AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. 2º*curso*. GRADO DE INGENIERÍA CIVIL. *Curso 2011/2012.*

Hoja 3 de Problemas

1.- Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

(a) $y^{(2} + y^{(1} - 2y = 0.$

(b) $y^{(2} - 4y^{(1} + 5y = 0.$

(c) $y^{(4} + 2y^{(2} + y = 0.$

(d) $y^{(3} - y^{(2} - y^{(1} + y = 0.$

(e) $y^{(5} - 10y^{(3} + 9y^{(1} = 0.$

Solución: **apartado a**, $y^{(2} + y^{(1} - 2y = 0.$
Resolviendo la ecuación característica,

$$r^2 + r - 2 = 0 \rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

luego la solución es

$$y^{(2} + y^{(1} - 2y = 0 \rightarrow y = k_1 e^{x} + k_2 e^{-2x}$$

$\blacksquare$

Solución: **apartado b**, $y^{(2} - 4y^{(1} + 5y = 0.$
Resolviendo la ecuación característica,

$$r^2 - 4r + 5 = 0 \rightarrow r = 2 \pm \sqrt{4-5} = \begin{cases} 2 + \mathbf{i} \\ 2 - \mathbf{i} \end{cases}$$

luego la solución es

$$y^{(2} - 4y^{(1} + 5y = 0 \rightarrow y = e^{2x}\left[k_1 \cos x + k_2 \operatorname{sen} x\right]$$

$\blacksquare$

Solución: **apartado c**, $y^{(4} + 2y^{(2} + y = 0.$
Resolviendo la ecuación característica,

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \rightarrow \left(r^2 + 1\right)^2 = 0 \begin{cases} \mathbf{i} & \text{doble} \\ -\mathbf{i} & \text{doble} \end{cases}$$

luego la solución es

$$y^{(4} + 2y^{(2} + y = 0 \rightarrow y = \left[k_1 + k_2 x\right] \cos x + \left[k_3 + k_4 x\right] \operatorname{sen} x$$

$\blacksquare$

Solución: **apartado d**, $y^{(3} - y^{(2} - y^{(1} + y = 0.$
Resolviendo la ecuación característica,

$$r^3 - r^2 - r + 1 = 0 \rightarrow \left(r^2 - 1\right)(r - 1) = 0 \begin{cases} 1 & \text{doble} \\ -1 & \end{cases}$$

luego la solución es

$$y^{(3}-y^{(2}-y^{(1}+y=0 \rightarrow y=\left[k_1+k_2 x\right] e^x+k_3 e^{-x}$$

■

Solución: apartado e, $y^{(5}-10 y^{(3}+9 y^{(1}=0$.
Resolviendo la ecuación característica,

$$r^5-10 r^3+9 r=0 \rightarrow r\left(r^4-10 r^2+9\right)=0; \qquad r^2=5 \pm \sqrt{25-9}=5 \pm 4 \rightarrow r=\left\{\begin{array}{c}0 \\ \pm 3 \\ \pm 1\end{array}\right.$$

luego la solución es

$$y^{(5}-10 y^{(3}+9 y^{(1}=0 \rightarrow y=k_1+k_2 e^{3 x}+k_3 e^{-3 x}+k_4 e^x+k_5 e^{-x}$$

■

2.- Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $y^{(2}+3 y^{(1}-10 y=6 e^{4 x}$.

(b) $y^{(2}-2 y^{(1}+5 y=25 x^2+12$.

(c) $y^{(2}-y^{(1}-6 y=20 e^{-2 x}$.

(d) $y^{(2}-3 y^{(1}+2 y=3 \operatorname{sen} 2 x$.

Solución: apartado a, $y^{(2}+3 y^{(1}-10 y=6 e^{4 x}$.
Resolvemos la homogénea

$$y^{(2}+3 y^{(1}-10 y=0 \rightarrow r^2+3 r-10=0 \rightarrow r=\frac{-3 \pm \sqrt{9+49}}{2}\left\{\begin{array}{l}r_1=-5 \\ r_2=2\end{array}\right.$$

luego la homogénea tiene por solución

$$y_h=C_1 e^{-5 x}+C_2 e^{2 x}$$

Una solución particular será de la forma: $y_p=k e^{4 x}$, entrando en la ecuación diferencial determinamos k

$$y_p^{(2}+3 y_p^{(1}-10 y_p=6 e^{4 x} \rightarrow 16 k e^{4 x}+3 \cdot 4 k e^{4 x}-10 k e^{4 x}=6 e^{4 x} \rightarrow 18 k=6 \rightarrow k=\frac{1}{3}$$

Finalmente la solución es

$$y=y_h+y_p \rightarrow y=C_1 e^{-5 x}+C_2 e^{2 x}+\frac{1}{3} e^{4 x}$$

Solución particular mediante variación de las constantes.
Tenemos el sistema

$$\begin{array}{rcrcl}C_1^{(1} e^{-5 x} & + & C_2^{(1} e^{2 x} & = & 0 \\ -5 C_1^{(1} e^{-5 x} & + & 2 C_2^{(1} e^{2 x} & = & 6 e^{4 x}\end{array}$$

de donde

$$C_1^{(1}=\frac{\left|\begin{array}{cc}0 & e^{2 x} \\ 6 e^{4 x} & 2 e^{2 x}\end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc}e^{-5 x} & e^{2 x} \\ -5 e^{-5 x} & 2 e^{2 x}\end{array}\right|}=-\frac{6}{7} e^{9 x} \rightarrow C_1=-\frac{6}{63} e^{9 x}+K_1$$

$$C_2^{(1} = \frac{\begin{vmatrix} e^{-5x} & 0 \\ -5e^{-5x} & 6e^{4x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-5x} & e^{2x} \\ -5e^{-5x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{6}{7}e^{2x} \to C_2 = \frac{6}{14}e^{2x} + K_2$$

siendo la solución

$$y = \left(-\frac{6}{63}e^{9x} + K_1\right) e^{-5x} + \left(\frac{6}{14}e^{2x} + K_2\right) e^{2x} = K_1 e^{-5x} + K_2 e^{2x} + \left[-\frac{6}{63} + \frac{6}{14}\right] e^{4x}$$

que obviamente es la misma.

$\blacksquare$

Solución: apartado b, $y^{(2} - 2y^{(1} + 5y = 25x^2 + 12$.
Resolvemos la homogénea

$$y^{(2} - 2y^{(1} + 5y = 0 \to r^2 - 2r + 5 = 0 \to r = \frac{1 \pm \sqrt{1-5}}{2} \begin{cases} r_1 = 1 + 2\mathbf{i} \\ r_2 = 1 + 2\mathbf{i} \end{cases}$$

luego la homogénea tiene por solución

$$y_h = e^x \left(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x\right)$$

Una solución particular será de la forma: $y_p = ax^2 + bx + c$: Será

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ y^{(1} &= 2ax + b \\ y^{(2} &= 2a \end{aligned}$$

entrando en la ecuación diferencial,

$$y^{(2} - 2y^{(1} + 5y = 25x^2 + 12 \to 2a - 4ax - 2b + 5ax^2 + 5bx + 5c = 25x^2 + 12 \to$$

$$\to \quad 5ax^2 = 25x^2 \to a = 5; \quad -4ax + 5bx = 0 \to b = 4; \quad 2a - 2b + 5c = 12 \to c = 2$$

$$y_p = \quad 5x^2 + 4x + 2$$

Finalmente la solución es

$$y = y_h + y_p \to y = e^x \left(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x\right) + 5x^2 + 4x + 2$$

Solución particular mediante variación de las constantes.
Tenemos el sistema

$$\begin{array}{rcrcl} C_1^{(1} e^x \cos 2x & + & C_2^{(1} e^x \operatorname{sen} 2x & = & 0 \\ C_1^{(1} e^x \left[\cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x\right] & + & 3C_2^{(1} e^x \left[\operatorname{sen} 2x + \cos 2x\right] & = & 25x^2 + 12 \end{array} \to$$

$$C_1^{(1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \operatorname{sen} 2x \\ 25x^2 + 12 & -2e^x \cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x \cos 2x & e^x \operatorname{sen} 2x \\ -2e^x \operatorname{sen} 2x & 2e^x \cos 2x \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}\left(25x^2 + 12\right) \operatorname{sen} 2x e^{-x}$$

$$\to$$

$$C_2^{(1} = \frac{\begin{vmatrix} e^x \cos 2x & 0 \\ -2e^x \operatorname{sen} 2x & 25x^2 + 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x \cos 2x & e^x \operatorname{sen} 2x \\ -2e^x \operatorname{sen} 2x & 2e^x \cos 2x \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}\left(25x^2 + 12\right) \cos 2x e^{-x}$$

luego

$$\begin{aligned} C_1 = & \int -\left(\frac{1}{2}\right)\left(25x^2+12\right)\operatorname{sen}[2x]\, e^{-x}\,\mathrm{d}\, x = \\ = & \frac{1}{2}e^{-x}\left(4\cos 2x + 8x\cos 2x + 10x^2\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x - 6x\operatorname{sen} 2x + 5x^2\operatorname{sen} 2x\right) + K_1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} C_2 = & \int \left(\frac{1}{2}\right)\left(25x^2+12\right)\cos[2x]\, e^{-x}\,\mathrm{d}\, x = \\ = & -\frac{1}{2}e^{-x}\left(-2\cos 2x - 6x\cos 2x + 5x^2\cos 2x - 4\operatorname{sen} 2x - 8x\operatorname{sen} 2x - 10x^2\operatorname{sen} 2x\right) + K_2 \end{aligned}$$

la solución será

$$y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \operatorname{sen} 2x$$

operando, los coeficientes de los términos en

$$x^0: \quad \frac{1}{2}\left[(4\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x)\cos 2x + (2\cos 2x + 4\operatorname{sen} 2x)\operatorname{sen} 2x\right] = 2$$

$$x^1: \quad \frac{1}{2}\left[(8\cos 2x - 6\operatorname{sen} 2x)\cos 2x + (6\cos 2x + 8\operatorname{sen} 2x)\operatorname{sen} 2x\right] = 4$$

$$x^2: \quad \frac{1}{2}\left[(10\cos 2x + 5\operatorname{sen} 2x)\cos 2x + (-5\cos 2x + 10\operatorname{sen} 2x)\operatorname{sen} 2x\right] = 5$$

luego el resultado final es

$$y = K_1 e^x \cos 2x + K_2 e^x \operatorname{sen} 2x + 5x^2 + 4x + 2$$

■

Solución: apartado c, $y^{(2} - y^{(1} - 6y = 20e^{-2x}$.
Resolvemos la homogénea

$$y^{(2} - y^{(1} - 6y = 0 \to r^2 - r - 6 = 0 \to r = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

luego la homogénea tiene por solución

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$$

Una solución particular será de la forma: $y_p = kxe^{-2x}$: Será

$$\begin{aligned} y &= e^{-2x}kx \\ y^{(1} &= e^{-2x}(-2kx + k) \\ y^{(2} &= e^{-2x}(4kx - 2k - 2k) \end{aligned}$$

entrando en la ecuación diferencial determinamos k

$$\begin{aligned} & y^{(2} - y^{(1} - 6y = 20e^{-2x} \to e^{-2x}(4kx - 4k) - e^{-2x}(-2kx + k) - 6e^{-2x}kx = 20e^{-2x} \to \\ \to \; & e^{-2x}(4kx + 2kx - 6kx) + e^{-2x}(-4k - k) = 20e^{-2x} \to k = -4 \\ y_p = \; & -4xe^{-2x} \end{aligned}$$

Finalmente la solución es

$$y = y_h + y_p \to y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - 4xe^{-2x}$$

Solución particular mediante variación de las constantes.
Tenemos el sistema,

$$\begin{array}{rcrcl} C_1^{(1} e^{-2x} & + & C_2^{(1} e^{3x} & = & 0 \\ -2C_1^{(1} e^{-2x} & + & 3C_2^{(1} e^{3x} & = & 20e^{-2x} \end{array} \to \begin{array}{l} C_1^{(1} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ 20e^{-2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{3x} \\ -2e^{-2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = -4 \\ \\ C_2^{(1} = \dfrac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & 20e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{3x} \\ -2e^{-2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = 4e^{-5x} \end{array}$$

luego

$$C_1 = \int -4 \,\mathrm{d}\, x = -4x + K_1; \qquad C_2 = \int 4e^{-5x} \,\mathrm{d}\, x = -\frac{4}{5} e^{-5x} + K_2$$

siendo la solución

$$\begin{aligned} y = {} & (-4x + K_1)\, e^{-2x} + \left(-\frac{4}{5} e^{-5x} + K_2 \right) e^{3x} = \\ = {} & K_1 e^{-2x} + K_2 e^{3x} - 4xe^{-2x} - \frac{4}{5} e^{-2x} = \left(K_1 - \frac{4}{5} \right) e^{-2x} + K_2 e^{3x} - 4xe^{-2x} = \\ = {} & K_3 e^{-2x} + K_2 e^{3x} - 4xe^{-2x} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Solución: apartado d, $y^{(2} - 3y^{(1} + 2y = 3 \operatorname{sen} 2x$.
Resolvemos la homogénea

$$y^{(2} - 3y^{(1} + 2y = 0 \to r^2 - 3r + 2 = 0 \to r = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \left\{ \begin{array}{l} r_1 = 2 \\ r_2 = 1 \end{array} \right.$$

luego la homogénea tiene por solución

$$y_h = Ae^x + Be^{2x}$$

Una solución particular será de la forma: $y_p = A\cos 2x + B \operatorname{sen} 2x$: Será

$$\begin{array}{lcl} y & = & A\cos 2x + B \operatorname{sen} 2x \\ y^{(1} & = & -2A \operatorname{sen} 2x + 2B \cos 2x \\ y^{(2} & = & -4A \cos 2x - 4B \operatorname{sen} 2x \end{array}$$

entrando en la ecuación diferencial,

$$y^{(2} - 3y^{(1} + 2y = 3 \operatorname{sen} 2x \to$$

$$-4A\cos 2x - 4B \operatorname{sen} 2x + 6A \operatorname{sen} 2x - 6B\cos 2x + 2A\cos 2x + 2B \operatorname{sen} 2x = 3 \operatorname{sen} 2x \to$$

$$\to \left\{ \begin{array}{l} \cos 2x \left[-4A - 6B + 2A \right] = 0 \\ \operatorname{sen} 2x \left[-4B + 6A + 2B \right] = 3 \operatorname{sen} 2x \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} -2A - 6B = 0 \\ -2B + 6A = 3 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} B = -\dfrac{3}{20} \\ \\ A = \dfrac{9}{20} \end{array} \right.$$

$$y_p = \frac{3}{20} \left(3\cos 2x - \operatorname{sen} 2x \right)$$

Finalmente la solución es

$$y = y_h + y_p \rightarrow y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{3}{20}\left(3\cos 2x - \operatorname{sen} 2x\right)$$

