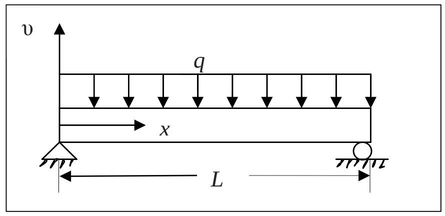
Hoja 4 de Problemas

1.- Consideremos una varilla sujeta por ambos extremos



La curvatura v de una varilla como función de x debida a una carga uniforme q puede expresarse mediante la siguiente EDO

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{qx}{2EI}(x - L).$$

donde

L es la longitud de la varilla,
E es el módulo de Young de la varilla, e
I es el segundo momento de la sección de la varilla.

Asumamos que las condiciones de contorno de nuestro problema vienen expresadas por

$$v(0) = 0, \;\; v(L) = 0,$$

lo que describiría una varilla con extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$.
Considerando $L = q = I = E = 1$, se pide:

a) Obtener la solución exacta del problema integrando la EDO y determinando el valor de las constantes utilizando las condiciones del problema.

b) Resolver el problema (también exactamente) utilizando el siguiente resultado teórico que constituye la base del **método de disparo lineal**:

Sea $u(x)$ la única solución del problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} &u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x) \\ &u(a) = \alpha\,,\; u'(a) = 0 \end{aligned}$$

y $v(x)$ la única solución del problema

$$\begin{aligned} &v''(x) = p(x)v'(x) + q(x)v(x) \\ &v(a) = 0\,,\; v'(a) = 1 \end{aligned}$$

entonces si $v(b) \neq 0$, $y(x) = u(x) + cv(x)$ con $c = \dfrac{\beta - u(b)}{v(b)}$ es solución del problema

$$\begin{aligned} &y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \\ &y(a) = \alpha\,,\; y(b) = \beta\,. \end{aligned}$$

c) Encontrar una discretización de diferencias finitas de orden 2 de nuestro problema y obtener $\{v_n\}_{n=0}^{N}$ para $N = 4$ (es decir, considerando 3 puntos interiores).

d) Resolver el problema de forma aproximada considerando el método de elementos finitos para una partición esquiespaciada con 4 subintervalos (5 nodos, $x_0 \equiv 0$, x_1, x_2, x_3, $x_4 \equiv 1$) y utilizando tres funciones "sombrero" completas ϕ_j:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & x_j \leq x \leq x_{j+1} \end{cases} \qquad j = 1,\, 2,\, 3$$

Solución: Apartado a). Con el valor de los parámetros fijados en el enunciado, la EDO a resolver es:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{x}{2}(x-1).$$

con las condiciones de contorno $v(0) = v(1) = 1$.
Para obtener la solución exacta, integramos dos veces la EDO y obtenemos:

$$v(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + Ax + B,$$

siendo A y B dos constantes de integración.
Sustituyendo ahora las condiciones de contorno en la expresión obtenida:

$$\begin{aligned} v(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = 0, \\ v(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad A = \tfrac{1}{24}. \end{aligned}$$

Luego la solución exacta del problema es:

$$v(x) = \frac{1}{24}\left(x^4 - 2x^3 + x\right).$$

$\blacksquare$

Solución: Apartado b).
En este caso el resultado enunciado se traduce en resolver los siguientes problemas de valores iniciales:
b.1

$$\begin{cases} u'' = \frac{1}{2}x(x-1), \\ u(0) = 0, \;\; u'(0) = 0. \end{cases}$$

b.2

$$\begin{cases} y'' = 0, \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1. \end{cases}$$

Una vez resueltos, la solución del problema de contorno se obtendrá como:

$$v(x) = u(x) + cy(x), \;\; c = \frac{0 - u(1)}{v(1)}.$$

La solución general de la EDO problema **b.1** la hemos obtenido en el apartado **a)** y es:

$$u(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + Ax + B,$$

y sustituyendo las condiciones iniciales del problema, obtenemos que $A = B = 0$, de modo que

$$u(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12}.$$

La solución general de la EDO del problema **b.2** es trivialmente

$$y(x) = Cx + D,$$

y sustituyendo las condiciones iniciales obtenemos $D = 0,\ C = 1$, de modo que

$$y(x) = x.$$

Por tanto, la solución que obtenemos para el problema de contorno es

$$v(x) = u(x) + cy(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + cx,$$

siendo $c = \frac{-u(1)}{y(1)} = \frac{-1/24 + 1/12}{1} = \frac{1}{24}$. De modo que comprobamos que la solución exacta obtenida en este apartado coincide, lógicamente, con la del apartado **a)**.

