando en un dominio D, se define el área de S como:

$$A(S) = \int\int_D \|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\| \, dudv,$$

donde $\boldsymbol{T}_u$ y $\boldsymbol{T}_v$ son los vectores tangentes a la superficie a lo largo de las direcciones de u y v, respectivamente.

Comentario: De la misma forma que las integrales de línea pueden reducirse al problema de calcular una función (potencial) en dos puntos (regla de Barrow) cuando el campo vectorial es conservativo, es tentador pensar que semejante "reducción de dimensión" puede aplicarse para relacionar determinadas integrales de superficie con integrales de línea e integrales de volumen con integrales de superficie. Veremos que este tipo de relaciones son establecidas en los teoremas de Gauss y Stokes (Green).

Teorema de Green

Sea D una región en el plano delimitada por una curva C suave a trozos y cerrada y sea $\boldsymbol{F}(x, y) = (F^x(x, y), F^y(x, y))$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ en D. Entonces

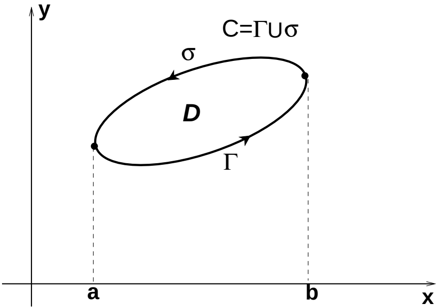
$$\oint_C \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial F^y}{\partial x} - \frac{\partial F^x}{\partial y} \right) dxdy$$

donde la curva C se recorre en el sentido tal que si nos moviéramos sobre la curva en este sentido, el dominio D quedaría a nuestra izquierda.
Si D está delimitada por varias curvas suaves y cerradas $C_1, ..., C_n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \int\int_D \left(\frac{\partial F^y}{\partial x} - \frac{\partial F^x}{\partial y} \right) dxdy$$

donde cada curva se recorre en el sentido tal que la región D quede a la izquierda (diremos que éste es el sentido positivo).

Un dibujo sirve para aclarar qué entendemos por *sentido positivo de recorrido* ...



Como vemos, el teorema de Green relaciona integrales dobles con integrales de línea sobre curvas planas. En realidad es un caso particular del teorema de Stokes, que enunciaremos más adelante. Una primera aplicación del Teorema de Green es el **cálculo de áreas planas.**

Cálculo de áreas planas

Sea una región D para la que se puede aplicar el teorema de Green, delimitada por curvas C_1,...C_n, entonces el área de la superficie, se puede obtener de siguiente modo:

$$\mu(D) = \int\int_D dxdy = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i}[xdy - ydx]$$

donde las integrales de línea se recorren en el sentido positivo (teorema de Green).

Ejemplo: Calcular el área de una elipse de semiejes a y b.

Solución:

Una parametrización conveniente para la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *es la siguiente*

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \to dx = -a\sin t\, dt \\ y &= b\sin t \to dy = b\cos t\, dt \end{aligned}$$

variando t desde 0 hasta 2π se recorre la elipse en el sentido positivo. Aplicando el anterior corolario:

$$S = \frac{1}{2}\oint [xdy - ydx] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos t(b\cos t dt) - b\sin t(-a\sin t dt)] = ab\pi.$$

Una consecuencia del teorema de Green es la fŕmula de la integral doble del Laplaciano. Antes,**recordemos qué es un Laplaciano**:
Sea f una función escalar dos veces derivable dependiente de n variables, se define la actuación del Laplaciano Δ sobre f como:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Integral doble del Laplaciano

Sea D una región plana delimitada por una curva parametrizada suave C con orientación positiva y $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ entonces

$$\int\int_D \Delta f dxdy = \oint D_{\boldsymbol{n}} f \, dl$$

donde la integral de la derecha es la integral de línea de la función escalar $D_{\boldsymbol{n}} f$ (derivada direccional de f según el vector unitario normal a la curva en cada punto y apuntando hacia el exterior).

