

Hoja de Problemas del Bloque de Cálculo Integral

1.- Hallar el área de la superficie comprendida entre las curvas $y = x^2$, $y = x^{1/3}$.

2.- Calcular $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$. Indicación: transformar la integral en una en la parte de D que está en el primer cuadrante.

3.- Calcular $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$, donde $f(x, y) = \max(|x|, |y|)$.

4.- Calcular

$$\iint_D x^y dx dy,$$

siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

5.- Sea el cambio de variable definido por: $x = u + v$, $y = v - u^2$. Calcular:

1. El jacobiano $J(u, v)$.

2. La imagen S en el plano XY del triángulo T en el plano UV de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$.

3. El área de S .

4. La integral $\iint_S (x - y + 1)^{-2} dx dy$

6.- Utilizar una transformación lineal para calcular $\iint_S (x - y)^2 \sin^2(x + y) dx dy$, siendo S el paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ y $(0, \pi)$.

7.- Determinar la integral de la función

$$f(x, y) = \frac{y^4}{b^4 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)} + xy^2$$

sobre el recinto $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, donde a y b son constantes positivas.

8.- Determinar la integral de la función

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sobre los recintos:

1. $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1 \right\}$.

2. $H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, 0 \leq x \right\}$.

9.- Calcular $\iint_D \frac{dx dy}{xy}$, donde D es el dominio plano limitado por las curvas

$$x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = a'x, \quad x^2 + y^2 = by, \quad x^2 + y^2 = b'y,$$

siendo: $0 < a < a'$, $0 < b < b'$.

Indicación: Efectúa un cambio de variable, de forma que el nuevo dominio sea el rectángulo $[a, a'] \times [b, b']$.

10.- Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies: $y = z^2$, $2y = z^2$, $z = x^2$, $2z = x^2$, $x = y^2$, $2x = y^2$.

Indicación: efectuar un cambio de variables de forma que el nuevo recinto de integración sea el cubo $[1, 2]^3$. Hallar el jacobiano del cambio inverso.

11.- Calcular el volumen limitado por la superficie $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3a^3xyz$, que pertenece al primer octante.

12.- Calcular el volumen limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$, $y^2 = x$.

13.- Calcular $I = \iiint_V [x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2] dx dy dz$, siendo V el volumen determinado por el cilindro, $y^2 + z^2 = 2pz$, y las dos hojas del cono, $x^2 - q^2(y^2 + z^2) = 0$, siendo $p, q > 0$.

14.- Hallar $I = \iiint x^2y^2z dx dy dz$ extendida a la porción de cono $x^2 + y^2 = xz$, comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = c$. (En esféricas).

15.- Calcular $\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz$, en los siguientes casos:

1. $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, donde W es la región que queda bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. $f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2+z^2}$, donde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$.

16.- Integrar:

(a) $f(x, y) = 2xy^2$ sobre el primer cuadrante de la circunferencia de radio R .

(b) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ a lo largo de la hélice circular $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$, desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 0, 6\pi)$.

17.- Determinar la longitud y la masa de un hilo cuya forma es el arco de parábola $y = x^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$ y cuya densidad es $\rho(x, y) = x$.

18.- Hallar la integral de línea $\int_{\rho} xy dx + (x^2 - y^2) dy$, siendo ρ :

a) La circunferencia de centro el origen y radio unidad (recorrida en sentido antihorario).

b) El arco de parábola $y^2 = x$, entre $A = (1, -1)$ y $B = (1, 1)$.

c) La curva $y^2 = x^3$ entre $A = (1, -1)$ y $B = (1, 1)$.

19.- Calcular las siguientes integrales, si las curvas cerradas se recorren en sentido positivo, es decir, en sentido contrario a las agujas del reloj:

(a) $\int_g (x - y) dx + (x + y) dy$, siendo g el segmento que une $(1, 0)$ con $(0, 2)$.

(b) $\int_C x^3 dy - y^3 dx$, siendo C la circunferencia $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

(c) $\int_{\rho} (x + 2y)dx + (3x - y)dy$, siendo ρ la elipse de ecuación $x^2 + 4y^2 = 4$.

20.- Calcular:

(a) $\int_{\gamma} ydx - xdy + zdz$, siendo γ la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $z - y = a$ en sentido antihorario.

(b) $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2, x^2, 2xz)$ y γ la intersección del plano $x = y$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, recorrida en sentido positivo.

(c) $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ y γ la curva intersección de $x^2 + y^2 = 2x$ con $x = z$.

21.- Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin y + z, x \cos y + e^z, x + ye^z)$.

(a) Probar que la integral sobre cualquier curva cerrada simple, C^1 a trozos, vale 0.

(b) Obtener un potencial de \mathbf{F} , es decir, encontrar ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

22.- Sea el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y^2 + 2xy + ax^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{x^2 + 2xy + by^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

1. Obtener a y b para que la integral de este campo vectorial sobre cualquier curva cerrada simple (excluyendo aquellas que encierren o contengan al origen) valga siempre 0.

2. Con lo valores obtenidos en el apartado anterior, obtener una función potencial de $\mathbf{F}(x, y)$.

Ayuda: Una posible forma de resolver una racional del tipo

$$\int \frac{P(x)}{(x^2 + k)^n} dx$$

siendo el grado de $P(x)$ un polinomio en x de grado, como máximo, $2n - 1$, es el cambio de variable siguiente:

$$x = \sqrt{k} \operatorname{tg} z$$

23.- Calcular $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xze^{x^2+y^2}, 2yze^{x^2+y^2}, e^{x^2+y^2})$ y γ la curva en \mathbb{R}^3

dada por $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

Indicación: probar que \mathbf{F} es conservativo.