Solución particular mediante variación de las constantes.
Tenemos el sistema

$$\begin{array}{ccccc} C_1^{(1} e^x & + & C_2^{(1} e^{2x} & = & 0 \\ C_1^{(1} e^x & + & 2C_2^{(1} e^{2x} & = & 3\operatorname{sen} 2x \end{array} \rightarrow C_2^{(1} = \frac{3\operatorname{sen} 2x}{e^{2x}} \qquad C_1^{(1} = -C_2^{(1} e^x = \frac{-3\operatorname{sen} 2x}{e^{2x}} e^x$$

Si calculamos la primitiva de $C_2^{(1}$, será de la forma

$$\int C_2^{(1} \, \mathrm{d}\, x = e^{-2x}\left[A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad C_2^{(1} = \begin{cases} 3e^{-2x}\operatorname{sen} 2x \\ e^{-2x}\left[-2A\cos 2x - 2B\operatorname{sen} 2x - 2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x\right] \end{cases} \rightarrow A = B = -\frac{3}{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3 = -2B - 2A \\ 0 = -2A + 2B \end{cases}$$

Si calculamos la primitiva de $C_1^{(1}$, será de la forma

$$\int C_1^{(1} \, \mathrm{d}\, x = e^{-x}\left[A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x\right]$$

$$\rightarrow \quad C_1^{(1} = \begin{cases} -3e^{-x}\operatorname{sen} 2x \\ e^{-x}\left[-A\cos 2x - B\operatorname{sen} 2x - 2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x\right] \end{cases} \rightarrow B = \frac{3}{5};\ A = \frac{6}{5}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -3 = -B - 2A \\ 0 = -A + 2B \end{cases}$$

Resultando

$$\begin{aligned} y = & \left(e^{-x}\left[\frac{6}{5}\cos 2x + \frac{3}{5}\operatorname{sen} 2x\right] + K_1\right)e^x + \left(e^{-2x}\left[-\frac{3}{4}\cos 2x - \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2x\right] + K_2\right)e^{2x} = \\ = & K_1 e^x + K_2 e^{2x} + \left(\frac{6}{5} - \frac{3}{4}\right)\cos 2x + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{4}\right)\operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

■

3.- Hallar las soluciones de los problemas de valores iniciales siguientes:

$$(a) \begin{cases} y^{(2} + 2y^{(1} + 2y = xe^{-x} \\ y(0) = y^{(1}(0) = 0 \end{cases} .$$

$$(b) \begin{cases} y^{(3} - 2y^{(2} + 10y^{(1} = 0 \\ y(0) = 0;\ \ y^{(1}(0) = 1;\ \ y^{(2}(0) = -8 \end{cases} .$$

$$(c) \begin{cases} y^{(3} + 2y^{(2} + 5y^{(1} = 5x \\ y(0) = y^{(1}(0) = 0;\ \ y^{(2}(0) = \dfrac{1}{5} \end{cases} .$$

Solución: apartado a:
Resolvamos la ecuación homogénea

$$y^{(2} + 2y^{(1} + 2y = 0 \to r^2 + 2r + 2 = 0 \to r = -1 \pm \sqrt{1-2} \left\{ \begin{array}{l} r_1 = -1 + \mathbf{i} \\ r_2 = -1 - \mathbf{i} \end{array} \right.$$

luego la homogénea tiene por solución

$$y_h = e^{-x} \left[A \cos x + B \operatorname{sen} x \right]$$

Una solución particular será de la forma: $y_p = (ax + b)\, e^{-x}$: Será

$$\begin{array}{lcl} y & = & e^{-x} (ax + b) \\ y^{(1} & = & e^{-x} (-ax - b + a) \\ y^{(2} & = & e^{-x} (+ax + b - a - a) \end{array}$$

entrando en la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} & y^{(2} + 2y^{(1} + 2y = xe^{-x} \to \\ & e^{-x} (+ax + b - a - a) + 2e^{-x} (-ax - b + a) + 2e^{-x} (ax + b) = xe^{-x} \to \\ \to & \left\{ \begin{array}{l} x \left[a - 2a + 2a \right] = 1 \\ b - 2a - 2b + 2a + 2b = 0 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array} \right. \to \\ y_p = & \ xe^{-x} \end{aligned}$$

Finalmente la solución es

$$y = y_h + y_p \to y = e^{-x} \left[A \cos x + B \operatorname{sen} x \right] + xe^{-x}$$

e

$$y^{(1} = e^{-x} \left[-A \cos x - B \operatorname{sen} x - x - A \operatorname{sen} x + B \cos x + 1 \right] +$$

Introduciendo los valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{lll} y(0) = 0 & & \to \quad A = 0 \\ y^{(1}(0) = 0 & e^{-0} (-A \cos 0 + B \cos 0 + 1) = 0 & \to \quad B = -1 \end{array} \right.$$

Por lo tanto

$$y = -e^{-x} \operatorname{sen} x + xe^{-x}$$

■

Solución: apartado b:
Resolvamos la ecuación, que es, homogénea

$$y^{(3} - 2y^{(2} + 10y^{(1} = 0 \to r^3 - 2r^2 + 10r = 0 \to r \left(r^2 - 2r + 10 \right) = 0 \to$$

$$\to \quad r = 0; \quad r = 1 \pm \sqrt{1 - 10} \to \left\{ \begin{array}{l} r = 0 \\ r_1 = 1 + 3\mathbf{i} \\ r_2 = 1 - 3\mathbf{i} \end{array} \right.$$

luego tiene por solución

$$y = e^{x} \left[A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x \right] + K$$

Introduciendo los valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{rll} y\,(0)=0 & & A+K=0 \\ y^{(1}\,(0)=1 & e^{x}\left[A\cos 3x+B\,\mathrm{sen}\,3x-3A\,\mathrm{sen}\,3x+3B\cos 3x\right] & A+3B=1 \\ & & \\ y^{(2}\,(0)=-8 & e^{x}\left[\begin{array}{c}\cos 3x\,(A+3B)+\mathrm{sen}\,3x\,(-3A+B) \\ -3\,\mathrm{sen}\,3x\,(A+3B)+3\cos 3x\,(-3A+B)\end{array}\right] & -8A+6B=-8\end{array}\right. \rightarrow$$

$A=1;\;\; K=-1;\;\; B=0;$

Por lo tanto

$$y=e^{x}\cos 3x-1$$

∎

Solución: apartado c:
Resolvamos la ecuación homogénea

$$y^{(3}+2y^{(2}+5y^{(1}=0\rightarrow r^{3}+2r^{2}+5r=0\rightarrow r\left(r^{2}+2r+5\right)=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad r=0;\;\; r=-1\pm\sqrt{1-5}\rightarrow\left\{\begin{array}{l} r=0 \\ r_{1}=-1+2\mathbf{i} \\ r_{2}=-1-2\mathbf{i}\end{array}\right.$$

luego la homogénea tiene por solución

$$y_{h}=e^{-x}\left[A\cos 2x+B\,\mathrm{sen}\,2x\right]+K$$

Una solución particular será de la forma: $y_{p}=ax^{2}+bx+c$: Será

$$\begin{array}{lcl} y & = & ax^{2}+bx+c \\ y^{(1} & = & 2ax+b \\ y^{(2} & = & 2a \\ y^{(3} & = & 0\end{array}$$

entrando en la ecuación diferencial,

$$y^{(3}+2y^{(2}+5y^{(1}=5x\rightarrow 4a+10ax+5b=5x\rightarrow\left\{\begin{array}{l} b=-\dfrac{2}{5} \\ a=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \rightarrow$$

$$y_{p}=\frac{1}{2}x^{2}-\frac{2}{5}x$$

Finalmente la solución es

$$y=y_{h}+y_{p}\rightarrow y=e^{-x}\left[A\cos 2x+B\,\mathrm{sen}\,2x\right]+K+\frac{1}{2}x^{2}-\frac{2}{5}x$$

Es

$$
\begin{aligned}
y(0) \rightarrow &\quad A+K=0 \\
y^{(1}(x) = &\quad e^{-x}\left[-A\cos 2x - B\operatorname{sen} 2x - 2A\operatorname{sen} x + 2B\cos x\right] + x - \frac{2}{5} = \\
= &\quad e^{-x}\left[\cos 2x\,(-A+2B) + \operatorname{sen} 2x\,(-B-2A)\right] + x - \frac{2}{5} \\
y^{(1}(0) \rightarrow &\quad -A+2B-\frac{2}{5}=0 \\
y^{(2}(x) = &\quad e^{-x}\left[\begin{array}{c} -\cos 2x\,(-A+2B) - \operatorname{sen} 2x\,(-B-2A) - \\ -2\operatorname{sen} 2x\,(-A+2B) + 2\cos 2x\,(-B-2A) \end{array}\right] + 1 \\
= &\quad e^{-x}\left[-\cos 2x\,(-A+2B+2B+4A) - \operatorname{sen} 2x\,(-B-2A-2A+4B)\right] + 1 \\
y^{(2}(0) \rightarrow &\quad -(3A+4B)+1=\frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\left\{\begin{array}{r} A+K=0 \\ -A+2B=\frac{2}{5} \\ 3A+4B=\frac{4}{5} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} A+K=0 \\ -A+2B=\frac{2}{5} \\ 4A=0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} K=0 \\ B=\frac{1}{5} \\ A=0 \end{array}\right.
$$

Por lo tanto

$$
y = \frac{e^{-x}}{5}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x
$$

■

4.- Resolver las siguientes ecuaciones mediante reducción de orden (determinar previamente una solución particular):

(a) $xy^{(2} - (1+2x)\left(y^{(1}\right) + 2y = 0.$

(b) $xy^{(2} - (1+x)\left(y^{(1}\right) + y = 0.$

Solución: **apartado a**, $xy^{(2} - (1+2x)\left(y^{(1}\right) + 2y = 0.$
Probamos con $e^{\alpha x} = y_p$,

$$
\begin{array}{l}
xy^{(2} - (1+2x)\left(y^{(1}\right) + 2y = 0 \rightarrow \alpha^2 x e^{\alpha x} - (1+2x)\,\alpha e^{\alpha x} + 2e^{\alpha x} = 0 \rightarrow \\
2 - \alpha + x\left(\alpha^2 - 2\alpha\right) = 0 \rightarrow \alpha = 2
\end{array}
$$

Hacemos el cambio $y = e^{2x}u$,

$$
\begin{aligned}
y^{(1} &= 2e^{2x}u + u^{(1}e^{2x} = e^{2x}\left[2u + u^{(1}\right] \\
y^{(2} &= 4e^{2x}u + 2\cdot 2e^{2x}u^{(1} + e^{2x}u^{(2} = e^{2x}\left[4u + 4u^{(1} + u^{(2}\right]
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\begin{array}{l}
xy^{(2} - (1+2x)\left(y^{(1}\right) + 2y = 0 \rightarrow \\
xe^{2x}\left[4u + 4u^{(1} + u^{(2}\right] - e^{2x}\left[2u + u^{(1}\right] - 2xe^{2x}\left[2u + u^{(1}\right] + 2e^{2x}u = 0 \rightarrow \\
x\left[4u + 4u^{(1} + u^{(2} - 4u - 2u^{(1}\right] - \left[2u + u^{(1} + 2u\right] = 0 \rightarrow \\
x\left[2u^{(1} + u^{(2}\right] - \left[u^{(1}\right] = 0 \rightarrow \\
xu^{(2} + (2x-1)\,u^{(1} = 0
\end{array}
$$

