SOLUCIONES
Hoja 2 de Problemas

1.- Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $(12x + 5y - 9)\,dx + (5x + 2y - 3)\,dy = 0$.

(b) $y' = -\dfrac{y}{x + y^3}$.

(c) $(e^x \operatorname{sen} y + \tan y)\,dx + \left(e^x \cos y + x \sec^2 y\right)dy = 0$.

(d) $x^2 y' = xy + 3\left(x^2 + y^2\right)\arctan\dfrac{y}{x}$.

Apartado a: $(12x + 5y - 9)\,\mathrm{d}\,x + (5x + 2y - 3)\,\mathrm{d}\,y = 0$.
Solución:
Una forma de hacerlo es observar que es una diferencial exacta, ya que

$$\frac{\partial\,(12x + 5y - 9)}{\partial y} = 5; \qquad \frac{\partial\,(5x + 2y - 3)}{\partial x} = 5$$

La función potencial la podemos determinar del modo siguiente

$$\begin{aligned}
U(x,\, y) = & \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} (12x + 5y - 9)\,\mathrm{d}\,x + (5x + 2y - 3)\,\mathrm{d}\,y + \\
& + \int_{x,\, y_0}^{x,\, y} (12x + 5y - 9)\,\mathrm{d}\,x + (5x + 2y - 3)\,\mathrm{d}\,y = \\
= & \; 6x^2 + 5xy - 9x\Big|_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} + 5xy + y^2 - 3y\Big|_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} = \\
= & \; 6x^2 + 5xy_0 - 9x - 6x_0^2 - 5x_0y_0 - 9x_0 + 5xy + y^2 - 3y - 5xy_0 - y_0^2 - 3y_0 = \\
= & \; 6x^2 + 5xy + y^2 - 3y - 9x - 6x_0^2 - 5x_0y_0 - 9x_0 - y_0^2 - 3y_0
\end{aligned}$$

Luego la solución es

$$6x^2 + 5xy + y^2 - 3y - 9x = C$$

Observación: Al resolver la primera primitiva, si el resultado es función de x e y_0, se va a simplificar, además:
el segundo sumando de la primera primitiva es nulo, $y = y_0 \to \mathrm{d}\,y = 0$,
el primer sumando de la segunda primitiva es nulo, $x = x \to \mathrm{d}\,x = 0$, podíamos haber escrito

$$\begin{aligned}
U(x,\, y) = & \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} (12x + 5y - 9)\,\mathrm{d}\,x + (5x + 2y - 3)\,\mathrm{d}\,y + \\
& + \int_{x,\, y_0}^{x,\, y} (12x + 5y - 9)\,\mathrm{d}\,x + (5x + 2y - 3)\,\mathrm{d}\,y = \\
= & \int (12x - 9)\,\mathrm{d}\,x + \int (5x + 2y - 3)\,\mathrm{d}\,y = \\
= & \; 6x^2 - 9x + 5xy + y^2 - 3y + k
\end{aligned}$$

Otra forma de abordar este ejercicio es la siguiente: podemos escribir, si $5x+2y-3\neq 0$,

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\equiv y^{(1}=-\frac{12x+5y-9}{5x+2y-3}$$

Si no existieran ni el "-9", del numerador, ni el "-3", del denominador, sería una ecuación homogénea. Para hacer desaparecer esos números hallamos la intersección de las rectas: $12x+5y-9=0$ y $5x+2y-3=0$:

$$\left\{\begin{array}{r} 12x+5y-9=0 \\ 5x+2y-3=0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} 24x+10y-18=0 \\ 25x+10y-15=0 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} x= & -3 \\ y= & 9 \end{array}$$

Si trasladamos el origen al punto $(-3,\,9)$

$$\left\{\begin{array}{l} u=x+3 \\ v=y-9 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \mathrm{d}\,u=\mathrm{d}\,x \\ \mathrm{d}\,v=\mathrm{d}\,y \end{array} \quad \rightarrow \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,u}=-\frac{12\,(u-3)+5\,(v+9)-9}{5\,(u-3)+2\,(v+9)-3}=-\frac{12u+5v}{5u+2v}$$

La expresión obtenida

$$v^{(1}=g\,(u,\,v)\,; \qquad g\,(\lambda u,\,\lambda v)=-\frac{12\lambda u+5\lambda v}{5\lambda u+2\lambda v}=-\frac{12u+5v}{5u+2v}=\lambda^0 g\,(u,\,v)$$

es homogénea de primer orden, por lo que

$$v^{(1}=-\frac{12u+5v}{5u+2v}=-\frac{12+5\frac{v}{u}}{5+2\frac{v}{u}}$$

Hacemos un nuevo cambio

$$\frac{v}{u}=z\rightarrow v=zu\rightarrow v^{(1}=uz^{(1}+z$$

por lo tanto

$$v^{(1}=-\frac{12+5\frac{v}{u}}{5+2\frac{v}{u}}\rightarrow uz^{(1}+z=-\frac{12+5z}{5+2z}\rightarrow uz^{(1}=\left[-\frac{12+5z}{5+2z}-z\right]$$

$$uz^{(1}=-\frac{2z^2+10z+12}{5+2z} \qquad \rightarrow \qquad \frac{5+2z}{2z^2+10z+12}\,\mathrm{d}\,z=-\frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u$$

luego

$$\int\frac{5+2z}{z^2+5z+6}\,\mathrm{d}\,z=-2\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u\rightarrow\int\left[\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z+3}\right]\mathrm{d}\,z=-2\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad \log|z+2|+\log|z+3|=-2\log|u|+\log C\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad \log|(z+2)\,(z+3)|=\log\left|\frac{C}{u^2}\right|$$