24.- Sean la curva en \mathbb{R}^3 , $\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1, z = y^2 - x^2\}$, recorrida en sentido positivo, y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^3, e^y, z)$.

(a) Hallar $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

(b) ¿Existe f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$?

25.- Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ (\mathbf{n} la normal exterior) en los siguientes casos:

- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ y S la frontera del cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$.
- (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, -x^2, x + z)$ y S la porción del plano $2x + 2y + z = 6$ situada en el primer octante, si \mathbf{n} es la normal con tercera componente positiva.

26.- Calcular $\int_{\Gamma} (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy$, siendo γ el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$, directamente y aplicando el teorema de Green.

27.- Se consideran la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0\}$$

(orientada con la normal exterior a la esfera unidad) y la función

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z, y + z, 2z).$$

Calcular $\int_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$.

28.- Utilizando el teorema de Stokes calcular la integral $\int_S \text{rot}\mathbf{F}$ en los siguientes casos, donde S está orientada según la normal exterior:

- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y^2, yz, xy)$ y S el paraboloido $z = a^2 - x^2 - y^2, z \geq 0$.
- (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = ((1 - z)y, ze^x, x \text{sen } z)$ y S es la semiesfera superior de radio a .
- (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + z^3, e^{x+y+z}, x^3 + y^3)$ y $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0\}$.

29.- Verificar el teorema de Stokes para $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$ en el paraboloido $z = a^2 - x^2 - y^2, z \geq 0$.

30.- Sea el sólido K

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 2y^2\}.$$

a) **1.5 ptos.** Calcular su volumen.

b) **2 ptos.** Calcular el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = (x, y, 2z)$ a través de la superficie que limita a K .

31.- Supongamos que la temperatura en cada punto del espacio sea proporcional al cuadrado de la distancia al eje vertical y consideremos el dominio

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2z, z \leq 2\}.$$

- (a) Calcular el volumen de V .
- (b) Calcular la temperatura promedio en V .
- (c) Calcular el flujo del gradiente de temperatura a través (y hacia afuera), de ∂V .

32.- Verificar el teorema de Gauss (es decir, comprobar que se obtiene el mismo resultado calculando las dos expresiones integrales involucradas) para el siguiente campo vectorial:

$$\mathbf{F} = (x^2, y^2, z^2),$$

siendo S la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 5$ junto con sus bases $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, z = 5\}$ y $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$.

33.- (Ejercicio de examen)

Sea la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $z \geq 0$, y el cilindro $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. Al hallar la intersección del cilindro con la esfera, se produce un cuerpo cilíndrico, cuya base está en el plano $z = 0$ y cuya “tapa” está sobre la esfera. Se pide:

1. El volumen del sólido así definido.
2. El área de la “tapa” del sólido.
3. El área lateral del sólido.

34.- (Ejercicio de examen)

Calcular la integral

$$\int_{\gamma} x^2 y dx + 2y dy + x dz,$$

a lo largo del camino cerrado γ limitado por los arcos γ_1 , γ_2 y γ_3 dados por las ecuaciones

$$\gamma_1 \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, \\ y \geq 0, z \geq 0, \end{cases} \quad \gamma_2 \begin{cases} 2x + z = 1, \\ y = 0, \\ x \geq 0, z \geq 0, \end{cases} \quad \gamma_3 \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

35.- Determinar los coeficientes de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} -\pi, & \text{para } -\pi < t < 0, \\ \pi, & \text{para } 0 < t < \pi, \\ 0, & \text{para } t = 0, \pi, \end{cases}$$

para un periodo $T = 2\pi$.

36.- La función $f(t) = \cos^2 t$ es periódica, de periodo 2π . Determinar su serie de Fourier. Indicación: este ejercicio es casi trivial utilizando identidades trigonométricas.

37.- La función $f(t) = \sin^3 t$ es periódica, de periodo 2π . Determinar su serie de Fourier.

38.- La función

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{para } -\pi < t < \pi, \\ 0, & \text{para } t = \pi, \end{cases}$$

puede ser extendida a una función periódica, de periodo 2π . Determinar la serie de Fourier de esta extensión.

39.- La función

$$f(t) = |t|, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

puede ser extendida a una función periódica, de periodo 2π . Determinar la serie de Fourier de esta extensión.

40.- Determinar las series de Fourier seno y coseno de

- 1.

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{para } 0 \leq t \leq \pi/2, \\ \pi - t, & \text{para } \pi/2 < t \leq \pi. \end{cases}$$

$f(t)$ está definida en $[0, \pi]$.

2.

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{para } 0 \leq t < 5, \\ 10 - t, & \text{para } 5 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

$f(t)$ está definida en $[0, 10]$.

3.

$$f(t) = t(\pi - t)$$

$f(t)$ está definida en $[0, \pi]$.

41.- Desarrollar e^{-x} en serie de senos y cosenos entre $[0, \pi]$, tomando este intervalo como período.

42.- Desarrollar e^{-x} en serie de senos y cosenos entre $[0, \pi]$, basándose en la expresión compleja.

43.- Obtener el desarrollo de Fourier de la función $f(t) = t^2 - t$ en el intervalo $[-L, L]$ considerando su extensión periódica con periodo $2L$.