∎

Solución: Apartado c). Para obtener la solución de diferencias finitas que nos piden, necesitamos la aproximación $\mathcal{O}(h^2)$ para la derivada segunda:

$$\frac{d^2 v}{dx^2}(x_i) \approx \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}.$$

sustituyendo en la EDO obtenemos las ecuaciones de diferencias finitas:

$$\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{2} x_i (x_i - 1).$$

Nos piden que consideremos 3 puntos interiores en el intervalo $(0, 1)$, es decir $h = 1/4$ y $x_1 = 1/4,\ x_2 = 1/2,\ x_3 = 3/4$. Sustituyendo también las condiciones de contorno $v_0 = 0 = v_4$, las anteriores ecuaciones se traducen en el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{2} x_1 (x_1 - 1) \\ \frac{h^2}{2} x_2 (x_2 - 1) \\ \frac{h^2}{2} x_3 (x_3 - 1) \end{pmatrix}$$

La solución del sistema lineal es:

$$v_1 \approx 0{,}098, \quad v_2 \approx 0{,}0137, \quad v_3 \approx 0{,}098.$$

La comparación con la solución exacta se muestra en la Figura (1).

∎

Solución: Apartado d).

En primer lugar, la forma débil del problema se obtiene multiplicando la EDO de partida (la forma "fuerte") por una función $z(x)$ que satisface las condiciones de admisibilidad $z(0) = z(1) = 0$ (las condiciones Dirichlet del problema) e integrando por partes en el intervalo $(0, 1)$:

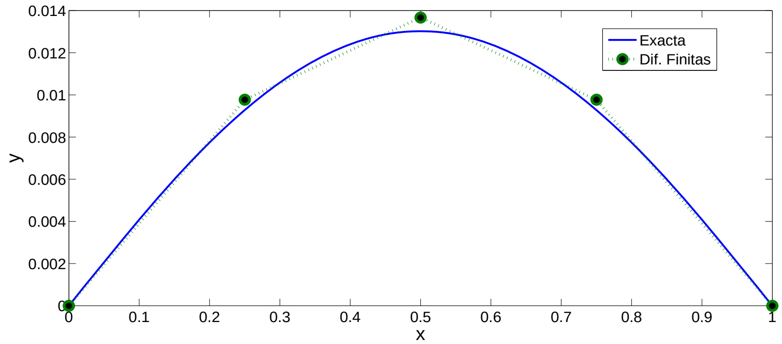


Figura 1: Ejercicio 1c

$$\int_0^1 \frac{dv}{dx}\frac{dz}{dx}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 zx(x-1)\,dx.$$

Siguiendo el esquema de Galerkin, discretizamos el espacio de soluciones y escribimos ahora la solución del problema en términos de las tres funciones sombrero (lineales a trozos) que se nos indica en el enunciado, como:

$$v(x) = V_1\phi_1(x) + V_2\phi_2(x) + V_3\phi_3(x) = \sum_{j=1}^{3} V_j\phi_j(x).$$

Para obtener las tres ecuaciones de elementos finitos que nos permitan obtener los coeficientes V_1, V_2, V_3, escogeremos $z(x) = \phi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ sucesivamente, de forma que:

$$\sum_{j=1}^{3} V_j \int_0^1 \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \phi_i x(x-1)\,dx, \quad i = 1, 2, 3.$$