Deshaciendo los cambios

$$\log|(z+2)\,(z+3)|=\log\left|\frac{C}{u^2}\right|\rightarrow\log\left|\frac{(v+2u)\,(v+3u)}{u^2}\right|=\log\left|\frac{C}{u^2}\right|$$

$$(v+2u)\,(v+3u)=C\rightarrow(y-9+2x+6)\,(y-9+3x+9)=C\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad (y+2x-3)\,(y+3x)=C$$

$\blacksquare$

Apartado b: $y^{(1} = -\dfrac{y}{x+y^3}$.
Solución:

$$y^{(1} = -\frac{y}{x+y^3} \to \left(x+y^3\right) \mathrm{d}\, y + y \,\mathrm{d}\, x = 0$$

Como es

$$\frac{\partial\left(x+y^3\right)}{\partial x} = 1; \qquad \frac{\partial y}{\partial y} = 1$$

se cumple la igualdad de las derivadas cruzadas, luego es una diferencial exacta. Calculemos la función potencial

$$\begin{aligned} U(x,\, y) = & \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} y \,\mathrm{d}\, x + \left(x+y^3\right) \mathrm{d}\, y + \int_{x,\, y_0}^{x,\, y} y \,\mathrm{d}\, x + \left(x+y^3\right) \mathrm{d}\, y = \\ = & \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} y \,\mathrm{d}\, x + \int_{x,\, y_0}^{x,\, y} \left(x+y^3\right) \mathrm{d}\, y = \\ = & \left. yx\right|_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} + xy + \left.\frac{y^4}{4}\right|_{x,\, y_0}^{x,\, y} = y_0 x - y_0 x_0 + yx + \frac{y^4}{4} - y_0 x - \frac{y_0^4}{4} \end{aligned}$$

luego la solución es

$$xy + \frac{y^4}{4} = k \to y^4 + 4xy = C$$

Observación: La misma que en el apartado anterior

$$\begin{aligned} U(x,\, y) = & \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} y \,\mathrm{d}\, x + \left(x+y^3\right) \mathrm{d}\, y + \int_{x,\, y_0}^{x,\, y} y \,\mathrm{d}\, x + \left(x+y^3\right) \mathrm{d}\, y = \\ = & \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} y \,\mathrm{d}\, x + \int_{x,\, y_0}^{x,\, y} \left(x+y^3\right) \mathrm{d}\, y = \\ = & \int \left(x+y^3\right) \mathrm{d}\, y = yx + \frac{y^4}{4} + C \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Apartado c: $\left(e^x \operatorname{sen} y + \tan y\right) \mathrm{d}\, x + \left(e^x \cos y + x \sec^2 y\right) \mathrm{d}\, y = 0$.
Solución:

$$\left(e^x \operatorname{sen} y + \tan y\right) \mathrm{d}\, x + \left(e^x \cos y + x \sec^2 y\right) \mathrm{d}\, y = 0$$

Como es

$$\frac{\partial\left(e^x \cos y + x \sec^2 y\right)}{\partial x} = e^x \cos y + \sec^2 y; \qquad \frac{\partial\left(e^x \operatorname{sen} y + \tan y\right)}{\partial y} = e^x \cos y + \sec^2 y$$

se cumple la igualdad de las derivadas cruzadas, luego es una diferencial exacta. Calculemos la función potencial

$$
\begin{aligned}
U(x,\,y) = &\int_{x_0,\,y_0}^{x,\,y_0} \left(e^x \operatorname{sen} y + \operatorname{tg} y\right) \mathrm{d}\,x + \left(e^x \cos y + x \sec^2 y\right) \mathrm{d}\,y + \\
&+ \int_{x,\,y_0}^{x,\,y} \left(e^x \operatorname{sen} y + \operatorname{tg} y\right) \mathrm{d}\,x + \left(e^x \cos y + x \sec^2 y\right) \mathrm{d}\,y = \\
= \quad & e^x \operatorname{sen} y + x \operatorname{tg} y \Big|_{x_0,\,y_0}^{x,\,y_0} + e^x \operatorname{sen} y + x \operatorname{tg} y \Big|_{x,\,y_0}^{x,\,y} = e^x \operatorname{sen} y + x \operatorname{tg} y - k
\end{aligned}
$$

luego la solución es

$$
e^x \operatorname{sen} y + x \operatorname{tg} y = k
$$

Observación: Con las mismas consideraciones que en los apartados anteriores

$$
\begin{aligned}
U(x,\,y) = &\int_{x_0,\,y_0}^{x,\,y_0} \left(e^x \operatorname{sen} y + \operatorname{tg} y\right) \mathrm{d}\,x + \left(e^x \cos y + x \sec^2 y\right) \mathrm{d}\,y + \\
&+ \int_{x,\,y_0}^{x,\,y} \left(e^x \operatorname{sen} y + \operatorname{tg} y\right) \mathrm{d}\,x + \left(e^x \cos y + x \sec^2 y\right) \mathrm{d}\,y = \\
&= \int \left(e^x \cos y + x \sec^2 y\right) \mathrm{d}\,y = e^x \operatorname{sen} y + x \operatorname{tg} y + C
\end{aligned}
$$