Hagamos el cambio $u^{(1}=z\rightarrow u^{(2}=z^{(1}$ resultando la ecuación diferencial

$$
\begin{aligned}
& xu^{(2}+(2x-1)\,u^{(1}=0\rightarrow xz^{(1}+(2x-1)\,z=0\rightarrow \frac{z^{(1}}{z}=-\frac{2x-1}{x}\rightarrow \\
& \frac{z^{(1}}{z}=\frac{1}{x}-2\rightarrow \log|z|=\log|x|-2x+\log K\rightarrow \\
z= \;& kxe^{-2x} \\
u= \;& ke^{-2x}\left[-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right]+C
\end{aligned}
$$

y finalmente

$$
y=e^{2x}u\rightarrow y=k_1\,[1-2x]+Ce^{-2x}
$$

$\blacksquare$

Solución: apartado b, $xy^{(2}-(1+x)\left(y^{(1}\right)+y=0.$
Se observa que una y_p es $y_p=1+x$.
Hacemos el cambio $y=(1+x)\,u$,

$$
\begin{aligned}
y^{(1} &= u+(1+x)\,u^{(1} \\
y^{(2} &= 2u^{(1}+(1+x)\,u^{(2}
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
& xy^{(2}-(1+x)\left(y^{(1}\right)+y=0\rightarrow \\
& x\left[2u^{(1}+(1+x)\,u^{(2}\right]-\left[u+(1+x)\,u^{(1}\right]-x\left[u+(1+x)\,u^{(1}\right]+(1+x)\,u=0\rightarrow \\
& x\left[2u^{(1}+(1+x)\,u^{(2}-u-(1+x)\,u^{(1}\right]-\left[u+(1+x)\,u^{(1}-(1+x)\,u\right]=0\rightarrow \\
& x\left[u^{(1}+(1+x)\,u^{(2}-u-xu^{(1}\right]-\left[(1+x)\,u^{(1}-xu\right]=0\rightarrow \\
& x\left[u^{(1}+(1+x)\,u^{(2}-xu^{(1}-u^{(1}\right]-u^{(1}=0\rightarrow \\
& x\,(1+x)\,u^{(2}-\left(1+x^2\right)u^{(1}=0
\end{aligned}
$$

Hagamos el cambio $u^{(1}=z\rightarrow u^{(2}=z^{(1}$ resultando la ecuación diferencial

$$
\begin{aligned}
& x\,(1+x)\,u^{(2}-\left(1+x^2\right)u^{(1}=0\rightarrow x\,(1+x)\,z^{(1}-\left(1+x^2\right)z=0\rightarrow \frac{z^{(1}}{z}=\frac{1+x^2}{x\,(1+x)}\rightarrow \\
& \frac{z^{(1}}{z}=1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x}\rightarrow \log|z|=x-2\log|1+x|+\log|x|+\log K\rightarrow \\
z= \;& k\frac{x}{(x+1)^2}e^{x}=k\left[\frac{x+1-1}{(x+1)^2}\right]e^{x}=k\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]e^{x}=k\left[\frac{\mathrm{d}\,\dfrac{e^{x}}{x+1}}{\mathrm{d}\,x}\right] \\
u= \;& k\frac{e^{x}}{x+1}+C
\end{aligned}
$$

y finalmente

$$
y=(1+x)\,u\rightarrow y=ke^{x}+C\,(1+x)
$$

$\blacksquare$

5.- Resolver las siguientes ecuaciones y problemas de valores iniciales, reduciendo su orden mediante un cambio de la forma $p(x) = y^{(k}(x)$:

(*a*) $y^{(5} - \dfrac{1}{x} y^{(4} = 0.$

(*b*) $y^{(2} = \left(y^{(1}\right)^2.$

(*c*) $yy^{(2} = y^2 y^{(1} + \left(y^{(1}\right)^2;\ y(0) = 2;\ y^{(1}(0) = 2.$

(*d*) $y^{(2} = y^{(1} e^y;\ y(0) = 2;\ y^{(1}(x) = 2.$

Solución: **apartado a**, $y^{(5} - \dfrac{1}{x} y^{(4} = 0.$
Hagamos el cambio $z = y^{(4} \to z^{(1} = y^{(5}$, por lo tanto

$$z^{(1} = \frac{1}{x} z \to \frac{z^{(1}}{z} = \frac{1}{x} \to \frac{\mathrm{d}\,z}{z} = \frac{\mathrm{d}\,x}{x} \to \log|z| = \log|cx| \to z = cx$$

deshaciendo el cambio

$$y^{(4} = cx \to y^{(3} = c\frac{x^2}{2} + c_1 \to y^{(2} = c\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 \to y^{(1} = c\frac{x^4}{24} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \to$$
$$y = c\frac{x^5}{120} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \to$$

$$y = Ax^5 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

$\blacksquare$

Solución: **apartado b**, $y^{(2} = \left(y^{(1}\right)^2.$
Hagamos el cambio $z = y^{(1} \to z^{(1} = y^{(2}$, por lo tanto

$$z^{(1} = z^2 \to \frac{z^{(1}}{z^2} = 1 \to \frac{\mathrm{d}\,z}{z^2} = \mathrm{d}\,x \to -\frac{1}{z} = x + C \to z = -\frac{1}{x+C}$$

Deshaciendo el cambio

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = -\frac{1}{x+C} \to y = -\log|x+C| + K$$

$\blacksquare$

Solución: **apartado c**, $yy^{(2} = y^2 y^{(1} + \left(y^{(1}\right)^2;\ y(0) = 2;\ y^{(1}(0) = 2.$
En este caso la ecuación diferencial no es lineal, además no figura la variable x, se trata de una ecuación del tipo

$$f\left(y,\, y^{(1},\, y^{(2}\right) = 0$$

Si hacemos el cambio $z = y^{(1}$, tenemos

$$y^{(2} = \frac{\mathrm{d}\left(y^{(1}\right)}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\left(y^{(1}\right)}{\mathrm{d}\,y}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y} z$$

con lo que

$$f\left(y,\, y^{(1},\, y^{(2}\right) = 0 \to f\left(y,\, z,\, \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y} z\right) = 0$$

que es de primer orden en z.
En nuestro caso

$$yy^{(2}=y^2y^{(1}+\left(y^{(1}\right)^2\rightarrow y\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}z=y^2z+z^2\rightarrow z\left[y\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}\right]=z\left[y^2+z\right]\underset{z\neq 0}{\rightarrow}y\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}=y^2+z$$

Simplificando

$$y\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}=y^2+z\rightarrow\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}-\frac{z}{y}=y$$

Resolviendo la homogénea

$$\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}-\frac{z}{y}=0\rightarrow\frac{\mathrm{d}\,z}{z}=\frac{\mathrm{d}\,y}{y}\rightarrow z=y$$

por lo tanto

$$z=uy\rightarrow\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}=u+y\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}$$

entrando en la ecuación diferencial no homogénea

$$\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y}-\frac{z}{y}=y\rightarrow u+y\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}-\frac{uy}{y}=y\rightarrow y\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}=y\underset{y\neq 0}{\rightarrow}\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,y}=1\rightarrow u=y+K$$

con lo que

$$z=uy\rightarrow z=y^2+ky\rightarrow\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=y^2+ky$$

Como para $x=0$ es: $y\left(0\right)=2$ e $y^{(1}\left(0\right)=z=2$, tenemos

$$2=4+2k\rightarrow k=-1$$

por lo que

$$y^{(1}=y^2-y$$

Integrando

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{y^2-y}=\mathrm{d}\,x\rightarrow\left[\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\right]\mathrm{d}\,y=\mathrm{d}\,x$$
$$\log\left|\frac{y-1}{y}\right|=x+C$$

teniendo en cuenta que: $y\left(0\right)=2$, es

$$\log\left|\frac{2-1}{2}\right|=0+C\rightarrow C=\log\frac{1}{2}$$

luego

$$\log\left|\frac{y-1}{y}\right|=x+\log\frac{1}{2}\rightarrow\frac{y-1}{y}=e^{x+\log\frac{1}{2}}=\frac{e^x}{2}\rightarrow 1-\frac{1}{y}=\frac{e^x}{2}\rightarrow y=\frac{2}{2-e^x}$$

Las simplificaciones realizadas:

- $z=0\rightarrow y^{(1}=0$ no es la solución deseada, pues sería $y^{(1}=0\ \forall x$, y el enunciado nos pide $y^{(1}\left(0\right)=2$.
- $y=0$ no es solución, ya que no cumple la condición $y\left(0\right)=2$.

■

Solución: apartado d, $y^{(2} = y^{(1} e^y$; $y(0) = 2$; $y^{(1}(0) = 2$.
Es similar al caso anterior. Con el mismo cambio

$$y^{(2} = y^{(1} e^y \rightarrow \frac{\mathrm{d}\, z}{\mathrm{d}\, y} z = z e^y \underset{z \neq 0}{\rightarrow} \frac{\mathrm{d}\, z}{\mathrm{d}\, y} = e^y$$

integrando la ecuación diferencial

$$\mathrm{d}\, z = e^y \, \mathrm{d}\, y \rightarrow z = e^y + k$$

como para $x = 0$ es: $y(0) = 0$ e $y^{(1}(0) = z = 2$, tenemos

$$2 = e^0 + k \rightarrow k = 1$$

por lo que

$$y^{(1}(x) = e^y + 1$$

Integrando

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{e^y + 1} = \mathrm{d}\, x$$

hacemos el cambio $e^y = u \rightarrow \mathrm{d}\, y = \dfrac{\mathrm{d}\, u}{u}$, luego

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{e^y + 1} = \mathrm{d}\, x \rightarrow \frac{\mathrm{d}\, u}{u(1+u)} = \mathrm{d}\, x \rightarrow \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right] \mathrm{d}\, u = \mathrm{d}\, x \rightarrow \log\left|\frac{u}{1+u}\right| = x + C$$

deshaciendo el cambio

$$\frac{u}{1+u} = e^{x+C} \rightarrow \frac{e^y}{1+e^y} = e^{x+C} \rightarrow 1 - \frac{1}{1+e^y} = e^{x+C} \rightarrow e^y = \frac{e^{x+C}}{1-e^{x+C}}$$

con la condición: $y(0) = 0$,

$$e^y = \frac{e^{x+C}}{1-e^{x+C}} \rightarrow 1 = \frac{e^C}{1-e^C} \rightarrow e^C = \frac{1}{2}$$

la solución finalmente es

$$e^y = \frac{e^{x+C}}{1-e^{x+C}} \rightarrow e^y = \frac{\frac{1}{2}e^x}{1-\frac{1}{2}e^x} \rightarrow y = x - \log(2 - e^x)$$

Las simplificación realizada :

- $z = 0 \rightarrow y^{(1} = 0$ no es la solución deseada, pues sería $y^{(1} = 0 \ \forall x$, y el enunciado nos pide $y^{(1}(0) = 2$.

■

6.- Hallar los desarrollos en serie de las soluciones alrededor del punto $x = 0$ de las ecuaciones:

1. $y^{(1} + xy = 0$.
2. $xy^{(1} - y = x^2 \cos x$.

Apartado 1. Solución:
Supongamos que la solución es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

será

$$\begin{aligned}
y^{(1} &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = (\text{haciendo } n-1=j) = y^{(1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\, a_{j+1} x^j \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n \\
xy &= x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = (\text{haciendo } n+1=j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{j-1} x^j = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
y^{(1} + xy = & \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \\
= & \; a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \\
= & \; a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)\, a_{n+1} + a_{n-1} \right] x^n
\end{aligned}$$

Legamos a

$$y^{(1} + xy = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)\, a_{n+1} + a_{n-1} \right] x^n = 0$$

Por lo que tenemos las condiciones

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ n \geq 1 : \quad (n+1)\, a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \rightarrow a_{n+1} = -\dfrac{a_{n-1}}{n+1} \end{cases}$$

La segunda condición nos da una relación entre dos términos no consecutivos,

$$k \geq 0 : \; a_{k+2} = -\frac{a_k}{k+2}$$

que si lo aplicamos al caso k impar al ser $a_1 = 0$ será $a_{2k-1} = 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$.
En el caso k par tenemos

$$\left.\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2} \\
a_4 &= -\frac{a_2}{4} \\
a_6 &= -\frac{a_4}{6} \\
\cdots & \;\; \cdots \;\; \cdots \\
a_{2n-2} &= -\frac{a_{2n-4}}{2n-2} \\
a_{2n} &= -\frac{a_{2n-2}}{2n}
\end{aligned}\right. \underset{multiplicando}{\longrightarrow} a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)\,(2n)} = (-1)^n \frac{a_0}{2^n\,(n\,!)}$$

por lo tanto

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_0}{2^n\,(n\,!)} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_0 \frac{1}{n\,!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n = a_0 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Si lo hubiésemos resuelto directamente

$$y^{(1}+xy=0\rightarrow\frac{y^{(1}}{y}=-x\rightarrow\log|y|=-\frac{x^2}{2}+\log|k|\rightarrow y=ke^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\blacksquare$

Apartado 2.

Solución:

Supongamos que la solución es

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

será

$$\begin{aligned}y^{(1} &= \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\\ xy^{(1} &= x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n\end{aligned}$$

y

$$xy^{(1}-y=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n-a_0=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,a_nx^n-a_0$$

que según el enunciado y recordando la fórmula de MacLaurin del coseno es

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,a_nx^n-a_0=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2(n+1)}}{(2n)!}$$

estudiando los primeros términos de ambos miembros de la igualdad

$$-a_0+(1-1)\,a_1x^1+(2-1)\,a_2x^2+(3-1)\,a_3x^3+(4-1)\,a_4x^4+\cdots=\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{4!}+\cdots$$

Fijándonos en las potencias de x^n en ambos miembros de la igualdad, vemos que:

- $a_0=0$,
- $a_1=a_1$,
- $a_{2n-1}=0$, $n>1$

y

$$(2n-1)\,a_{2n}x^{2n}=(-1)^{n-1}\,\frac{x^{2(n-1)+2}}{[2\,(n-1)]!}$$

de donde

$$a_{2n}=(-1)^{n-1}\,\frac{1}{[2\,(n-1)]!\,(2n-1)}=(-1)^{n-1}\,\frac{1}{(2n-1)!}$$

resultando

$$\begin{aligned}y= &\quad a_1x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n}=\\ = &\quad a_1x+x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}\end{aligned}$$

recordando la fórmula de Mac Laurin del seno

$$y=a_1x+x\operatorname{sen}x$$

Si hubiésemos resuelto directamente

$$xy^{(1} - y = 0 \to \frac{y^{(1}}{y} = \frac{1}{x} \to y = x$$

haciendo el cambio

$$y = xv \to y^{(1} = v + xv^{(1}$$

luego

$$xy^{(1} - y = x^2 \cos x \to x\left(v + xv^{(1}\right) - xv = x^2 \cos x \to v^{(1} = \cos x \to v = \operatorname{sen} x + k$$

y finalmente

$$y = xv \to y = x\left(\operatorname{sen} x + k\right)$$

■

7.- Hallar los 5 primeros términos del desarrollo en serie en torno al origen de la solución de la ecuación diferencial $y^{(2} + y^{(1} - xy = 0$ que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$; $y^{(1}(0) = 1$.