En forma matricial, el sistema de ecuaciones se escribe

$$KV = F,$$

siendo K la *matriz de rigidez* del problema cuyas componentes son

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}\,dx$$

y F el *vector de carga*, con componentes

$$F_i = -\frac{1}{2}\int_0^1 \phi_i x(x-1)\,dx, \;\; i = 1, 2, 3.$$

Fijémonos en primer lugar, que la matriz de rigidez es simétrica y tridiagonal en este caso. Por otra parte, para calcular las componentes K_{ij} de la matriz de rigidez del problema necesitamos las derivadas de las funciones sombrero. Éstas son muy fácilmente calculables:

$$\frac{d\phi_i}{dx}(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ -\frac{1}{h}, & x_i \le x \le x_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Aquí estamos utilizando que el espaciado de la partición es $h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$. De este modo, obtenemos que las componentes de la diagonal principal de la matriz K son

$$K_{11} = K_{22} = K_{33} = \frac{2}{h} = 8,$$

y las componentes de las sub-diagonales superior e inferior:

$$K_{ii+1} = -\frac{1}{h} = -4 = K_{i+1i}.$$

El resto de componentes de la matriz K son cero.

Las componentes del vector de carga se obtendrán calculando:

$$\begin{aligned} F_i &= -\frac{1}{2}\left[\int_{(i-1)h}^{ih} \frac{(x-(i-1)h)}{h} x(x-1)\,dx + \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{-(x-(i+1)h)}{h} x(x-1)\,dx\right] = \\ &= -\frac{h^2(-6i+h+6hi^2)}{12}. \end{aligned}$$

$$F_1 = \frac{17}{768},\ F_2 = \frac{23}{768},\ F_3 = \frac{17}{768}.$$

La expresión matricial de las ecuaciones de elementos finitos es, por tanto:

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{768} \\ \frac{23}{768} \\ \frac{17}{768} \end{pmatrix},$$

luego $V_1 \approx 0{,}0093,\ V_2 \approx 0{,}013,\ V_3 \approx 0{,}0093.$

Es decir, la solución de elementos finitos v_{ef} al problema de contorno del enunciado sería:

$$v_{ef} = 0{,}0093\phi_1(x) + 0{,}013\phi_2(x) + 0{,}0093\phi_3(x).$$

La comparación con la solución exacta se muestra en la Figura (2). Démonos cuenta que la solución de elementos finitos coincide con la solución exacta en los nodos que hemos tomado para la discretización.

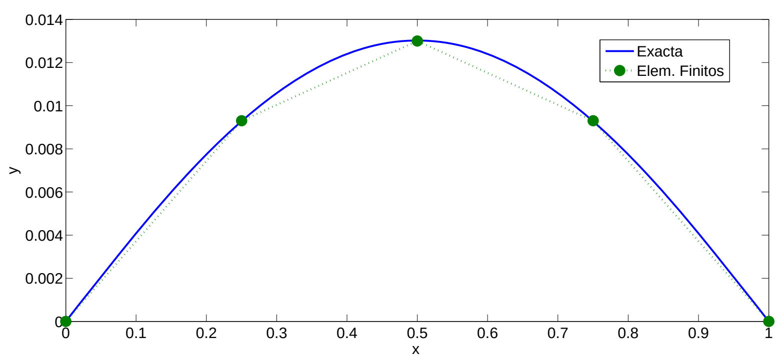


Figura 2: Ejercicio 1d

∎

2.- Para el problema de contorno

$$\begin{cases} -u'' + \sin(x)u'(x) + u(x) = \cos^2(x), & x \in (0, \pi/2) \\ u(0) = 0 \\ u(\pi/2) = 0, \end{cases}$$

encontrar una discretización de diferencias finitas de orden 2 de nuestro problema y obtener $\{u_n\}_{n=0}^N$ para $N = 3$ (es decir, considerando 2 puntos interiores).

Solución:

En primer lugar, la partición que nos indica el enunciado consiste en los siguientes puntos: $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi/2$, es decir, corresponde a un espaciado $h = \pi/6$.