∎

Apartado d: $x^2 y^{(1} = xy + 3\left(x^2 + y^2\right) \arctan \dfrac{y}{x}$.
Solución:

$$
x^2 y^{(1} = xy + 3\left(x^2 + y^2\right) \arctan \frac{y}{x}
$$

$x = 0$ no es solución, dividiendo por x^2

$$
y^{(1} = \frac{y}{x} + 3\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \arctan \frac{y}{x}
$$

Homogénea, hagamos el cambio

$$
u = \frac{y}{x} \to x u^{(1} + u = y^{(1}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
& y^{(1} = \frac{y}{x} + 3\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \arctan \frac{y}{x} \to x u^{(1} + u = u + 3\left(1 + u^2\right) \arctan u \to \\
\to \quad & \frac{\mathrm{d}\,u}{(1+u^2) \arctan u} = \frac{3}{x} \mathrm{d}\,x \to \int \frac{\mathrm{d}\,u}{(1+u^2) \arctan u} = \int \frac{3}{x} \mathrm{d}\,x \to \\
\to \quad & \log |\arctan u| = \log \left|x^3\right| + \log |C| \to \\
\to \quad & |\arctan u| = \left|C x^3\right| \to \left|\arctan \frac{y}{x}\right| = \left|C x^3\right|
\end{aligned}
$$

∎

2.- Resolver los siguientes problemas:

(a) $y' = e^{x-y}$, $y(0) = \log 2$.

(b) $(y')^2 = 9y^4$, $y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, $y \in C\left(\left[\dfrac{1}{3}, \infty\right)\right)$.

(c) $y' = \dfrac{xy + y}{x - 1}$, $y(0) = 2$.

Apartado a:
Solución:

$$y^{(1} = e^{x-y} \to e^y y^{(1} = e^x \to e^y \,\mathrm{d}\, y = e^x \,\mathrm{d}\, x \to e^y = e^x + C$$

Tomando logaritmos

$$y = \log\left(e^x + C\right)$$

Con la condición

$$y(0) = \log 2 \to \log 2 = \log\left(e^0 + C\right) \to C = 1$$

luego la solución es

$$e^y = e^x + 1 \to y = \log\left(e^x + 1\right)$$

■

Apartado b:
Solución:

$$\left(y^{(1}\right)^2 = 9y^4 \to y^{(1} = \pm 3y^2 \to \frac{y^{(1}}{y^2} = \pm 3 \to \frac{\mathrm{d}\, y}{y^2} = \pm 3 \,\mathrm{d}\, x \to -\frac{1}{y} = \pm 3x + C \to y = \frac{1}{C_1 \pm 3x}$$

Con la condición

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} = \frac{1}{C_1 \pm 3\frac{1}{3}} \to 2 = C_1 \pm 1 \to \begin{cases} 2 = C_1 + 1 & \to \quad C_1 = 1 \\ 2 = C_1 - 1 & \to \quad C_1 = 3 \end{cases}$$

las posibles soluciones son

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 3x} \in C\left[\dfrac{1}{3}, \infty\right) \\[2ex] \dfrac{1}{3 - 3x} \notin C\left[\dfrac{1}{3}, \infty\right) \end{cases}$$

por lo que la solución buscada es

$$y(x) = \frac{1}{1 + 3x}$$

■

Apartado c:
Solución:

$$y^{(1} = \frac{xy + y}{x - 1} \to \frac{y^{(1}}{y} = \frac{x + 1}{x - 1} \to \frac{\mathrm{d}\, y}{y} = \frac{x + 1}{x - 1} \,\mathrm{d}\, x \to \frac{\mathrm{d}\, y}{y} = \left[1 + \frac{2}{x - 1}\right] \mathrm{d}\, x \to$$

$$\to \quad \log|y| = x + 2\log|x - 1| + C \to |y| = e^{x + 2\log|x-1| + C} \to |y| = e^C e^x (x - 1)^2$$

Con la condición
$$y\left(0\right)=2\rightarrow 2=e^{C}e^{0}\left(0-1\right)^{2}\rightarrow 2=e^{C}$$
por lo que la solución buscada es
$$y=2e^{x}\left(x-1\right)^{2}$$

■

3.- Sea la ecuación:
$$f\left(y\right)dx-\left(2xy+y^{2}\right)dy=0$$

(a) Determinar para qué funciones $f\left(y\right)$ es exacta y resolverla para esas funciones.

(b) Calcular un factor integrante de la forma $\mu=\mu\left(y\right)$ para cada f.

(c) Resolver la ecuación si $f\left(y\right)=y$.

Apartado a:
Solución:
$$f\left(y\right)\mathrm{d}\,x-\left(2xy+y^{2}\right)\mathrm{d}\,y=0$$
Ha de ser
$$\frac{\partial f\left(y\right)}{\partial y}=f^{(1}\left(y\right)=\frac{\partial-\left(2xy+y^{2}\right)}{\partial x}=-2y\rightarrow f^{(1}\left(y\right)=-2y\rightarrow f\left(y\right)=-y^{2}+C$$
La función potencial es
$$\begin{aligned}U\left(x,\,y\right)=&\int_{x_0,\,y_0}^{x,\,y_0}\left(-y^{2}+C\right)\mathrm{d}\,x-\left(2xy+y^{2}\right)\mathrm{d}\,y+\\&+\int_{x,\,y_0}^{x,\,y}\left(-y^{2}+C\right)\mathrm{d}\,x-\left(2xy+y^{2}\right)\mathrm{d}\,y=\\=&\left(-xy^{2}+Cx\right)\Big|_{x_0,\,y_0}^{x,\,y_0}-\left(xy^{2}+\frac{y^{3}}{3}\right)\Bigg|_{x,\,y_0}^{x,\,y}=-xy^{2}-\frac{y^{3}}{3}+Cx-k\end{aligned}$$
La solución es
$$Cx-\frac{y^{3}}{3}-xy^{2}=K$$