Solución:

Sabemos que la fórmula de MacLaurin es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ siendo : } a_n = \frac{y^{(n}(0)}{n!}, \; a_0 = y(0)$$

Por el enunciado son conocidos a_0 y a_1, nos piden determinar a_k, $2 \leq k \leq 4$.
Del enunciado

$$y^{(2} = -y^{(1} + xy \quad \underset{x=0}{\to} \quad y^{(2}(0) = -y^{(1}(0) + 0 \cdot y(0) = -1$$

derivando

$$y^{(3} = \frac{\mathrm{d}\, y^{(2}}{\mathrm{d}\, x} = \frac{\mathrm{d}\left(-y^{(1} + xy\right)}{\mathrm{d}\, x} = -y^{(2} + y + xy^{(1}$$

$$y^{(3}(0) = -y^{(2}(0) + y(0) + 0 \cdot y^{(1}(0) = 1$$

derivando nuevamente

$$y^{(4} = \frac{\mathrm{d}\, y^{(3}}{\mathrm{d}\, x} = \frac{\mathrm{d}\left(-y^{(2} + y + xy^{(1}\right)}{\mathrm{d}\, x} = -y^{(3} + y^{(1} + y^{(1} + xy^{(2}$$

$$y^{(4}(0) = -y^{(3}(0) + 2y^{(1}(0) + 0 \cdot y^{(2}(0) = -1 + 2 = 1$$

luego

$$y = 0 + \frac{1}{1}x^1 + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 +$$

si volvemos a derivar

$$y^{(5} = \frac{\mathrm{d}\, y^{(4}}{\mathrm{d}\, x} = \frac{\mathrm{d}\left(-y^{(3} + 2y^{(1} + xy^{(2}\right)}{\mathrm{d}\, x} = -y^{(4} + 2y^{(2} + y^{(2} + xy^{(3}$$

$$y^{(5}(0) = -y^{(4}(0) + 3y^{(2}(0) + 0 \cdot y^{(3}(0) = -1 - 3 = -4$$

luego

$$y = 0 + \frac{1}{1}x^1 + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{4}{5!}x^5$$

Otra forma más sistemática:
Sea la ecuación diferencial ordinaria: $y^{(2} + y^{(1} - xy = 0$, que satisface las condiciones iniciales: $y(0) = 0$; $y^{(1}(0) = 1$.
Supongamos que la solución es una serie de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to y(0) = a_0 = 0$$

cuyas derivadas son

$$y^{(1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \to y^{(1}(0) = a_1 = 1; \qquad y^{(2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

que puede ser escrito sustituyendo en el primer sumatorio $n-2$ por k, en el segundo $n-1$ por p y en el tercero $n+1$ por q, con lo que queda

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k + \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) a_{p+1} x^p - \sum_{q=1}^{\infty} a_{q-1} x^q = 0$$

volviendo a denominar todos las variables naturales: k, p y q por n

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

separando el primer sumando de los dos primeros sumatorios y agrupando el resto

$$\begin{aligned} & (0+2)(0+1) a_{0+2} x^0 + (0+1) a_{0+1} x^0 + \\ + & \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_{n+1} - a_{n-1} \right] x^n = 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} n = 0 \quad &: \quad 2a_2 + a_1 = 0 && \to \quad a_2 = -\frac{1}{2} a_1 = -\frac{1}{2} \\ n \geq 1 \quad &: \quad (n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_{n+1} - a_{n-1} = 0 && \to \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1} - (n+1) a_{n+1}}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} n = 1 \qquad & a_3 = \frac{a_0 - 2a_2}{3 \cdot 2} = \frac{0 - 2\left[-\frac{1}{2}\right]}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3!} \\ n = 2 \qquad & a_4 = \frac{a_1 - 3a_3}{4 \cdot 3} = \frac{1 - 3\left[\frac{1}{3!}\right]}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4!} \\ n = 3 \qquad & a_5 = \frac{a_2 - 4a_4}{5 \cdot 4} = \frac{-\frac{1}{2} - 4\left[\frac{1}{4!}\right]}{5 \cdot 4} = -\frac{4}{5!} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

8.- Hallar la solución general de la ecuación diferencial $\left(1+t^2\right) y^{(2}+2ty^{(1}-2y=0$ en términos de series de potencias de t.

Solución: Suponemos que la solución es

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

luego

$$\begin{aligned} y^{(1} &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} & \qquad ty^{(1} &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n \\ y^{(2} &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} & \qquad t^2y^{(2} &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^n \end{aligned}$$

entrando con estos valores en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} & \left(1+t^2\right) y^{(2}+2ty^{(1}-2y=0 \rightarrow \\ \rightarrow & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^n+2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n-2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n=0 \rightarrow \\ \rightarrow & \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1) a_{k+2} t^k+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^n+2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n-2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n=0 \rightarrow \\ \rightarrow & \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1) a_{n+2} t^n+\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^n+2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n-2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n=0 \end{aligned}$$

suma que podemos escribir

$$\begin{array}{ccccccc} (0+2)(0+1) a_{0+2} t^0 & + & (1+2)(1+1) a_{1+2} t^1 & + & \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1) a_{n+2} t^n & + & \\ & & & & \sum_{n=2}^{\infty}(n)(n-1) a_n t^n & + & \\ & & 2a_1t^1 & + & 2\sum_{n=2}^{\infty} n a_n t^n & + & \\ -2a_0 & - & 2a_1t^1 & - & 2\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n & = & 0 \end{array}$$

luego

$$\begin{aligned} & a_2=a_0 \\ & a_3=0 \\ n\geq 2: \quad & (n+2)(n+1) a_{n+2}+(n)(n-1) a_n+2na_n-2a_n \equiv 0 \\ n\geq 2: \quad & (n+2)(n+1) a_{n+2}+(n+2)(n-1) a_n=0 \qquad \rightarrow \quad a_{n+2}=-\frac{n-1}{n+1} a_n \end{aligned}$$

Obtenemos lo siguiente:

- a_0 libre, $a_2=a_0$,
- a_1 libre,
- $a_3=0$ y
- $\forall n\geq 2 a_{n+2}=-\dfrac{n-1}{n+1} a_n$, que es una relación entre dos términos no consecutivos.

Comenzamos con n par

$$\begin{array}{llcll}
n=2: & a_{2+2} & = & -\dfrac{2-1}{2+1}a_2 & = & -\dfrac{1}{3}a_0 \\
n=4: & a_{4+2} & = & -\dfrac{4-1}{4+1}a_4 & = & (-1)^2\dfrac{1}{5}a_0 \\
. & & . & & . \\
n=2n-2: & a_{2n} & = & -\dfrac{2n-2}{2n-1}a_{2n-2} & = & (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}a_0
\end{array}$$

luego **una solución** es

$$y_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} t^{2n} = y(0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} t^{2n}$$

Seguimos con n impar

$$\begin{array}{llcll}
n=3: & a_{3+2} & = & -\dfrac{3-1}{3+1}a_3 & = & 0 \\
n=5: & a_{5+2} & = & -\dfrac{5-1}{5+1}a_5 & = & 0 \\
. & & . & & . \\
n=2n-1: & a_{2n+1} & = & -\dfrac{2n-2}{2n}a_{2n-1} & = & 0
\end{array}$$

luego **otra solución** es

$$y_2 = a_1 t = y^{(1}(0)\, t$$

Si resolvemos directamente.
Buscamos una solución particular de la forma

$$y_p = at^2 + bt + c$$

resultando

$$\left(1+t^2\right) y_p^{(2} + 2ty_p^{(1} - 2y_p = 0 \to 2a + 2at^2 + 4at^2 + 2bt - 2at^2 - 2bt - 2c = 0$$

ordenando en potencias de t

$$\begin{array}{lll}
t^2: & 2a + 4a - 2a = 0 & a = \quad 0 \\
t^1: & 2b - 2b = 0 & b = \quad K \quad \to y_p = t \\
t^0: & 2a - 2c = 0 & c = \quad 0
\end{array}$$

Si hacemos $y \equiv y_p u = tu \to \left\{ \begin{array}{lcl} y^{(1} & = & u + tu^{(1} \\ y^{(2} & = & 2u^{(1} + tu^{(2} \end{array} \right.$, entrando en la ecuación diferencial, reduciremos el orden

$$\begin{array}{ll}
 & \left(1+t^2\right) y^{(2} + 2ty^{(1} - 2y = 0 \to \\
\to & \left(1+t^2\right)\left(tu^{(2} + 2u^{(1}\right) + 2t\left(tu^{(1} + u^{(1}\right) - 2tu = 0 \to \\
\to & t\left(1+t^2\right) u^{(2} + \left(4t^2+2\right) u^{(1} = 0
\end{array}$$

integrando la ecuación obtenida

$$\begin{aligned}
\frac{u^{(2}}{u^{(1}} &= -\frac{4t^2+2}{t\left(1+t^2\right)} = \left[\frac{A}{t}+\frac{Bt}{1+t^2}\right] = -\left[\frac{2}{t}+\frac{2t}{1+t^2}\right] \rightarrow \\
\log\left|u^{(1}\right| &= \log C - 2\log|t| - \log\left|1+t^2\right| \rightarrow \\
u^{(1} &= \frac{C}{t^2\left(1+t^2\right)} = C\left[\frac{D}{t^2}+\frac{F}{1+t^2}\right] = C\left[\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right] \\
u &= C\left[-\frac{1}{t}-\arctan t\right]+K
\end{aligned}$$

finalmente

$$y = tu \rightarrow y = C\left[-1-t\arctan t\right]+Kt$$

Nota: Suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n}$.

Sabemos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

luego, en el campo de convergencia absoluta

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=0}^{\infty}\int (-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}\,x \rightarrow \arctan x + K = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

haciendo $x=0$ obtenemos que $K=0$, luego

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

si en el sumatorio hacemos $n=k-1$

$$\begin{aligned}
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = \\
&= \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{2k-1}+\frac{1}{x}\left[\sum_{k=0}^{k=0}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{2k-1}-\sum_{k=0}^{k=0}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{2k-1}\right] = \\
&= \frac{1}{x}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{2k-1}-1\right]
\end{aligned}$$

luego

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{2k-1} = x\,\arctan x + 1$$

luego por ambos métodos obtenemos, como era de prever.

■

9.- Indicar si las siguientes ecuaciones tienen puntos singulares o no. Clasificarlos y escribir la ecuación indicial cuando corresponda.

1. $x^2y^{(2} - 2y = 0;$
2. $x^2y^{(2} - 2xy^{(1} + 2y = 0;$
3. $xy^{(2} + e^x y^{(1} + 3y\cos x = 0;$
4. $xy^{(2} + 2y^{(1} + 4y = 0;$
5. $x \operatorname{sen} x \, y^{(2} + 3y^{(1} + xy = 0;$
6. $\operatorname{sen} x \, y^{(2} + xy^{(1} + 4y = 0.$

Apartado 1:

Solución:

$$x^2y^{(2} - 2y = 0 \to y^{(2} - \frac{2}{x^2}y = 0 \to \begin{cases} p(x) = & 0 \\ \\ q(x) = & -\dfrac{2}{x^2} \end{cases}$$

luego

$$\begin{array}{rlcr} p_0 = & \lim\limits_{x\to 0} x\,[0] = & & 0 \\ q_0 = & \lim\limits_{x\to 0} x^2 \left[-\dfrac{2}{x^2}\right] & = & -2 \end{array} \to$$

y la *ecuación indicial*,

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \to r(r-1) - 2 = 0 \to r = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

∎

Apartado 2:

Solución:

$$x^2y^{(2} - 2xy^{(1} + 2y = 0 \to y^{(2} - \frac{2x}{x^2}y^{(1} + \frac{2}{x^2}y = 0 \to \begin{cases} p(x) = & -\dfrac{2x}{x^2} \\ \\ q(x) = & \dfrac{2}{x^2} \end{cases}$$

luego

$$\begin{array}{rlcr} p_0 = & \lim\limits_{x\to 0} x \left[-\dfrac{2x}{x^2}\right] & = & -2 \\ q_0 = & \lim\limits_{x\to 0} x^2 \left[\dfrac{2}{x^2}\right] & = & 2 \end{array} \to$$

y la *ecuación indicial*,

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \to r(r-1) - 2r + 2 = 0 \to r = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

∎

Apartado 3:

Solución:

$$xy^{(2} + e^x y^{(1} + 3y\cos x = 0 \to y^{(2} + \frac{e^x}{x}y^{(1} + \frac{3\cos x}{x}y = 0 \to \begin{cases} p(x) = & \dfrac{e^x}{x} \\ \\ q(x) = & \dfrac{3\cos x}{x} \end{cases}$$

luego

$$\left.\begin{array}{rlcl} p_0 = & \lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{e^x}{x}\right] & = & 1 \\ q_0 = & \lim\limits_{x\to 0} x^2\left[\dfrac{3\cos x}{x}\right] & = & 0 \end{array}\right. \to$$

y la *ecuación indicial*,

$$r\left(r-1\right)+p_0 r+q_0=0 \to r\left(r-1\right)+r=0 \to r=0 \text{ doble}$$

$\blacksquare$

Apartado 4:
Solución:

$$xy^{(2}+2y^{(1}+4y=0 \to y^{(2}+\frac{2}{x}y^{(1}+\frac{4}{x}y=0 \to \begin{cases} p\left(x\right)= & \dfrac{2}{x} \\ \\ q\left(x\right)= & \dfrac{4}{x} \end{cases}$$

luego

$$\left.\begin{array}{rlcl} p_0 = & \lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{2}{x}\right] & = & 2 \\ q_0 = & \lim\limits_{x\to 0} x^2\left[\dfrac{4}{x}\right] & = & 0 \end{array}\right. \to$$

y la *ecuación indicial*,

$$r\left(r-1\right)+p_0 r+q_0=0 \to r\left(r-1\right)+2r=0 \to r=\begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

$\blacksquare$

Apartado 5: Solución:

$$x\operatorname{sen} x\, y^{(2}+3y^{(1}+xy=0 \to y^{(2}+\frac{3}{x\operatorname{sen} x}y^{(1}+\frac{x}{x\operatorname{sen} x}y=0 \to \begin{cases} p\left(x\right)= & \dfrac{3}{x\operatorname{sen} x} \\ \\ q\left(x\right)= & \dfrac{x}{x\operatorname{sen} x} \end{cases}$$

luego

$$\begin{array}{rlcr} p_0 = & \lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{3}{x\operatorname{sen} x}\right] & = & \text{no existe} \\ q_0 = & \lim\limits_{x\to 0} x^2\left[\dfrac{x}{x\operatorname{sen} x}\right] & = & 0 \end{array}$$

se trata de un *punto singular irregular*.

$\blacksquare$

Apartado 6:
Solución:

$$\operatorname{sen} x\, y^{(2}+xy^{(1}+4y=0 \to y^{(2}+\frac{x}{\operatorname{sen} x}y^{(1}+\frac{4}{\operatorname{sen} x}y=0 \to \begin{cases} p\left(x\right)= & \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} \\ \\ q\left(x\right)= & \dfrac{4}{\operatorname{sen} x} \end{cases}$$

luego

$$\left.\begin{array}{rlcl} p_0 = & \lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right] & = & 0 \\ q_0 = & \lim\limits_{x\to 0} x^2\left[\dfrac{4}{\operatorname{sen} x}\right] & = & 0 \end{array}\right. \to$$

y la *ecuación indicial*,

$$r\,(r-1)+p_0 r+q_0=0\rightarrow r\,(r-1)=0\rightarrow r=\left\{\begin{array}{l}0\\1\end{array}\right.$$

$\blacksquare$

10.- Hallar dos soluciones en serie de Frobenius independientes para la siguiente ecuación:

$$2xy^{(2}+(t+1)\,y^{(1}+y=0.$$

Solución:
Determinemos la ecuación indicial,

$$2xy^{(2}+(x+1)\,y^{(1}+y=0\rightarrow y^{(2}+\frac{x+1}{2x}y^{(1}+\frac{1}{2x}y=0\rightarrow\left\{\begin{array}{lcl}p_0=\displaystyle\lim_{x\to 0}x\left[\frac{x+1}{2x}\right]&=&\dfrac{1}{2}\\[2ex] q_0=\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\left[\frac{1}{2x}\right]&=&0\end{array}\right.$$

por lo tanto

$$r\,(r-1)+\frac{1}{2}r=0\rightarrow r=\left\{\begin{array}{l}0\\ \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Supongamos una solución de la forma

$$y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}$$

el valor de los sumandos de la ecuación diferencial es

$$\begin{array}{rclrcl}
y&=&\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}&&&\\
y^{(1}&=&\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,a_n x^{n+r-1}&xy^{(1}&=&\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,a_n x^{n+r}\\
y^{(2}&=&\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,(n+r-1)\,a_n x^{n+r-2}&2xy^{(2}&=&\sum_{n=0}^{\infty}2\,(n+r)\,(n+r-1)\,a_n x^{n+r-1}
\end{array}$$

entrando en la ecuación diferencial

$$\sum_{n=0}^{\infty}2\,(n+r)\,(n+r-1)\,a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

que podemos e escribir

$$x^{r-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(2\,(n+r)\,(n+r-1)+(n+r))\,a_n x^n\sum_{n=0}^{\infty}((n+r)+1)\,a_n x^{n+1}\right]\equiv$$

$$\equiv\quad x^{r-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,(2n+2r-1)\,a_n x^n\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)\,a_n x^{n+1}\right]=0$$

hacemos en el último sumatorio el cambio: $n+1=k$

$$x^{r-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,(2n+2r-1)\,a_n x^n+\sum_{k=1}^{\infty}(k+r)\,a_{k-1}x^k\right]=0$$

y volviendo en el último sumatorio a la variable n

$$x^{r-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(2n+2r-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_{n-1}x^n\right]=0$$

luego tenemos

$$\sum_{n=0}^{0}(n+r)(2n+2r-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r)(2n+2r-1)a_n+(n+r)a_{n-1}\right]x^n=0$$

de donde obtenemos si

$$n=0 \quad\rightarrow\quad (0+r)(0+2r-1)a_0=0 \qquad\rightarrow\quad \begin{cases} r=0 & \rightarrow \quad 0\cdot a_0=0 \quad\rightarrow\quad a_0 \text{ libre} \\ r=\dfrac{1}{2} & \rightarrow \quad 0\cdot a_0=0 \quad\rightarrow\quad a_0 \text{ libre}\end{cases}$$

$$n\geq 1 \quad\rightarrow\quad a_n=-\frac{(n+r)a_{n-1}}{(n+r)(2n+2r-1)}$$

- **Si $r=0$:**

dando valores

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2\cdot 1-1}a_0 \\ a_2 &= -\frac{1}{2\cdot 2-1}a_1 \\ a_3 &= -\frac{1}{2\cdot 3-1}a_2 \qquad \text{multiplicando} \qquad a_n = (-1)^n\frac{1}{(2n-1)!!}a_0 \\ &\cdot\ \cdot \\ a_n &= -\frac{1}{2n-1}a_{n-1}\end{aligned}$$

por tanto la solución es

$$y_1=a_0+a_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2k-1)!!}x^n$$

- **Si $r=\dfrac{1}{2}$:**

dando valores

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2\cdot 1}a_0 \\ a_2 &= -\frac{1}{2\cdot 2}a_1 \\ a_3 &= -\frac{1}{2\cdot 3}a_2 \qquad \text{multiplicando} \qquad a_n = (-1)^n\frac{1}{(2n)!!}a_0 \\ &\cdot\ \cdot \\ a_n &= -\frac{1}{2n}a_{n-1}\end{aligned}$$

por tanto la solución es

$$y_1=x^{\frac{1}{2}}\left[a_0+a_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}x^n\right]=x^{\frac{1}{2}}\left[a_0+a_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]=a_0x^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}$$

La solución final es

$$y=A\left[x^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\right]+B\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2k-1)!!}x^n\right]$$

∎

11.- Resolver el sistema: $\left\{ \begin{array}{lcr} y_1^{(1} & = & y_1 + 3y_2 \\ y_2^{(1} & = & 2y_1 + 2y_2 \end{array} \right.$.

Solución:

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1} \\ y_2^{(1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Determinemos sus valores propios

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \to (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0 \to \lambda = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 4 \end{array} \right.$$

luego la solución es

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \mathbf{B} e^{x} + C_2 \mathbf{C} e^{4x}$$

donde $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ son vectores propios, asociados respectivamente a los valores propios $\lambda = 1$ y $\lambda = 4$, que han de cumplir:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to b_1 + 2b_2 = 0$$
$$\begin{pmatrix} 2-4 & 2 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to c_1 - c_2 = 0$$

Finalmente la solución es

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}$$

∎

12.- Resolver el sistema: $\left\{ \begin{array}{lcr} y_1^{(1} & = & y_2 \\ y_2^{(1} & = & -4y_1 \end{array} \right.$.

Solución:

Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1} \\ y_2^{(1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Determinemos sus valores propios

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -4 & 0-\lambda \end{vmatrix} \to \lambda^2 + 4 = 0 \to \lambda = \left\{ \begin{array}{l} +2i \\ -2i \end{array} \right.$$

luego la solución es

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \mathbf{B} e^{2xi} + C_2 \mathbf{C} e^{-2xi}$$

donde $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ son vectores propios, asociados, respectivamente, a los valores propios $\lambda = 2i$ y $\lambda = -2i$, que han de cumplir:

$$\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to -2ib_1 + b_2 = 0;$$
$$\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to 2ic_1 + c_2 = 0$$

Finalmente la solución es

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{2ix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} e^{-2ix} = \\ &= C_1 \begin{pmatrix} \cos 2x + i \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x + 2i \cos 2x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos 2x - i \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x - 2i \cos 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que podemos escribir

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2x \\ 2 \cos 2x \end{pmatrix}$$

■

13.- Resolver el sistema: $\begin{cases} y_1^{(2} + y_1^{(1} + y_2^{(1} - 2y_2 = 0 \\ y_1^{(1} - y_2^{(1} + y_1 = 0 \end{cases}$.

Solución: No está en forma normal, mas podemos reducir el orden haciendo $y_1^{(1} = y_3$, con lo que queda

$$\begin{aligned} y_1^{(1} &= y_3 \\ y_2^{(1} &= y_1 + y_3 \\ y_3^{(1} &= 2y_2 - y_1^{(1} - y_2^{(1} = 2y_2 - y_3 - (y_1 + y_3) = -y_1 + 2y_2 - 2y_3 \end{aligned}$$

que expresado matricialmente,

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1} \\ y_2^{(1} \\ y_3^{(1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Determinemos sus valores propios

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to$$

$$\to \quad -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 \equiv -\lambda\left(\lambda^2 - 1\right) - 2\left(\lambda^2 - 1\right) = 0 \to \lambda = \begin{cases} +1 \\ -1 \\ -2 \end{cases}$$

Al valor propio $\lambda = +1$ le corresponde un vector propio $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} -x & +0 & +z & = 0 \\ +x & -y & +z & = 0 \\ -x & +2y & -3z & = 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} z & = & x \\ y & = & 2z \end{matrix}$$

Al valor propio $\lambda = -1$ le corresponde un vector propio $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{cccc} x & +0 & +z & = 0 \\ +x & +y & +z & = 0 \\ -x & +2y & -z & = 0 \end{array} \to \begin{array}{ccc} z & = & -x \\ y & = & 0 \end{array}$$

Al valor propio $\lambda = -2$ le corresponde un vector propio $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{cccc} x & +0 & +z & = 0 \\ +x & +2y & +z & = 0 \\ -x & +2y & -z & = 0 \end{array} \to \begin{array}{ccc} z & = & -2x \\ y & = & \dfrac{x}{2} \end{array}$$

por lo tanto la solución es

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

$\blacksquare$

14.- Resolver el sistema: $\left\{ \begin{array}{ccc} y_1^{(1} & = & 2y_1 \\ y_2^{(1} & = & 3y_1 + 2y_2 \\ y_3^{(1} & = & 5y_1 - 2y_2 + y_3 \end{array} \right.$.

Solución:

Expresado matricialmente,

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1} \\ y_2^{(1} \\ y_3^{(1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Determinemos sus valores propios

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 5 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to (\lambda - 2)^2 (\lambda + 1) = 0 \to \lambda = \left\{ \begin{array}{r} -1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right.$$

Al valor propio $\lambda = -1$ le corresponde un vector propio $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{cc} x & = 0 \\ y & = 0 \\ z & = z \end{array} \to \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al valor propio $\lambda = 2$ le corresponde un vector propio $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & -\dfrac{3}{2}z \end{array} \to \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Al ser una raiz doble, buscamos una segunda solución de la forma

$$\Phi(x) = (\mathbf{v_3} + x\mathbf{v_2})\, e^{2x}$$

que ha de cumplir la condición

$$\Phi^{(1}(x) = \mathbf{v_2}e^{2x} + 2(\mathbf{v_3} + x\mathbf{v_2})\, e^{2x} = \mathbf{A}\Phi(x) = \mathbf{A}(\mathbf{v_3} + x\mathbf{v_2})\, e^{2x}$$

es decir

$$\mathbf{v_2} = (A - 2I)\,\mathbf{v_3}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{array}{rcl} 3x & = & 3 \\ 5x - 2y - 3z & = & -2 \end{array} \to \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ 2y & = & 7 - 3z \end{array}$$

Por lo tanto la solución es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] e^{2x}$$

$\blacksquare$

15.- Resolver el sistema: $\begin{array}{rcll} y_1^{(1} & = & -y_1 + 4y_2 & \\ y_2^{(1} & = & -2y_1 + 3y_2 & + \quad e^{x} \end{array}$, con las condiciones iniciales $y_1(0) = y_1(0) = 0$.