En segundo lugar, la discretización de diferencias finitas que nos piden se traduce en la siguiente ecuación en el nodo i como:

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \sin(x_i)\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + u_i = \cos^2(x_i). \tag{1}$$

Si hacemos $i = 1$, obtenemos:

$$u_2\left(\frac{h}{2}\sin(x_1) - 1\right) + u_1(2 + h^2) = h^2\cos^2(x_1), \tag{2}$$

y para $i = 2$:

$$u_2(2 + h^2) + u_1\left(-\frac{h}{2}\sin(x_2) - 1\right) = h^2\cos^2(x_2). \tag{3}$$

En las ecuaciones anteriores hemos hecho uso de las condiciones de contorno: $u_0 = 0 = u_3$. La expresión matricial de este sistema de ecuaciones es:

$$\begin{pmatrix} (2+h^2) & \left(\frac{h}{2}\sin(x_1) - 1\right) \\ \left(-\frac{h}{2}\sin(x_2) - 1\right) & (2+h^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2\cos^2(x_1) \\ h^2\cos^2(x_2) \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores de h, x_1, x_2 y resolviendo el sistema se obtiene $u_1 \approx 0{,}1284$ y $u_2 \approx 0{,}0994$.

∎

3.- Repetir el ejercicio anterior pero cambiando ahora la condición de contorno $u(0) = 0$ por $u'(0) = 0$.

Solución: En este caso, necesitamos discretizar la condición $u'(0) = 0$ con una aproximación también $\mathcal{O}(h^2)$:

$$u'(0) \approx \frac{u(x_1) - u(x_{-1})}{2h}.$$

Démonos cuenta que, de este modo, hemos introducido un nodo imaginario (x_{-1}) que está fuera del intervalo de integración de la EDO. Tenemos, por tanto, una incógnita más que en el ejercicio anterior y necesitamos entonces una ecuación más (tres en total). Las tres ecuaciones se obtienen haciendo $i = 0, 1, 2$ en la ecuación (1):

$$\begin{aligned}
i = 0: &\quad u_1\left(\frac{h}{2}\sin(x_0) - 1\right) + u_0(2 + h^2) + u_{-1}\left(-\frac{h}{2}\sin(x_0) - 1\right) = (h\cos(x_0))^2 \\
i = 1: &\quad u_2\left(\frac{h}{2}\sin(x_1) - 1\right) + u_1(2 + h^2) + u_0\left(-\frac{h}{2}\sin(x_1) - 1\right) = (h\cos(x_1))^2 \\
i = 2: &\quad u_3\left(\frac{h}{2}\sin(x_2) - 1\right) + u_2(2 + h^2) + u_1\left(-\frac{h}{2}\sin(x_2) - 1\right) = (h\cos(x_2))^2.
\end{aligned}$$

Aplicamos ahora las condiciones de contorno: $u'(0) = 0 \Rightarrow u_1 = u_{-1}$ y $u_3 = 0$. De este modo, obtenemos:

$$\begin{aligned} i=0: &\quad -2u_1 + u_0(2+h^2) = (h\cos(x_0))^2 \\ i=1: &\quad u_2\left(\frac{h}{2}\sin(x_1)-1\right) + u_1(2+h^2) + u_0\left(-\frac{h}{2}\sin(x_1)-1\right) = (h\cos(x_1))^2 \\ i=2: &\quad u_2(2+h^2) + u_1\left(-\frac{h}{2}\sin(x_2)-1\right) = (h\cos(x_2))^2 . \end{aligned}$$

que escrito en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} (2+h^2) & -2 & 0 \\ \left(-\frac{h}{2}\sin(x_1)-1\right) & (2+h^2) & \left(\frac{h}{2}\sin(x_1)-1\right) \\ 0 & \left(-\frac{h}{2}\sin(x_2)-1\right) & (2+h^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2\cos^2(x_0) \\ h^2\cos^2(x_1) \\ h^2\cos^2(x_2) \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores de h, x_0, x_1 y x_2 en este sistema lineal, obtenemos:

$$u_0 \approx 0{,}5199,\ \ u_1 \approx 0{,}4541,\ \ u_2 \approx 0{,}2751.$$

■

4.- Para el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' = xy' - y + 2 - x^2, \ \ x \in (-1,1) \\ y(-1) = 1 \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

se pide lo mismo que para los dos ejercicios anteriores aunque con un nodo interior más. Es decir, se pide obtener $\{y_n\}_{n=0}^{N}$ para $N=4$.