■

Apartado b:
Solución:
Si el factor integrante es de la forma $\mu=\mu\left(y\right)$
$$\mu\left(y\right)f\left(y\right)\mathrm{d}\,x-\mu\left(y\right)\left(2xy+y^{2}\right)\mathrm{d}\,y=0$$
Ha de ser
$$\frac{\partial\left[\mu\left(y\right)f\left(y\right)\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left[-\mu\left(y\right)\left(2xy+y^{2}\right)\right]}{\partial x}$$
$$\mu^{(1}\left(y\right)f\left(y\right)+\mu\left(y\right)f^{(1}\left(y\right)=-\mu\left(y\right)2y\rightarrow\mu^{(1}\left(y\right)f\left(y\right)=-\mu\left(y\right)\left[f^{(1}\left(y\right)+2y\right]$$

es decir

$$\frac{\mu^{(1}(y)}{\mu(y)} = -\frac{f^{(1}(y)+2y}{f(y)} \rightarrow \log|\mu(y)| = -\log|f(y)| - 2\int \frac{y}{f(y)}\,\mathrm{d}\,y$$

$$\log|\mu(y)| = -\log|f(y)| + \log e^{-2\int \frac{y}{f(y)}\,\mathrm{d}\,y} = \log \frac{e^{-2\int \frac{y}{f(y)}\,\mathrm{d}\,y}}{f(y)}$$

$$\mu(y) = \frac{e^{-2\int \frac{y}{f(y)}\,\mathrm{d}\,y}}{f(y)}$$

∎

Apartado c:
Solución:
Si $f(y) = y$, el factor integrante en este caso es

$$\mu(y) = \frac{e^{-2\int \frac{y}{y}\,\mathrm{d}\,y}}{y} = \frac{e^{-2y}}{y}$$

y la ecuación a resolver es

$$\mu(y) f(y)\,\mathrm{d}\,x - \mu(y)\left(2xy + y^2\right)\mathrm{d}\,y = 0 \rightarrow \frac{e^{-2y}}{y} y\,\mathrm{d}\,x - \frac{e^{-2y}}{y}\left(2xy + y^2\right)\mathrm{d}\,y = 0$$

es decir

$$e^{-2y}\,\mathrm{d}\,x - e^{-2y}(2x+y)\,\mathrm{d}\,y = 0$$

La función potencial es

$$U(x,\, y) = \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} e^{-2y}\,\mathrm{d}\,x - e^{-2y}(2x+y)\,\mathrm{d}\,y + \int_{x,\, y_0}^{x,\, y} e^{-2y}\,\mathrm{d}\,x - e^{-2y}(2x+y)\,\mathrm{d}\,y$$

resolviendo las primitivas

$$U(x,\, y) = \left. xe^{-2y}\right|_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} - \left.\frac{-e^{-2y}}{4}(1+2y)\right|_{x,\, y_0}^{x,\, y} = \frac{e^{-2y}}{4}[1+4x+2y] - K$$

La solución final es

$$\frac{e^{-2y}}{4}[1+4x+2y] = K$$

∎

4.- Resolver las siguientes ecuaciones encontrando un factor integrante que dependa de una sola variable.

(*a*) $\left(4x + 3y^3\right) dx + 3xy^2 dy = 0.$

(*b*) $\left(4xy^2 + y\right)\mathrm{d}\,x + \left(6y^3 - x\right) dy = 0.$

(*c*) $2xdx - x^2 \cot y dy = 0.$

(d) $(2x+y)\,dx+\left(x^2+xy+x\right)dy=0.$

Resumen teórico: En un caso general supongamos que el factor integrante, μ, depende de una función, g, que a su vez lo es de x e y, tenemos

$$P\left(x,\,y\right)\mathrm{d}\,x+Q\left(x,\,y\right)\mathrm{d}\,y=0,\qquad \mu=\mu\left(g\left(x,\,y\right)\right)$$

Suponemos que se cumple la igualdad de las derivadas cruzadas de

$$\mu\left(g\right)P\left(x,\,y\right)\mathrm{d}\,x+\mu\left(g\right)Q\left(x,\,y\right)\mathrm{d}\,y=0$$

resultando

$$\frac{\partial\left[\mu\left(g\right)P\left(x,\,y\right)\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left[\mu\left(g\right)Q\left(x,\,y\right)\right]}{\partial x}$$

operando

$$\mu^{(1}\left(g\right)g_yP+\mu\left(g\right)P_y=\mu^{(1}\left(g\right)g_xQ+\mu\left(g\right)Q_x\rightarrow\frac{\mu^{(1}\left(g\right)}{\mu\left(g\right)}=\frac{Q_x-P_y}{g_yP-g_xQ}$$