Solución:

Expresado matricialmente

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1} \\ y_2^{(1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix} = \mathbf{A\,Y} + \mathbf{B}$$

siendo el sistema homogéneo el siguiente,

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1} \\ y_2^{(1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Determinemos sus valores propios

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 8 = 0 \to \lambda = \begin{cases} 1 + 2i \\ 1 - 2i \end{cases}$$

Al valor propio $\lambda = 1 + 2i$ le corresponde un vector propio $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} -2-2i & 4 \\ -2 & 2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{rcl} x & = & 1 - i \\ y & = & 1 \end{array} \to \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 e^{1+2i} &= e^x \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos 2x + i\text{sen}\, 2x) = \begin{pmatrix} \cos 2x + \text{sen}\, 2x + i\left[\text{sen}\, 2x - \cos 2x\right] \\ \cos 2x + i\text{sen}\, 2x \end{pmatrix} = \\
&= e^x \begin{pmatrix} \cos 2x + \text{sen}\, 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} + ie^x \begin{pmatrix} \text{sen}\, 2x - \cos 2x \\ \text{sen}\, 2x \end{pmatrix} \equiv e^x \mathbf{\Psi}_1(x) + ie^x \mathbf{\Psi}_2(x)
\end{aligned}$$

Y será solución de la homogénea una combinación lineal de $\mathbf{\Psi}_1(x)$ y de $\mathbf{\Psi}_2(x)$.

Si $\mathbf{\Phi}(x)$ es

$$\mathbf{\Phi}(x) = e^x \begin{pmatrix} \cos 2x + \text{sen}\, 2x & \text{sen}\, 2x - \cos 2x \\ \cos 2x & \text{sen}\, 2x \end{pmatrix}$$

una solución particular viene dada por

$$y_p(x) = \mathbf{\Phi}(x) \int \mathbf{\Phi}^{-1}(x)\ \mathbf{B}\, \mathrm{d}\, x$$

como

$$|\mathbf{\Phi}(x)| = \left| e^x \begin{pmatrix} \cos 2x + \text{sen}\, 2x & \text{sen}\, 2x - \cos 2x \\ \cos 2x & \text{sen}\, 2x \end{pmatrix} \right| = e^{2x}$$

tenemos que

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(x) = \frac{1}{e^x} \begin{pmatrix} \text{sen}\, 2x & -(\text{sen}\, 2x - \cos 2x) \\ -\cos 2x & \cos 2x + \text{sen}\, 2x \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}^{-1}(x)\ \mathbf{B} &= \frac{1}{e^x} \begin{pmatrix} \text{sen}\, 2x & -(\text{sen}\, 2x - \cos 2x) \\ -\cos 2x & \cos 2x + \text{sen}\, 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{e^{2x}} \begin{pmatrix} \cos 2x - \text{sen}\, 2x \\ \cos 2x + \text{sen}\, 2x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\int e^{ax} \cos bx\, \mathrm{d}\, x &= \frac{e^{ax}(b\text{sen}\, bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C \\
\int e^{ax} \text{sen}\, bx\, \mathrm{d}\, x &= \frac{e^{ax}(a\text{sen}\, bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\int \mathbf{\Phi}^{-1}(x)\ \mathbf{B}\, \mathrm{d}\, x = \int \begin{pmatrix} e^{-2x} \cos 2x - e^{-2x} \text{sen}\, 2x \\ e^{-2x} \text{sen}\, 2x + e^{-2x} \cos 2x \end{pmatrix} \mathrm{d}\, x = \frac{e^{-2x}}{2} \begin{pmatrix} \text{sen}\, 2x \\ -\cos 2x \end{pmatrix}$$

y que

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_p(x) &= \mathbf{\Phi}(x)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(x)\ \mathbf{B}\,\mathrm{d}\,x = \\ &= e^x\begin{pmatrix}\cos 2x+\operatorname{sen} 2x & \operatorname{sen} 2x-\cos 2x\\ \cos 2x & \operatorname{sen} 2x\end{pmatrix}\frac{e^{-2x}}{2}\begin{pmatrix}\operatorname{sen} 2x\\ -\cos 2x\end{pmatrix}=\frac{e^{-x}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Finalmente la solución general es

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_h(x)+\mathbf{y}_p(x)=C_1\mathbf{\Psi}_1(x)+C_2\mathbf{\Psi}_2(x)+\mathbf{y}_p(x)$$

Aplicando las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(0) &= \begin{pmatrix}y_1(0)\\ y_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}= \\ &= \left[C_1e^x\begin{pmatrix}\cos 2x+\operatorname{sen} 2x\\ \cos 2x\end{pmatrix}+C_2e^x\begin{pmatrix}\operatorname{sen} 2x-\cos 2x\\ \operatorname{sen} 2x\end{pmatrix}+\frac{e^{-x}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_{x=0}= \\ &= C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rightarrow \begin{array}{rcl}0&=&C_1-C_2+\frac{1}{2}\\ 0&=&C_1\end{array}\rightarrow C_2=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución es

$$\mathbf{y}(x) = =\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}e^x\begin{pmatrix}[\operatorname{sen} 2x-\cos 2x]\\ \operatorname{sen} 2x\end{pmatrix}+\frac{e^{-x}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

■

16.- Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

$$(a)\ \begin{cases}x^{(1}=-x-y\\ y^{(1}=2x-y\\ x(0)=1;\ \ y(0)=2\end{cases}.$$

$$(b)\ \begin{cases}x^{(1}=x-2y+2\\ y^{(1}=5x-y+1\\ x(0)=y(0)=0\end{cases}.$$

$$(c)\ \begin{cases}x^{(1}=x-2y-t\\ y^{(1}=2x-3y-t\\ x(0)=y(0)=1\end{cases}.$$

Solución: **apartado a**, $\begin{cases}x^{(1}=-x-y\\ y^{(1}=2x-y\\ x(0)=1;\ \ y(0)=2\end{cases}.$

Operando,

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(1} = -x-y \\ y^{(1} = 2x-y \end{array}\right. \underset{\text{despejando y en la primera}}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} y = -x-x^{(1} \\ y^{(1} = 2x-y \end{array}\right. \underset{\text{derivando la primera}}{\longrightarrow}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} y^{(1} = -x^{(1} - x^{(2} \\ y^{(1} = 2x-y \end{array}\right. \underset{\text{sustituyendo y en la segunda}}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} y^{(1} = -x^{(1} - x^{(2} \\ y^{(1} = 2x + x^{(1} + x \end{array}\right. \underset{\text{igualando}}{\longrightarrow}$$

$$\rightarrow \quad -x^{(1} - x^{(2} = 2x - \left(-x - x^{(1}\right) \rightarrow x^{(2} + 2x^{(1} + 3x = 0$$

Resolvamos la homogénea obtenida

$$r^2 + 2r + 3 = 0 \rightarrow r = -1 \pm \sqrt{1-3} = 1 \pm \sqrt{2}\mathbf{i}$$

luego

$$\begin{aligned} x &= e^{-t}\left[A\cos\sqrt{2}t + B\operatorname{sen}\sqrt{2}t\right] \\ x^{(1} &= -x + e^{-t}\left[-\sqrt{2}A\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \sqrt{2}B\cos\sqrt{2}t\right] \end{aligned}$$

introduciendo las condiciones iniciales

$$\left\{\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{array}\right. \rightarrow x^{(1}(0) = -\left(x(0) + y(0)\right) \rightarrow x^{(1}(0) = -3 \qquad \begin{array}{r} A = 1 \\ \rightarrow -3 = -1 + \sqrt{2}B \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = -\sqrt{2} \end{array}\right.$$

resultando

$$x = e^{-t}\left[\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t\right]$$

En cuanto a y, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} y = &\ -x - x^{(1} = \\ = &\ -e^{-t}\left[\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t\right] - e^{-t}\left[-\cos\sqrt{2}t + \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t - \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t - 2\cos\sqrt{2}t\right] = \\ = &\ e^{-t}\left[2\cos\sqrt{2}t + \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t\right] \end{aligned}$$

De otro modo, a través del operador D

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(1} = -x-y \\ y^{(1} = 2x-y \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} D+1 & 1 \\ -2 & D+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{vmatrix} D+1 & 1 \\ -2 & D+1 \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & D+1 \end{vmatrix} \rightarrow \left(D^2 + 2D + 3\right)(x) = 0$$

$$\begin{vmatrix} D+1 & 1 \\ -2 & D+1 \end{vmatrix}(y) = \begin{vmatrix} D+1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \left(D^2 + 2D + 3\right)(y) = 0$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}^{(2}\ (x)}{\mathrm{d}\,t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}^{(1}\ (x)}{\mathrm{d}\,t} + 3x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^{(2}\ (y)}{\mathrm{d}\,t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}^{(1}\ (y)}{\mathrm{d}\,t} + 3y = 0 \end{array}\right.$$

Hemos obtenido sendas ecuaciones diferenciales, iguales a las anteriores, de orden dos, cuya solución dependerá de dos constantes, luego las condiciones iniciales son

- Las dadas en el enunciado: $\left\{\begin{array}{l} x(0)=1 \\ y(0)=2 \end{array}\right.$

- Las que obtenemos a través del enunciado: $\left\{\begin{array}{l} x^{(1}(0)=-x(0)-y(0) \\ y^{(1}(0)=2x(0)-y(0) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^{(1}(0)=-3 \\ y^{(1}(0)=0 \end{array}\right.$

luego, teniendo en cuenta que la ecuación característica de las ecuaciones diferenciales son

$$r^2+2r+3=0 \rightarrow r=-1\pm\sqrt{2}\mathbf{i}$$

resulta

$$\begin{array}{rl} x= & e^{-t}\left[A\cos\sqrt{2}x+B\operatorname{sen}\sqrt{2}x\right] \\ y= & e^{-t}\left[C\cos\sqrt{2}x+D\operatorname{sen}\sqrt{2}x\right] \end{array}$$

Con las condiciones iniciales

$$\left\{\begin{array}{l} x(0)=1 \\ y(0)=2 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1=A \\ 2=C \end{array}\right.$$

y

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(1}(0)=-3 \\ y^{(1}(0)=0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^{(1} & = & e^{-t}\left[-A\cos\sqrt{2}t-B\operatorname{sen}\sqrt{2}t-\sqrt{2}A\operatorname{sen}\sqrt{2}t+\sqrt{2}B\cos\sqrt{2}t\right] \\ y^{(1} & = & e^{-t}\left[-C\cos\sqrt{2}t-D\operatorname{sen}\sqrt{2}t-\sqrt{2}C\operatorname{sen}\sqrt{2}t+\sqrt{2}D\cos\sqrt{2}t\right] \end{array}\right.$$

luego

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x^{(1}(0) & \equiv -3 & = & -A+\sqrt{2}B & = & -1+\sqrt{2}B \\ y^{(1}(0) & \equiv 0 & = & -C+\sqrt{2}D & = & -2+\sqrt{2}D \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{r} B=-\sqrt{2} \\ D=\sqrt{2} \end{array}\right.$$

por lo tanto

$$\begin{array}{rl} x= & e^{-t}\left[\cos\sqrt{2}t-\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t\right] \\ y= & e^{-t}\left[2\cos\sqrt{2}t+\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t\right] \end{array}$$

De otro modo, matricialmente

$$\begin{pmatrix} x^{(1} \\ y^{(1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

que por comodidad escribimos

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1} \\ y_2^{(1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Determinemos los valores propios

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2+2=0 \rightarrow \lambda=-1\pm\sqrt{2}\mathbf{i}$$

luego la solución es de la forma

$$\mathbf{y}(x)=e^{-x}\left[C_1\mathbf{B}e^{\sqrt{2}\mathbf{i}}+C_2\mathbf{C}e^{-\sqrt{2}\mathbf{i}}\right]$$

donde $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ son vectores propios, asociados, respectivamente, a los valores propios $\lambda=-1+\sqrt{2}\mathbf{i}$ y $\lambda=-1-\sqrt{2}\mathbf{i}$, que han de cumplir:

$$\begin{pmatrix} -1-\left(-1+\sqrt{2}\mathbf{i}\right) & -1 \\ 2 & -1-\left(-1+\sqrt{2}\mathbf{i}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\mathbf{i} & -1 \\ 2 & -\sqrt{2}\mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -\sqrt{2}\mathbf{i}b_1 - b_2 = 0 \rightarrow (b_1,\, b_2) = K\left(1,\, -\sqrt{2}\mathbf{i}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -1-\left(-1-\sqrt{2}\mathbf{i}\right) & -1 \\ 2 & -1-\left(-1-\sqrt{2}\mathbf{i}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}\mathbf{i} & -1 \\ 2 & \sqrt{2}\mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{2}\mathbf{i}c_1 - c_2 = 0 \rightarrow (c_1,\, c_2) = K\left(1,\, \sqrt{2}\mathbf{i}\right)$$

Finalmente la solución es

$$\mathbf{y}(x) = e^{-x}\left[C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -\sqrt{2}\mathbf{i} \end{pmatrix} e^{\sqrt{2}\mathbf{i}x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \sqrt{2}\mathbf{i} \end{pmatrix} e^{-\sqrt{2}\mathbf{i}x}\right] =$$

$$= e^{-x}\left[C_1 \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}x + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}x \\ \\ -\sqrt{2}\mathbf{i}\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}x - \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}x \\ \\ \sqrt{2}\mathbf{i}\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}x \end{pmatrix}\right]$$

que podemos escribir

$$\mathbf{y}(x) = e^{-x}\left[C_1 \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}x \\ \\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}x \\ \\ \sqrt{2}\cos\sqrt{2}x \end{pmatrix}\right]$$

introduciendo las condiciones iniciales

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 & C_1 = 1 \\ y_2(0) = 2 & C_2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

por lo tanto

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{-x} \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}x \\ \\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}x + 2\cos\sqrt{2}x \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Solución: apartado b, $\begin{cases} x^{(1} = x - 2y + 2 \\ y^{(1} = 5x - y + 1 \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$.