Integrales de línea y de superficie
Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

El teorema de Gauss relaciona integrales en volumen con integrales de superficie. Para enunciarlo es conveniente recordar la definición de **divergencia de un campo vectorial:**

Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ dependiente de n variables, $\boldsymbol{F} = (F^{x_1}, ..., F^{x_n})$. Se define su divergencia como:

$$div(\boldsymbol{F}) = \nabla \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F^{x_i}}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^{n} F_{x_i}^{x_i} \,.$$

Teorema de Gauss o de la divergencia

Sea una región V en $\mathbb{R}^3$ encerrada por una superficie S parametrizada con parámetros u y v, de tal modo que el vector normal $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_u$ apunta hacia el exterior del volumen V. Sea un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ que es de clase $\mathcal{C}^1$ en V, entonces:

$$\int\int\int_V \nabla \boldsymbol{F} dV = \int\int_S \boldsymbol{F}.\boldsymbol{dS}$$

Comentario: La integral de $\boldsymbol{F}$ a la derecha de la expresión del Teorema de Gauss recibe el nombre de **flujo de *F* sobre la superficie *S***.

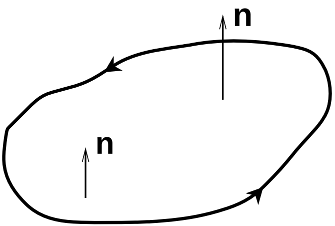
Ejercicio: Verificar el teorema de la divergencia para el siguiente campo vectorial: $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ **siendo** S **la superficie cilíndrica** $x^2 + y^2 = 4$**,** $0 \leq z \leq 5$ **junto con sus bases** $\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 4, z = 5\}$ **y** $\{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$**.**

Hacer!

El **teorema de Stokes** va a relacionar integrales de superficie en $\mathbb{R}^3$ con integrales de línea en $\mathbb{R}^3$; el teorema de Green no será más que un caso particular de este caso más general.
Antes de enunciar el teorema, necesitamos introducir el concepto de *superficie suave orientable*:

1. De igual forma que decíamos que una curva era suave si admitía tangente en todo punto de la curva, siendo la tangente una función continua, diremos que **una superficie es suave si existe la normal a la superficie en cada punto y esta varía de forma continua al movernos sobre la superficie**.
2. Es evidente que dada una superficie y $\boldsymbol{n}$ el vector unitario perpendicular a la superficie en un punto, también podríamos escoger $-\boldsymbol{n}$ como vector normal; cada una de estas opciones proporcionará normales de sentido opuesto en cada punto. **Escoger una de estas dos opciones se dice que es escoger una orientación de la superficie**.

Consideremos una superficie S cuya frontera es una curva suave simple y cerrada. Escogida la parametrización de la curva $\boldsymbol{r}(t)$ diremos que **la orientación de la curva es positiva respecto a la orientación de la superficie** (o que tiene el sentido inducido por la superficie orientada) **si los vectores normales $\boldsymbol{n}$ a la superficie cercanos a esta curva son tales que $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{n}$ apunta alejándose de la superficie** o, dicho de otra forma, si *al caminar sobre la curva frontera de la superficie, el vector normal apunta hacia arriba y la superficie queda a la izquierda*.



Teorema de Stokes

Sea una superficie S en $\mathbb{R}^3$ limitada por una curva suave y cerrada Γ y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ en S entonces

$$\int\int_S (\nabla \times \boldsymbol{F})\, \boldsymbol{dS} = \oint_\Gamma \boldsymbol{F}\boldsymbol{dr}$$

donde la orientación de Γ es la inducida por la orientación de la superficie.

Ejercicio: **Utilizar el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea**

$$\int_C (-y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz)\,,$$

donde C **es la intersección del cilindro** $x^2 + y^2 = 1$ **y el plano** $x + y + z = 1$**. La orientación de** C **es tal que gira en el sentido que lleva el eje X al eje Y. Verificar el resultado haciendo directamente la integral de línea.**

Hacer!