Apartado a: $\left(4x+3y^3\right)\mathrm{d}\,x+3xy^2\,\mathrm{d}\,y=0.$
Solución:
En este caso la consideración general nos lleva a

$$\frac{\mu^{(1}\left(g\right)}{\mu\left(g\right)}=\frac{Q_x-P_y}{g_yP-g_xQ}\rightarrow\frac{\mu^{(1}\left(g\right)}{\mu\left(g\right)}=\frac{3y^2-9y^2}{g_y\left(4x+3y^2\right)-g_x3xy^2}=-\frac{6y^2}{g_y\left(4x+3y^2\right)-g_x3xy^2}$$

si g depende solamente de x,

$$\frac{\mu^{(1}\left(g\right)}{\mu\left(g\right)}=-\frac{6y^2}{-g_x3xy^2}=\frac{6y^2}{g_x3xy^2}=\frac{2}{xg_x}$$

si hacemos $g\equiv x$

$$\frac{\mu^{(1}\left(x\right)}{\mu\left(x\right)}=\frac{2}{x}\rightarrow\log\left|\mu\left(x\right)\right|=2\log\left|x\right|\rightarrow\mu=x^2$$

por lo tanto la ecuación a resolver, que obviamente es una diferencial exacta, es

$$x^2\left(4x+3y^2\right)\mathrm{d}\,x+3x^3y^2\,\mathrm{d}\,y=0$$

luego la función potencial es

$$U\left(x,\,y\right)=\int_{x_0,\,y_0}^{x,\,y_0}x^2\left(4x+3y^2\right)\mathrm{d}\,x+\int_{x,\,y_0}^{x,\,y}3x^3y^2\,\mathrm{d}\,y=x^4+x^3y^3-k$$

luego la solución es

$$x^3\left(x+y^3\right)=k$$

∎

Apartado b: $\left(4xy^2+y\right)\mathrm{d}\,x+\left(6y^3-x\right)\mathrm{d}\,y=0.$
Solución:
En este caso la consideración general nos lleva a

$$\begin{aligned}\frac{\mu^{(1}(g)}{\mu(g)} &= \frac{Q_x-P_y}{g_yP-g_xQ}=\frac{-1-1-8xy}{g_y\left(4xy^2+y\right)-g_x\left(6y^3-x\right)}=\frac{-2-8xy}{g_y\left(4xy^2+y\right)-g_x\left(6y^3-x\right)}= \\ &= -\frac{2\left(4xy+1\right)}{g_yy\left(4xy+1\right)-g_x\left(6y^3-x\right)}\end{aligned}$$

Si observamos la última fracción, si no tuviésemos el segundo sumando del denominador, podemos simplificar el numerado con uno de los factores que nos quedan en el denominador, lo dicho lo podemos obtener si $g_x=0$, obteniéndose

$$\frac{\mu^{(1}(g)}{\mu(g)}=-\frac{2\left(4xy+1\right)}{g_yy\left(4xy+1\right)}\rightarrow\frac{\mu^{(1}(g)}{\mu(g)}=-\frac{2}{g_yy}$$

Si tomamos como $g=y$

$$\frac{\mu^{(1}(y)}{\mu(y)}=-\frac{2}{g_yy}=-\frac{2}{y}=\!\!\longrightarrow\log|\mu|=-2\log|y|\rightarrow\mu=y^{-2}$$

por lo tanto la ecuación a resolver, que obviamente es una diferencial exacta, es

$$\frac{1}{y^2}\left(4xy^2+y\right)\mathrm{d}\,x+\frac{1}{y^2}\left(6y^3-x\right)\mathrm{d}\,y=0$$

luego la función potencial es

$$U(x,\,y)=\int_{x_0,\,y_0}^{x,\,y_0}\frac{1}{y^2}\left(4xy^2+y\right)\mathrm{d}\,x+\int_{x,\,y_0}^{x,\,y}\frac{1}{y^2}\left(6y^3-x\right)\mathrm{d}\,y=2x^2+3y^2+\frac{x}{y}-k$$

luego la solución es

$$2x^2+3y^2+\frac{x}{y}=k$$

∎

Apartado c: $2x\,\mathrm{d}\,x-x^2\cot y\,\mathrm{d}\,y=0.$
Solución:
En este caso la consideración general nos lleva a

$$\frac{\mu^{(1}(g)}{\mu(g)}=\frac{Q_x-P_y}{g_yP-g_xQ}=\frac{2x\cot y-0}{g_y2x-g_x\left(-x^2\cot y\right)}=\frac{2x\cot y}{g_y2x-g_x\left(-x^2\cot y\right)}$$

Si observamos la última fracción, si no tuviésemos el segundo sumando del denominador, podemos simplificar uno de los factores de numerador con otro de los factores que nos quedan en el denominador, lo dicho lo podemos obtener si $g_x=0$, obteniéndose

$$\frac{\mu^{(1}(g)}{\mu(g)}=\frac{2x\cot y}{g_y2x-g_x\left(-x^2\cot y\right)}\rightarrow\frac{\mu^{(1}(g)}{\mu(g)}=-\frac{2x\cot y}{2xg_y}=-\frac{\cot y}{g_y}$$

Si tomamos como $g=y$

$$\frac{\mu^{(1}(y)}{\mu(y)}=-\frac{\cot y}{g_y}=-\cot y\rightarrow\log|\mu|=-\log|\operatorname{sen}y|\rightarrow\mu=\frac{1}{\operatorname{sen}y}$$

por lo tanto la ecuación a resolver, que obviamente es una diferencial exacta, es

$$\frac{1}{\operatorname{sen} y} 2x \,\mathrm{d}\, x - \frac{1}{\operatorname{sen} y} x^2 \cot y \,\mathrm{d}\, y = 0 \rightarrow \frac{2x}{\operatorname{sen} y} \,\mathrm{d}\, x - x^2 \frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y} \,\mathrm{d}\, y = 0$$

luego la función potencial es

$$U(x,\, y) = \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} \frac{2x}{\operatorname{sen} y} \,\mathrm{d}\, x - \int_{x,\, y_0}^{x,\, y} x^2 \frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y} \,\mathrm{d}\, y = \frac{x^2}{\operatorname{sen} y} - k$$

luego la solución es

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen} y} = k \rightarrow x^2 = k \operatorname{sen} y$$