Solución: Este ejercicio está resuelto en el guión de la práctica 3 del curso (consultar).

■

5.- Resolver de manera exacta los siguientes problemas de contorno. Obtener también una solución aproximada utilizando el método de elementos finitos considerando, en ambos casos, 4 subintervalos y las funciones sombrero completas ϕ_i, $i = 1,\ 2,\ 3$:

a)

$$\begin{cases} -u'' = e^x, \ \ x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left((1+x)\frac{du}{dx}(x)\right) = 1, \ \ x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Solución: **Apartado a)**

En primer lugar, integrando dos veces la EDO y sustituyendo las condiciones de contorno, obtenemos la solución exacta del problema:

$$u(x) = -e^x + (e-1)x + 1.$$

Para utilizar el método de elementos finitos, necesitamos en primer lugar la forma débil del problema:

$$\int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dz}{dx}\,dx = \int_0^1 ze^x\,dx.$$

Discretizamos el espacio de soluciones de la función u en la forma débil, siguiendo el esquema de Galerkin, utilizando en este caso 3 funciones lineales sombrero: $u = U_1\phi_1 + U_2\phi_2 + U_3\phi_3$. las ecuaciones de elemento finitos se obtienen sustituyendo $z = \phi_1, \phi_2, \phi_3$ sucesivamente.

Los elementos de la matriz de rigidez serán iguales a los del ejercicio **1.d)**:

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}\,dx$$

y las componentes del vector de carga serán en este caso:

$$F_i = \int_0^1 \phi_i e^x\,dx, \quad i = 1, 2, 3.$$

El cálculo explícito de estos elementos nos proporciona para la matriz de rigidez:

$$K_{ii} = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} \frac{dx}{h^2} = \frac{2}{h} = 8,$$

y las componentes de las sub-diagonales superior e inferior:

$$K_{ii+1} = \int_{ih}^{(i+1)h} -\frac{dx}{h^2} = -\frac{1}{h} = -4 = K_{i+1i}.$$

Para el vector de carga:

$$F_i = \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{1}{h}(x-(i-1)h)\right) e^x\,dx + \int_{ih}^{(i+1)h} \left(\frac{-1}{h}(x-(i+1)h)\right) e^x\,dx = \frac{e^{ih}}{h}\left(e^h + e^{-h} - 2\right).$$

En forma matricial

$$K = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

y

$$F = \frac{1}{h}\left(e^h + e^{-h} - 2\right)\begin{pmatrix} e^h \\ e^{2h} \\ e^{3h} \end{pmatrix}$$

La solución del sistema $KU = F$ es:

$$U_1 \approx 0{,}1455, \ U_2 \approx 0{,}2104, \ U_3 \approx 0{,}1717.$$

La comparación de la solución de elementos finitos $u_{ef} = U_1\phi_1 + U_2\phi_2 + U_3\phi_3$ con la solución exacta del problema se muestra en la figura (3).

$\blacksquare$

Solución: Apartado b)

La solución exacta del problema la obtenemos, de nuevo, integrando dos veces la EDO e imponiendo las condiciones de contorno:

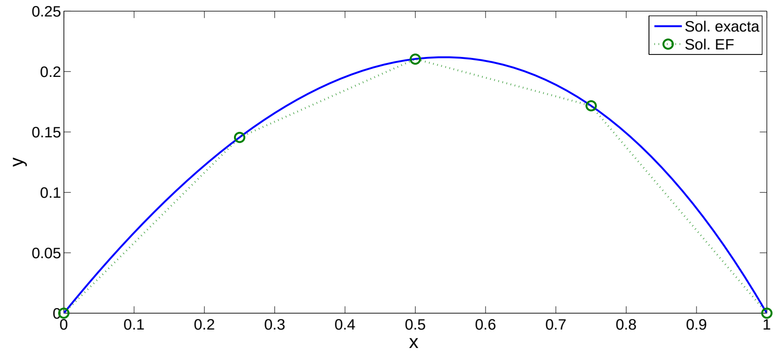


Figura 3: Ejercicio 5a

$$u(x) = \frac{\log(1+x)}{\log(2)} - x.$$

La forma débil de este problema es

$$\int_0^1 (1+x)\frac{du}{dx}\frac{dz}{dx}\,dx = \int_0^1 z\,dx.$$

Los elementos de la matriz de rigidez vendrán dados por:

$$K_{ii} = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} \frac{(1+x)}{h^2}\,dx = \frac{2(ih+1)}{h},$$

y las componentes de las sub-diagonales superior e inferior:

$$K_{i+1i} = \int_{ih}^{(i+1)h} (1+x)\frac{1}{h}\frac{-1}{h}\,dx = -\frac{(h+2ih+2)}{2h}.$$