Operando,

$$\begin{cases} x^{(1} = x - 2y + 2 \\ y^{(1} = 5x - y + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x - x^{(1} + 2}{2} \\ y^{(1} = 5x - y + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^{(1} = \dfrac{x^{(1} - x^{(2}}{2} \\ y^{(1} = 5x - \dfrac{x - x^{(1} + 2}{2} + 1 \end{cases}$$

$$\frac{x^{(1} - x^{(2}}{2} = 5x - \frac{x - x^{(1} + 2}{2} + 1 \rightarrow x^{(1} - x^{(2} = 10x - x + x^{(1} - 2 + 2 \rightarrow$$

$$x^{(2} + 9x = 0$$

La ecuación caracterítica es

$$r^2 + 9 = 0 \to r = \pm 3\mathbf{i}$$

luego es

$$x = A\cos 3t + B\operatorname{sen} 3t$$

Las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x^{(1}(0) &= 0 - 2\cdot 0 + 2 = 2 \end{aligned}$$

por tanto

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & A\cos 3t + B\operatorname{sen} 3t \\ x^{(1} & = & -3A\operatorname{sen} 3t + 3B\cos 3t \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{lcl} x(0) & = 0 & \to \quad 0 = A \\ x^{(1}(0) & = 2 & \to \quad 2 = 3B \end{array} \right.$$

siendo

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3t \\ y &= \frac{x - x^{(1} + 2}{2} = \frac{\frac{2}{3}\operatorname{sen} 3t - 2\cos t + 2}{2} = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t - \cos t + 1 \end{aligned}$$

De otro modo, a través del operador D

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(1} = x - 2y + 2 \\ y^{(1} = 5x - y + 1 \end{array} \right. \to \begin{pmatrix} D-1 & 2 \\ -5 & D+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{vmatrix} D-1 & 2 \\ -5 & D+1 \end{vmatrix} (x) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & D+1 \end{vmatrix} \to \left(D^2+9\right)(x) = 0$$

$$\begin{vmatrix} D-1 & 2 \\ -5 & D+1 \end{vmatrix} (y) = \begin{vmatrix} D-1 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \to \left(D^2+9\right)(y) = 9$$

$$\to \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}^{(2}(x)}{\mathrm{d}\,t^2} + 9x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^{(2}(y)}{\mathrm{d}\,t^2} + 9y = 9 \end{array} \right.$$

Hemos obtenido sendas ecuaciones diferenciales, una igual a la resuelta y la otra, no homogénea, pero que una solución particular es $y_p = 1$, por lo que

$$y = y_h + y_p \to y = A\cos 3t + B\operatorname{sen} 3t + 1$$

Entrando con las condiciones particulares

$$x(0) = y(0) = 0 \to \left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y^{(1}(0) = 5x(0) - y(0) + 1 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{ll} y(0) = 0 & 0 = A + 1 \\ y^{(1}(0) = 1 & 1 = 3B \end{array} \right.$$

consecuentemente

$$y = -\cos 3t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + 1$$

De otro modo, matricialmente

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1} \\ y_2^{(1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{y}^{(1}(x) = \mathbf{A}(x)\ \mathbf{y}(x) + \mathbf{D}(x)$$

La ecuación característica del sistema homogéneo es

$$\left| \begin{array}{cc} 1-\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{array} \right| = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 10 = \lambda^2 + 9 = 0 \to \lambda = \pm 3\mathbf{i}$$

luego la solución, del homogéneo, es de la forma

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \mathbf{B} e^{3\mathbf{i}} + C_2 \mathbf{C} e^{-3\mathbf{i}}$$

donde $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ son vectores propios, asociados, respectivamente, a los valores propios $\lambda = 3\mathbf{i}$ y $\lambda = -3\mathbf{i}$, que han de cumplir:

$$\begin{pmatrix} -1-3\mathbf{i} & -2 \\ 5 & -1-3\mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \quad (1-3\mathbf{i})\, b_1 - 2b_2 = 0 \to (b_1,\, b_2) = K\,(1+3\mathbf{i},\, 5)$$

$$\begin{pmatrix} -1+3\mathbf{i} & -2 \\ 5 & -1+3\mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \quad (1+3\mathbf{i})\, c_1 - 2c_2 = 0 \to (c_1,\, c_2) = K\,(1-3\mathbf{i},\, 5)$$

Finalmente la solución, del homogéneo, es

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_h(x) = \quad & C_1 \begin{pmatrix} 1+3\mathbf{i} \\ \\ 5 \end{pmatrix} e^{3\mathbf{i}x} + C_2 \begin{pmatrix} 1-3\mathbf{i} \\ \\ 5 \end{pmatrix} e^{-3\mathbf{i}x} = \\ = \quad & C_1 \begin{pmatrix} \cos 3x - 3 \operatorname{sen} 3x + \mathbf{i}\,[3\cos 3x + \operatorname{sen} 3x] \\ \\ 5\cos x + \mathbf{i} 5 \operatorname{sen} 3x \end{pmatrix} + \\ & + C_2 \begin{pmatrix} \cos 3x - 3 \operatorname{sen} 3x - \mathbf{i}\,[3\cos 3x + \operatorname{sen} 3x] \\ \\ 5\cos x - \mathbf{i} 5 \operatorname{sen} 3x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que podemos escribir

$$\mathbf{y}_h(x) = \quad C_1 \begin{pmatrix} \cos 3x - 3 \operatorname{sen} 3x \\ \\ 5\cos x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3\cos 3x + \operatorname{sen} 3x \\ \\ 5 \operatorname{sen} 3x \end{pmatrix}$$

Para determinar la solución particular hacemos uso del método de variación de las constantes, para lo cual si es

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \cos 3x - 3 \operatorname{sen} 3x & 3\cos 3x + \operatorname{sen} 3x \\ \\ 5\cos 3x & 5 \operatorname{sen} 3x \end{pmatrix}$$

una solución particular

$$\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{\Phi}(x) \int \mathbf{\Phi}^{-1}(x)\ \mathbf{D}(x)\ \mathrm{d}\,x$$

siendo

$$|\mathbf{\Phi}(x)| = -15; \qquad \mathbf{\Phi}^{-1}(x) = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 \operatorname{sen} 3x & -3\cos 3x - \operatorname{sen} 3x \\ \\ -5\cos 3x & \cos 3x - 3 \operatorname{sen} 3x \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(x)\ \mathbf{D}(x) = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5\,\mathrm{sen}\,3x & -3\cos 3x - \mathrm{sen}\,3x \\ \\ -5\cos 3x & \cos 3x - 3\,\mathrm{sen}\,3x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9\,\mathrm{sen}\,3x - 3\cos 3x \\ \\ -9\cos 3x - 3\,\mathrm{sen}\,3x \end{pmatrix}$$

luego

$$\int \mathbf{\Phi}^{-1}(x)\ \mathbf{D}(x)\ \mathrm{d}\,x = \int -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9\,\mathrm{sen}\,3x - 3\cos 3x \\ \\ -9\cos 3x - 3\,\mathrm{sen}\,3x \end{pmatrix}\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -3\cos 3x - \mathrm{sen}\,3x \\ \\ -3\,\mathrm{sen}\,3x + \cos 3x \end{pmatrix}$$

y es

$$\mathbf{\Phi}(x)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(x)\ \mathbf{D}(x)\ \mathrm{d}\,x =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 3x - 3\,\mathrm{sen}\,3x & 3\cos 3x + \mathrm{sen}\,3x \\ \\ 5\cos 3x & 5\,\mathrm{sen}\,3x \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{15}\right)\begin{pmatrix} -3\cos 3x - \mathrm{sen}\,3x \\ \\ -3\,\mathrm{sen}\,3x + \cos 3x \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} (\cos 3x - 3\,\mathrm{sen}\,3x)(3\cos 3x + \mathrm{sen}\,3x) + (3\cos 3x + \mathrm{sen}\,3x)(3\,\mathrm{sen}\,3x - \cos 3x) \\ \\ 5\cos 3x\,(3\cos 3x + \mathrm{sen}\,3x) + 5\,\mathrm{sen}\,3x\,(3\,\mathrm{sen}\,3x - \cos 3x) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego la solución del sistema es

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_h(x) + \mathbf{y}_p(x) = C_1\begin{pmatrix} \cos 3x - 3\,\mathrm{sen}\,3x \\ \\ 5\cos x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 3\cos 3x + \mathrm{sen}\,3x \\ \\ 5\,\mathrm{sen}\,3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución que cumple los valores iniciales dados

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 5 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 3 \\ \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} C_1 + 3C_2 = 0 \\ \\ 5C_1 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 = \dfrac{1}{15} \\ C_1 = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{y}(x) = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} \cos 3x - 3\,\mathrm{sen}\,3x \\ \\ 5\cos x \end{pmatrix} + \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3\cos 3x + \mathrm{sen}\,3x \\ \\ 5\,\mathrm{sen}\,3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -3\cos 3x + 9\,\mathrm{sen}\,3x + 3\cos 3x + \mathrm{sen}\,3x \\ \\ -15\cos x + 5\,\mathrm{sen}\,3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,3x \\ \\ -\cos x + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,3x + 1 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Solución: apartado c, $\left\{\begin{array}{l} x^{(1} = x - 2y - t \\ y^{(1} = 2x - 3y - t \\ x(0) = y(0) = 1 \end{array}\right.$.

Operando,

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(1} = x - 2y - t \\ y^{(1} = 2x - 3y - t \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{x - x^{(1} - t}{2} \\ y^{(1} = 2x - 3y - t \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y^{(1} = \dfrac{x^{(1} - x^{(2} - 1}{2} \\ y^{(1} = 2x - 3\dfrac{x - x^{(1} - t}{2} - t \end{array}\right.$$

$$\frac{x^{(1} - x^{(2} - 1}{2} = 2x - 3\frac{x - x^{(1} - t}{2} - t \rightarrow x^{(2} + 2x^{(1} + x = -t - 1$$

La ecuación caracterítica, de la homogénea, es

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \rightarrow r = -1 \text{ doble}$$

luego es

$$x = e^{-t}[A + Bt]$$

Determinemos una solución particular, para lo cual, visto el segundo término probamos con $x_p = at + b$

$$x^{(2} + 2x^{(1} + x = -t - 1 \rightarrow 0 + 2a + at + b = -t - 1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

por tanto

$$x = x_h + x_p \rightarrow x = e^{-t}[A + Bt] - t + 1$$

las condiciones particulares

$$\left\{\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^{(1}(0) = x(0) - 2y(0) - 0 \\ x(0) = 1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^{(1}(0) = 1 - 2 \\ x(0) = 1 \end{array}\right.$$

luego

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = e^{-t}[A + Bt] - t + 1 \\ x^{(1}(t) = e^{-t}[-A - Bt + B] - 1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x(0) = A + 1 & = & 1 \\ x^{(1}(0) = -A + B - 1 & = & -1 \end{array}\right. \rightarrow\rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$$

por lo tanto la solución es

$$\left\{\begin{array}{l} x = e^{-t}[A + Bt] - t + 1 \\ y = \dfrac{x - x^{(1} - t}{2} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -t + 1 \\ y = \dfrac{-t + 1 + 1 - t}{2} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -t + 1 \\ y = -t + 1 \end{array}\right.$$

De otro modo, a través del operador D

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(1} = x - 2y - t \\ y^{(1} = 2x - 3y - t \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} D - 1 & 2 \\ -2 & D + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{vmatrix} D-1 & 2 \\ -2 & D+3 \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} -t & 2 \\ -t & D+3 \end{vmatrix} \to \left(D^2+2D+1\right)(x) = -t-1$$

$$\begin{vmatrix} D-1 & 2 \\ -2 & D+3 \end{vmatrix}(y) = \begin{vmatrix} D-1 & -t \\ -2 & -t \end{vmatrix} \to \left(D^2+2D+1\right)(y) = -t-1$$

$$\to \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}^{(2}\ (x)}{\mathrm{d}\,t^2} + \dfrac{\mathrm{d}^{(1}\ (x)}{\mathrm{d}\,t} + x = -t-1 \\ \dfrac{\mathrm{d}^{(2}\ (y)}{\mathrm{d}\,t^2} + \dfrac{\mathrm{d}^{(1}\ (y)}{\mathrm{d}\,t} + y = -t-1 \end{array} \right.$$

Hemos obtenido sendas ecuaciones diferenciales, una igual a la resuelta y la otra, no homogénea, pero que una solución particular será de la forma $y_p = at+b$, por lo que

$$\frac{\mathrm{d}^{(2}\ (y_p)}{\mathrm{d}\,t^2} + \frac{\mathrm{d}^{(1}\ (y_p)}{\mathrm{d}\,t} + y_p = -t-1 \to 0+2a+at+b = -t-1 \to y_p = -t+1$$

$$y = y_h + yp \to y = [A+Bt]\,e^{-t} - t + 1$$

Entrando con las condiciones particulares

$$x(0) = y(0) = 1 \to \left\{ \begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y^{(1}(0) = 2x(0) - 3y(0) - 0 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{lrl} y(0) = 1 & 1 = & A+1 \\ y^{(1}(0) = -1 & -1 = & -A+B-1 \end{array} \right.$$

consecuentemente

$$y = -t+1$$

De otro modo, matricialmente

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1} \\ y_2^{(1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -x \end{pmatrix} \equiv \mathbf{y}^{(1}(x) = \mathbf{A}(x)\ \mathbf{y}(x) + \mathbf{D}(x)$$