■

Apartado d: $(2x + y) \,\mathrm{d}\, x + \left(x^2 + xy + x\right) \mathrm{d}\, y = 0.$
Solución:
En este caso la consideración general nos lleva a

$$\frac{\mu^{(1}(g)}{\mu(g)} = \frac{Q_x - P_y}{g_y P - g_x Q} = \frac{2x + y + 1 - 1}{g_y (2x + y) - g_x (x^2 + xy + x)} = \frac{2x + y}{g_y (2x + y) - g_x (x^2 + xy + x)}$$

Si observamos la última fracción, si no tuviésemos el segundo sumando del denominador, podemos simplificar el numerador con uno de los factores que nos quedan en el denominador, lo dicho lo podemos obtener si $g_x = 0$, obteniéndose

$$\frac{\mu^{(1}(g)}{\mu(g)} = \frac{2x + y}{g_y (2x + y) - g_x (x^2 + xy + x)} \rightarrow \frac{\mu^{(1}(g)}{\mu(g)} = \frac{2x + y}{g_y (2x + y)} = \frac{1}{g_y}$$

Si tomamos como $g = y$

$$\frac{\mu^{(1}(y)}{\mu(y)} = \frac{1}{g_y} = 1 \rightarrow \log|\mu| = y \rightarrow \mu = e^y$$

por lo tanto la ecuación a resolver, que obviamente es una diferencial exacta, es

$$e^y (2x + y) \,\mathrm{d}\, x + e^y \left(x^2 + xy + x\right) \mathrm{d}\, y = 0$$

luego la función potencial es

$$U(x,\, y) = \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} e^y (2x + y) \,\mathrm{d}\, x + \int_{x,\, y_0}^{x,\, y} e^y \left(x^2 + xy + x\right) \mathrm{d}\, y$$

De las primitivas a resolver la única que no es inmediata es

$$\int xye^y \,\mathrm{d}\, y = xye^y - x \int e^y \,\mathrm{d}\, y = e^y (xy - x)$$

luego

$$\begin{aligned} U(x,\, y) = & \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} e^y (2x + y) \,\mathrm{d}\, x + \int_{x,\, y_0}^{x,\, y} e^y \left(x^2 + xy + x\right) \mathrm{d}\, y = \\ = & \; e^y \left(x^2 + xy - x + x\right) - k \end{aligned}$$

luego la solución es

$$xe^y (x + y) = k$$

■

5.- Hallar un factor integrante para la ecuación

$$\left(3y^2 - x\right) dx + 2y\left(y^2 - 3x\right) dy = 0,$$

de la forma: $\mu = \mu\left(x + y^2\right)$.

Solución:

Tenemos ahora $\mu = \mu\left(x+y^2\right) \to g = x + y^2$, y según hemos obtenido en el ejercicio anterior

$$\begin{aligned}
\frac{\mu^{(1}(g)}{\mu(g)} &= \frac{Q_x - P_y}{g_y P - g_x Q} \\
\frac{\mu^{(1}(g)}{\mu(g)} &= \frac{-6y - 6y}{2y\left(3y^2 - x\right) - 1 \cdot 2y\left(y^2 - 3x\right)} = \frac{-12y}{2y\left(3y^2 - x - y^2 + 3x\right)} = \\
&= -\frac{6}{2y^2 + 2x} = -\frac{3}{g} \to \\
\log|\mu(g)| &= -3\log|g| \to \mu = g^{-3} \to \\
\mu &= \left(x + y^2\right)^{-3}
\end{aligned}$$

La ecuación a resolver, que obviamente es diferencial exacta,

$$\frac{1}{\left(x+y^2\right)^3}\left(3y^2 - x\right) \mathrm{d}\,x + \frac{1}{\left(x+y^2\right)^3} 2y\left(y^2 - 3x\right) \mathrm{d}\,y = 0,$$

luego la función potencial es

$$\begin{aligned}
U(x,\, y) &= \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} \frac{3y^2 - x}{\left(x+y^2\right)^3} \mathrm{d}\,x + \int_{x,\, y_0}^{x,\, y} \frac{2y\left(y^2 - 3x\right)}{\left(x+y^2\right)^3} \mathrm{d}\,y = \\
&= \int_{x_0,\, y_0}^{x,\, y_0} \frac{3y^2 - x}{\left(x+y^2\right)^3} \mathrm{d}\,x + \int_{x,\, y_0}^{x,\, y} \frac{2y\left(y^2 + x - 4x\right)}{\left(x+y^2\right)^3} \mathrm{d}\,y
\end{aligned}$$

La única primitiva resolver es

$$\begin{aligned}
\int \frac{2y\left(y^2 + x - 4x\right)}{\left(x+y^2\right)^3} \mathrm{d}\,y &= \int \frac{2y}{\left(x+y^2\right)^2} \mathrm{d}\,y - 4x \int \frac{2y}{\left(x+y^2\right)^3} \mathrm{d}\,y = \\
&= -\frac{1}{x+y^2} + \frac{4x}{2} \frac{1}{\left(x+y^2\right)^2} = \frac{2x - x - y^2}{\left(x+y^2\right)^2}
\end{aligned}$$

luego la solución es

$$\frac{x - y^2}{\left(x+y^2\right)^2} = k$$

■

6.- Dada la ecuación diferencial $P(x,t)dx + Q(x,t)dt = 0$, se pide:

a) Hallar la condición que han de cumplir $P(x,t)$ y $Q(x,t)$ para que la ecuación diferencial admita un factor integrante que sea función de $t + x$.

b) Aplicar lo obtenido en el apartado anterior para resolver la ecuación diferencial $(2tx - t^2 - t)dx + (2tx - x^2 - x)dt = 0$.