Para el vector de carga:

$$F_i = \int_{(i-1)h}^{ih} \left(\frac{1}{h}(x-(i-1)h)\right)\,dx + \int_{ih}^{(i+1)h} \left(\frac{-1}{h}(x-(i+1)h)\right)\,dx = h.$$

En forma matricial y sustituyendo el valor $h = 1/4$:

$$K = \begin{pmatrix} 10 & -\frac{11}{2} & 0 \\ -\frac{11}{2} & 12 & -\frac{13}{2} \\ 0 & -\frac{13}{2} & 14 \end{pmatrix}$$

y

$$F = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema $KU = F$ es:

$$U_1 \approx 0{,}0715,\ U_2 \approx 0{,}0845,\ U_3 \approx 0{,}0571.$$

La comparación de la solución de elementos finitos $u_{ef} = U_1\phi_1 + U_2\phi_2 + U_3\phi_3$ con la solución exacta del problema se muestra en la figura (4).

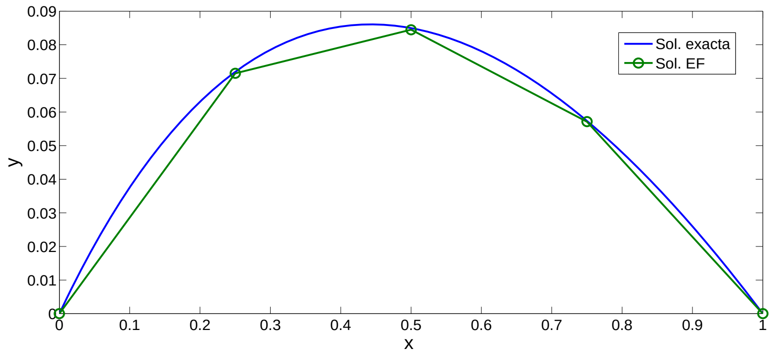


Figura 4: Ejercicio 5b

$\blacksquare$

6.- Encontrar la función $u(x,t)$ definida para $0 \leq x \leq \pi$ y $t \geq 0$ que satisface el problema de valores iniciales:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \;\; u(x,0) = h(x),$$

donde $h(x)$ viene dada por:

a) $h(x) = \sin(2x)$

b) $h(x) = 4\sin x + 2\sin(2x) + 7\sin(3x)$.

c)

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{para } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi - x, & \text{para } \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

d) $h(x) = x(\pi - x)$.

Solución: Apartado a) Tal y como se describe en la Lectura 8, la solución de la ecuación de calor con este tipo de condiciones de contorno en el intervalo $[0,\,\pi]$ vendrá dada por:

$$u(x,t) = b_1 \sin(x)e^{-t} + b_2 \sin(2x)e^{-4t} + b_3 \sin(3x)e^{-9t} + \ldots$$

donde los coeficientes b_n corresponden a los de la serie de Fourier seno de $h(x)$.
Si $h(x) = \sin(2x)$ el único coeficiente no nulo de su serie de Fourier es $b_2 = 1$, por tanto la solución vendrá dada por

$$u(x,t) = \sin(2x)e^{-4t}.$$

$\blacksquare$

Solución: Apartado b)
Si $h(x) = 4\sin x + 2\sin(2x) + 7\sin(3x)$ los coeficientes no nulos de su serie de Fourier son $b_1 = 4$, $b_2 = 2$, $b_3 = 7$, por tanto la solución vendrá dada por

$$u(x,t) = 4\sin(x)e^{-t} + 2\sin(2x)e^{-4t} + 7\sin(3x)e^{-9t}.$$

$\blacksquare$

Solución: Apartado c)