La ecuación característica del sistema homogéneo es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(3+\lambda) + 4 = (\lambda+1)^2 = 0 \to \lambda = -1 \ \text{doble}$$

Al valor propio $\lambda = -1$, le corresponde, un vector propio (b_1, b_2) tal que

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & -2 \\ 2 & -3-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

luego una solución es

$$e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si ciclamos el vector obtenido

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Obteniendo otra solución de la forma

$$e^{-x}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Finalmente la solución, del homogéneo, es

$$\mathbf{y}_h(x) = \quad C_1 e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Para determinar la solución particular hacemos uso del método de variación de las constantes, para lo cual si es

$$\mathbf{\Phi}(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 & 1+x \\ 1 & \frac{1}{2}+x \end{pmatrix}$$

una solución particular

$$\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{\Phi}(x)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(x)\ \mathbf{D}(x)\ \mathrm{d}\,x$$

siendo

$$|\mathbf{\Phi}(x)| = -\frac{e^{-2x}}{2}; \qquad \mathbf{\Phi}^{-1}(x) = -2e^{x}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+x & -(1+x) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}^{-1}(x)\ \mathbf{D}(x) = &\ -2e^{x}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+x & -(1+x) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x \\ -x \end{pmatrix} = \\ = &\ -2e^{x}\begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -e^{x}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

luego

$$\int \mathbf{\Phi}^{-1}(x)\ \mathbf{D}(x)\ \mathrm{d}\,x = \int -e^{x}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}\,x = -e^{x}\begin{pmatrix} x-1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y es

$$\mathbf{\Phi}(x)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(x)\ \mathbf{D}(x)\ \mathrm{d}\,x == \quad e^{-x}\begin{pmatrix} 1 & 1+x \\ 1 & \frac{1}{2}+x \end{pmatrix}(-e^{x})\begin{pmatrix} x-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-x \end{pmatrix}$$

Luego la solución del sistema es

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_h(x) + \mathbf{y}_p(x) = C_1 e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-x \end{pmatrix}$$

La solución que cumple los valores iniciales dados

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 e^{0}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{0}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} \to \\ &\to \left\{\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + \dfrac{C_2}{2} = 0 \end{array}\right. \to \ C_1 = C_2 = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{y}(x) = \quad \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-x \end{pmatrix}$$

17.- Encontrar una matriz A tal que $y\,(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$ sea solución de la ecuación $y^{(1} = A\,y$.

Solución:
Será

$$\begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Hallemos la matriz inversa

$$\begin{array}{cc|cc} e^{2t} & -e^{-t} & 1 & 0 \\ e^{2t} & -2e^{-t} & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & e^{-2t} & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -e^{t} \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & e^{-2t} & -e^{-2t} \\ 1 & 1 & 0 & -e^{t} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2e^{-2t} & -e^{-2t} \\ 0 & 1 & e^{t} & -e^{t} \end{array}$$

Por tanto

$$A = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{-2t} & -e^{-2t} \\ e^{t} & -e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & -2-1 \\ 4+2 & -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

18.- Sobre una superficie lisa se sujeta una masa de 2 kg a una superficie vertical por medio de un resorte de constante elástica 4 Nw/m. Otra masa de 1 kg se conecta a la primera mediante un resorte con constante elástica de 2 Nw/m. Las masas se alinean horizontalmente de manera que los resortes quedan con sus longitudes naturales. Se efectúa un desplazamiento de 0.5 m a la derecha de sus posiciones de equlibrio y se suelta. Determinar las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema y resolver el correspondiente problema de valor inicial.

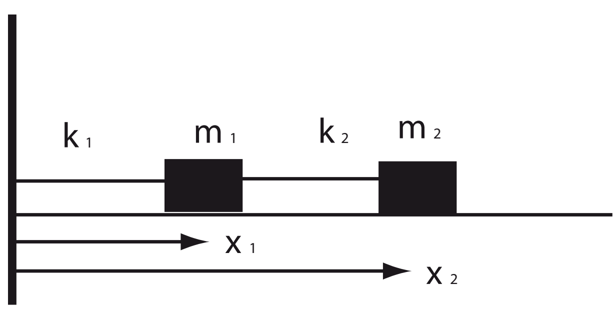

Figura 1:

Solución:
Según la ley de Hooke, tenemos

$$\begin{aligned} m_1 \frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_1}{\mathrm{d}\, t^2} &= -k_1 x_1 + k_2\,(x_2 - x_1) \\ m_2 \frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^2} &= -k_2\,(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

que en nuestro caso

$$2\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_1}{\mathrm{d}\, t^2} = -4x_1 + 2\left(x_2 - x_1\right)$$

$$1\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^2} = -2\left(x_2 - x_1\right)$$

Las condiciones iniciales, en el tiempo $t = 0$, son:

$$\begin{array}{lrcl} \text{desplazamiento inicial}: & x_1(0) & = & x_2(0) = \frac{1}{2} \\ \text{reposo inicial}: & x_1^{(1}(0) & = & x_2^{(1}(0) = 0 \end{array}$$

Operando en el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_1}{\mathrm{d}\, t^2} & = & -4x_1 + 2\left(x_2 - x_1\right) \\ \frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^2} & = & -2\left(x_2 - x_1\right) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_1}{\mathrm{d}\, t^2} & = & -6x_1 + 2x_2 \\ \frac{\mathrm{d}^{(4}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^4} & = & -2\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^2} + 2\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_1}{\mathrm{d}\, t^2} \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}^{(4}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^4} = -2\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^2} - 6x_1 + 2x_2 \rightarrow \frac{\mathrm{d}^{(4}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^4} = -2\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^2} - 3\left(\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^2} + 2x_2\right) + 2x_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}^{(4}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^4} + 5\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^2} + 4x_2 = 0$$

A este resultado podemos llegar a través de

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_1}{\mathrm{d}\, t^2} & = & -4x_1 + 2\left(x_2 - x_1\right) \\ \frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^2} & = & -2\left(x_2 - x_1\right) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_1}{\mathrm{d}\, t^2} + 6x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + \frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^2} + 2x_2 = 0 \end{array}\right.$$

que usando el operador D podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 2D^2 + 6 & -2 \\ -2 & D^2 + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

que nos lleva a

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2D^2 + 6 & -2 \\ -2 & D^2 + 2 \end{vmatrix} (x) = 0 \\ \begin{vmatrix} 2D^2 + 6 & -2 \\ -2 & D^2 + 2 \end{vmatrix} (y) = 0 \end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}^{(4}\, x_1}{\mathrm{d}\, t^4} + 5\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_1}{\mathrm{d}\, t^2} + 4x_1 = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^{(4}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^4} + 5\frac{\mathrm{d}^{(2}\, x_2}{\mathrm{d}\, t^2} + 4x_2 = 0 \end{array}\right.$$

resolviendo la ecuación homogénea obtenida, la ecaucación caraacterística es

$$r^4 + 5r^2 + 4 = 0 \rightarrow r^2 = \left\{\begin{array}{c} -1 \\ -4 \end{array}\right. \rightarrow r = \left\{\begin{array}{c} \pm\mathbf{i} \\ \pm 2\mathbf{i} \end{array}\right.$$

luego la solución es

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = A_1 \cos t + B_1 \operatorname{sen} t + C_1 \cos 2t + D_1 \operatorname{sen} 2t \\ x_2 = A_2 \cos t + B_2 \operatorname{sen} t + C_2 \cos 2t + D_2 \operatorname{sen} 2t \end{array}\right.$$

Para determinar las 8 constantes tenemos las condiciones iniciales, (cuatro condiciones)

$$\begin{array}{lrcl} \text{desplazamiento inicial}: & x_1(0) & = & x_2(0) = \dfrac{1}{2} \\ \text{reposo inicial}: & x_1^{(1}(0) & = & x_2^{(1}(0) = 0 \end{array}$$

que entrando en el sitema con estos valores, (obtenemos otras sos condiciones)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\dfrac{\mathrm{d}^{(2}x_1}{\mathrm{d}\,t^2} & = & -4x_1 + 2(x_2 - x_1) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^{(2}x_2}{\mathrm{d}\,t^2} & = & -2(x_2 - x_1) \end{array}\right. \underset{t=0}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 2\dfrac{\mathrm{d}^{(2}x_1(0)}{\mathrm{d}\,t^2} & = & -4x_1(0) + 2(x_2(0) - x_1(0)) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^{(2}x_2(0)}{\mathrm{d}\,t^2} & = & -2(x_2(0) - x_1(0)) \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2\dfrac{\mathrm{d}^{(2}x_1(0)}{\mathrm{d}\,t^2} & = & -2 \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}^{(2}x_2(0)}{\mathrm{d}\,t^2} & = & 0 \end{array}\right.$$

derivando el sistema y entrando con los valores obtenidos, (obtenemos otras dos condiciones)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\dfrac{\mathrm{d}^{(2}x_1}{\mathrm{d}\,t^2} & = & -4x_1 + 2(x_2 - x_1) \\ \\ 1\dfrac{\mathrm{d}^{(2}x_2}{\mathrm{d}\,t^2} & = & -2(x_2 - x_1) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2\dfrac{\mathrm{d}^{(3}x_1}{\mathrm{d}\,t^3} & = & -4\dfrac{\mathrm{d}\,x_1}{\mathrm{d}\,t} + 2\left(\dfrac{\mathrm{d}\,x_2}{\mathrm{d}\,t} - \dfrac{\mathrm{d}\,x_1}{\mathrm{d}\,t}\right) \\ \\ 1\dfrac{\mathrm{d}^{(3}x_2}{\mathrm{d}\,t^3} & = & -2\left(\dfrac{\mathrm{d}\,x_2}{\mathrm{d}\,t} - \dfrac{\mathrm{d}\,x_1}{\mathrm{d}\,t}\right) \end{array}\right.$$

$$\underset{t=0}{\longrightarrow} \quad \frac{\mathrm{d}^{(3}x_1(0)}{\mathrm{d}\,t^3} = \frac{\mathrm{d}^{(3}x_2(0)}{\mathrm{d}\,t^3} = 0$$

Entrando con es tos valores en el resultado obtenido

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1(0) = A_1 + C_1 & \dfrac{1}{2} = A_1 + C_1 \\ \\ x_2(0) = A_2 + C_2 & \dfrac{1}{2} = A_2 + C_2 \end{array}\right.$$

De la derivada primera obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(1} = -A_1 \operatorname{sen} t + B_1 \cos t - 2C_1 \operatorname{sen} 2t + 2D_1 \cos 2t \\ \\ x_2^{(1} = -A_2 \operatorname{sen} t + B_2 \cos t - 2C_2 \operatorname{sen} 2t + 2D_2 \cos 2t \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1^{(1}(0) = B_1 + 2D_1 & : & 0 = B_1 + 2D_1 \\ \\ x_2^{(1}(0) = B_2 + 2D_2 & : & 0 = B_2 + 2D_2 \end{array}\right.$$

De la derivada segunda obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(2} = -A_1 \cos t - B_1 \operatorname{sen} t - 4C_1 \cos 2t - 4D_1 \operatorname{sen} 2t \\ \\ x_2^{(2} = -A_2 \cos t - B_2 \operatorname{sen} t - 4C_2 \cos 2t - 4D_2 \operatorname{sen} 2t \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x_1^{(2}(0) = -A_1 - 4D_1 & : & -1 = A_1 - 4C_1 \\ \\ x_2^{(2}(0) = -A_2 - 4C_2 & : & 0 = -A_2 - 4C_2 \end{array}\right.$$

De la derivada tercera obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(3} = A_1 \operatorname{sen} t - B_1 \cos t + 8C_1 \operatorname{sen} 2t - 8D_1 \cos 2t \\ \\ x_2^{(3} = A_2 \operatorname{sen} t - B_2 \cos t + 8C_2 \operatorname{sen} 2t - 8D_2 \cos 2t \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x_1^{(3}(0) = -B_1 - 8D_1 \quad : \quad 0 = -B_1 - 8D_1 \\ \\ x_2^{(3}(0) = -B_2 - 8D_2 \quad : \quad 0 = -B_2 - 8D_2 \end{array}\right.$$

resumiendo

$$\begin{array}{lclclcl} 1 = 2A_1 + 2C_1 & ; & 0 = B_1 + 2D_1 & ; & -1 = A_1 - 4C_1 & ; & 0 = -B_1 - 8D_1 \\ 1 = 2A_2 + 2C_2 & ; & 0 = B_2 + 2D_2 & ; & 0 = A_2 - 4C_2 & ; & 0 = -B_2 - 8D_2 \end{array}$$

obteniéndose

$$B_1 = B_2 = D_1 = D_2 = 0$$

y

$$\left\{\begin{array}{l} 2A_1 + 2C_1 = 1 \\ A_1 + 4C_1 = 1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2A_1 + 2C_1 = 1 \\ 2A_1 + 8C_1 = 2 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{1}{6} \\ \\ A_1 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

asimismo

$$\left\{\begin{array}{l} 2A_2 + 2C_2 = 1 \\ A_2 + 4C_2 = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2A_2 + 2C_2 = 1 \\ 2A_2 + 8C_2 = 0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_2 = -\dfrac{1}{6} \\ \\ A_2 = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

resultando finalmente

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{6}\left[2\cos t + \cos 2t\right] \\ \\ x_2 = \dfrac{1}{6}\left[4\cos t - \cos 2t\right] \end{array}\right.$$

■