Apartado a:

Solución: Sea $\mu = h(x+t)$. Si μ es un factor integrante se verifica que:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial t} = \mu\frac{\partial P}{\partial t} + P\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

Por otra parte, si $s = x + t$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{d\mu}{ds}\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{d\mu}{ds}, \ \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{ds}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{d\mu}{ds}.$$

Luego

$$\frac{d\mu}{ds}\left(P - Q\right) = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}\right),$$

de modo que:

$$\frac{d\mu/ds}{\mu} = \frac{\partial Q/\partial x - \partial P/\partial t}{P - Q} \equiv H(s),$$

que es entonces la condición que han de cumplir P y Q para que exista un factor integrante función de $x + t$. Integrando a ambos lados de la ecuación es posible determinar una solución formal del factor integrante:

$$\mu(s) = e^{\int H(s)ds}.$$

$\blacksquare$

Apartado b:

Solución: En la EDO que nos dan tenemos que $P = 2tx - t^2 - t$ y $Q = 2tx - x^2 - x$, por lo que

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 2x - 2t - 1, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2t - 2x - 1,$$

de modo que:

$$\frac{\partial Q/\partial x - \partial P/\partial t}{P - Q} = \frac{2t - 2x - 1 - 2x + 2t + 1}{2tx - t^2 - t - 2tx + x^2 + x} = \frac{2t - 2x - 2x + 2t}{-t^2 - t + x^2 + x} = \frac{4(t - x)}{(x - t)(x + t) + x - t} = \frac{-4}{(x + t) + 1},$$

que es una función de $s = x + t$. Luego el factor integrante vendrá dado por:

$$\mu(s) = e^{\int H(s)ds} = e^{\int \frac{-4\,ds}{s+1}} = e^{-4\log(s+1)} = (s + 1)^{-4}.$$

Llevando este factor integrante a la EDO del problema, la ecuación se convierte en exacta y la solución viene dada por:

$$(x + t + 1)^3 = kxt.$$

$\blacksquare$

7.- Integrar mediante un cambio de variables las ecuaciones del tipo:

(a) $\dfrac{dx}{dt} = f\left(at + x\right).$

(b) $\dfrac{dx}{dt} = f\left(\dfrac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right)$.

(c) $y' = (x+y)^2$, aplicar el apartado "a".

(d) $y' = \dfrac{x+y+4}{x-y-6}$, aplicar el apartado "b".

Apartado b: $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = f\,(at + x)$.
Solución:
Hagamos el cambio $at + x = u \to a + x^{(1} = u^{(1}$, luego

$$u^{(1} - a = f\,(u) \to \frac{u^{(1}}{a + f\,(u)} = 1 \to \frac{\mathrm{d}\,u}{a + f\,(u)} = \mathrm{d}\,t$$

que es de variable separadas.

$\blacksquare$

Apartado b: $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = f\left(\dfrac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right)$.
Solución:
Hallemos el punto de intersección de las rectas

$$\left\{\begin{array}{l} a_1t + b_1x + c_1 = 0 \\ a_2t + b_2x + c_2 = 0 \end{array}\right. \to t_0 = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad x_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad \text{si} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Si hacemos el cambio de variables

$$\left\{\begin{array}{l} u = t - t_0 \\ v = x - x_0 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} a_1\,(u + t_0) + b_1\,(v + x_0) + c_1 \equiv a_1u + b_1v + a_1t_0 + b_1x_0 + c_1 \equiv a_1u + b_1v \\ a_2\,(u + t_0) + b_2\,(v + x_0) + c_2 \equiv a_2u + b_2v + a_2t_0 + b_2x_0 + c_2 \equiv a_2u + b_2v \end{array}\right.$$

luego

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = f\left(\frac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right) \to \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,u} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) \equiv f\left(\frac{a_1 + b_1\dfrac{v}{u}}{a_2 + b_2\dfrac{v}{u}}\right)$$

hemos llegado a una ecuación homogénea

$$v = zu \to \mathrm{d}\,v = u\,\mathrm{d}\,z + z\,\mathrm{d}\,u \to \frac{u\,\mathrm{d}\,z + z\,\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,u} = f\left(\frac{a_1 + b_1z}{a_2 + b_2z}\right) \to \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,u} = \frac{f\left(\dfrac{a_1 + b_1z}{a_2 + b_2z}\right) - z}{u}$$

resultando finalmente una ecuación de variables separadas,

$$\frac{\mathrm{d}\,z}{f\left(\dfrac{a_1 + b_1z}{a_2 + b_2z}\right) - z} = \frac{\mathrm{d}\,u}{u}$$

En el caso $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, las rectas

$$\left\{\begin{array}{l} a_1t + b_1x + c_1 = 0 \\ a_2t + b_2x + c_2 = 0 \end{array}\right. \to \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$$

son paralelas y podemos escribir

$$f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right)=f\left(\frac{\lambda\left(a_2t+b_2x\right)+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right)$$

Hagamos el cambio $v=a_2t+b_2x\rightarrow \mathrm{d}\,v=a_2\,\mathrm{d}\,t+b_2\,\mathrm{d}\,x$, luego

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right)\rightarrow\frac{1}{b_2}\left(\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}-a_2\right)=f\left(\frac{\lambda v+c_1}{v+c_2}\right)\rightarrow\frac{\mathrm{d}\,v}{f\left(\frac{\lambda v+c_1}{v+c_2}\right)+\frac{a_2}{b_2}}=b_2\,\mathrm{d}\,t$$

que es de variables separadas.