Este apartado está resuelto como ejemplo en la Lectura 8. La solución es:

$$u(x,t) = e^{-t}\frac{4}{\pi}\sin x - e^{-9t}\frac{4}{9\pi}\sin 3x + e^{-25t}\frac{4}{25\pi}\sin 5x + ...$$

■

Solución: Apartado d)

Obtuvimos la serie de Fourier seno para esta función en uno de los ejercicios de la Hoja 1. La expresión de ésta era:

$$h(x) = \frac{8}{\pi}\sin x + \frac{8}{27\pi}\sin(3x) + \frac{8}{125\pi}\sin(5x) + ...$$

De modo que la solución del problema que tenemos planteado será

$$u(x,t) = e^{-t}\frac{8}{\pi}\sin x + e^{-9t}\frac{8}{27\pi}\sin 3x + e^{-25t}\frac{8}{125\pi}\sin 5x + ...$$

■

7.- Encontrar la función $u(x,t)$ definida para $0 \leq x \leq \pi$ y $t \geq 0$ que satisface el problema de valores iniciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = h(x), \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

donde $h(x)$ viene dada por:

a) $h(x) = \sin(2x)$

b) $h(x) = \sin x + 3\sin 2x - 5\sin 3x$.

c) $h(x) = x(\pi - x)$.

Solución: Apartado a) Tal y como se describe en la Lectura 8, la solución de la ecuación de ondas en el intervalo $[0, \pi]$ y con condiciones de contorno en la variable x del tipo

$$u(x,0) = h_1(x), \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h_2(x),$$

vendrá dada por:

$$u(x,t) = (a_1\cos(t) + b_1\sin(t))\sin(x) + (a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t))\sin(2x) + ...$$

donde los coeficientes a_n corresponden a los de la serie de Fourier seno de $h_1(x)$ y los b_n satisfacen que:
$\frac{nc\pi}{L}b_n$ es el $n-$ésimo coeficiente de la serie de Fourier seno de $h_2(x)$.
En los tres apartados de este ejercicio, la función $h_2(x) = 0$, de modo que todos los coeficientes b_n serán cero y únicamente tendremos coeficientes a_n.
Si $h(x) = \sin(2x)$ el único coeficiente no nulo de su serie de Fourier es $a_2 = 1$, por tanto la solución vendrá dada por

$$u(x,t) = \cos(2t)\sin(2x).$$

$\blacksquare$

Solución: **Apartado b)** En este caso, los tres primeros coeficientes de la serie de Fourier seno de $h(x)$ son, trivialmente,

$$a_1 = 1, \; a_2 = 3, \; a_3 = -5,$$

y el resto son todos cero. De este modo:

$$u(x,t) = \sin x \cos t + 3 \sin 2x \cos 2t - 5 \sin 3x \cos 3t.$$

$\blacksquare$

Solución: **Apartado c)** La serie de Fourier seno de $h(x)$ ya han aparecido en el ejercicio anterior

$$h(x) = \frac{8}{\pi} \sin x + \frac{8}{27\pi} \sin(3x) + \frac{8}{125\pi} \sin(5x) + ...$$

De este modo:

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi} \sin x \cos t + \frac{8}{27\pi} \sin 3x \cos 3t + \frac{8}{125\pi} \sin 5x \cos 5t + ...$$

$\blacksquare$

8.- Encontrar la función $u(x,t)$ definida para $0 \leq x \leq \pi$ y $t \geq 0$ que satisface el problema de valores iniciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin x + \sin 2x.$$

Solución:

En este ejercicio y siguiendo con lo comentado en el apartado a) del ejercicio anterior, la función $h_1(x) = 0$ por lo que sólo sobrevivirán coeficientes b_n vinculados a la serie de Fourier seno de la condición de contorno Neumann. Como $h_2(x) = \sin x + \sin 2x$, tendremos que:

$$b_1 = 1, \; b_2 = \frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$u(x,t) = \sin x \sin t + \frac{1}{2} \sin 2x \sin 2t.$$

$\blacksquare$