$\blacksquare$

Apartado c: $y^{(1}=(x+y)^2$.
Solución:
Hagamos el cambio

$$x+y=u\rightarrow 1+y^{(1}=u^{(1}$$

por lo tanto

$$y^{(1}=(x+y)^2\rightarrow u^{(1}-1=u^2\rightarrow\frac{u^{(1}}{u^2+1}=1\rightarrow\frac{\mathrm{d}\,u}{u^2+1}=\mathrm{d}\,x$$

Integrando

$$\int\frac{\mathrm{d}\,u}{u^2+1}=\int\mathrm{d}\,x\rightarrow\arctan u=x+C\rightarrow\arctan\left(x+y\right)=x+C$$

$\blacksquare$

Apartado d: $y^{(1}=\dfrac{x+y+4}{x-y-6}$.
Solución:
Hallemos la intersección de las rectas

$$\left\{\begin{array}{lcc} x+y+4=0 & 2x-2=0 & x=1\\ x-y-6=0 & 2y+10=0 & y=-5\end{array}\right.$$

Hagamos el cambio

$$\begin{array}{c} x-1=u\\ y+5=v\end{array}\rightarrow y^{(1}=\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,u}=v^{(1}$$

luego

$$y^{(1}=\frac{x+y+4}{x-y-6}\rightarrow v^{(1}=\frac{u+v}{u-v}$$

la ecuación obtenida es homogénea,

$$v^{(1}=\frac{u+v}{u-v}\rightarrow v^{(1}=\frac{1+\frac{v}{u}}{1-\frac{v}{u}}$$

haciendo el cambio $z=\dfrac{v}{u}$, $uz^{(1}+z=v^{(1}$,

$$v^{(1}=\frac{1+\frac{v}{u}}{1-\frac{v}{u}}\rightarrow uz^{(1}+z=\frac{1+z}{1-z}\rightarrow uz^{(1}=\frac{1+z-z+z^2}{1-z}\rightarrow\frac{1-z}{1+z^2}\,\mathrm{d}\,z=\frac{\mathrm{d}\,u}{u}$$

integrando

$$\arctan z - \frac{1}{2}\log\left(1+z^2\right) = \log|u| + C$$

deshaciendo los cambios resulta,

$$\arctan\frac{y+5}{x-1} - \frac{1}{2}\log\left(1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right) = \log|x-1| + C \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 2\arctan\frac{y+5}{x-1} = \log\left[(x-1)^2+(y+5)^2\right] + C$$

■

8.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

(a) $xy' - 3y = x^4$.

(b) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$.

(c) $\left(1+x^2\right)dy + (2xy - \cot x)\,dx = 0$.

(d) $y' + y = 2xe^{-x} + x^2$.

(e) $\left(2y - x^3\right)dx = xdy$.

(f) $\dfrac{dx}{dy} - 2yx = 6ye^{y^2}$.

Apartado a: $xy^{(1} - 3y = x^4$.
Solución:
Tenemos

$$xy^{(1} - 3y = x^4 \quad \underset{x\neq 0}{\rightarrow} \quad y^{(1} - 3\frac{y}{x} = x^3$$

La homogénea es

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} - 3\frac{y}{x} = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}\,y}{y} = 3\frac{\mathrm{d}\,x}{x} \rightarrow \log|y| = 3\log|x| \rightarrow y = x^3$$

Hagamos el cambio

$$y = x^3 v \rightarrow y^{(1} = 3x^2 v + x^3 v^{(1}$$

Sustituyendo en la ecuación de partida

$$xy^{(1} - 3y = x^4 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x\left(3x^2v + x^3v^{(1}\right) - 3x^3v = x^4 \rightarrow x^4v^{(1} = x^4 \rightarrow v = x + C \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad y = x^3(x+C)$$

■

Apartado b: $y^{(1} + y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$.
Solución:
La homogénea es

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + y = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}\,y}{y} = -\,\mathrm{d}\,x \rightarrow \log|y| = -x \rightarrow y = e^{-x}$$

Hagamos el cambio

$$y = e^{-x}v \to y^{(1} = -e^{-x}v + e^{-x}v^{(1}$$

Sustituyendo en la ecuación de partida

$$y^{(1} + y = \frac{1}{1+e^{2x}} \to$$

$$\to \quad -e^{-x}v + e^{-x}v^{(1} + e^{-x}v = \frac{1}{1+e^{2x}} \to v^{(1} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} \to v = \arctan e^x + C \to$$

$$\to \quad y = e^{-x}\left(\arctan e^x + C\right)$$

$\blacksquare$

Apartado c: $\left(1+x^2\right)\mathrm{d}\,y + (2xy - \cot x)\,\mathrm{d}\,x = 0$.
Solución:
Tenemos

$$\left(1+x^2\right)\mathrm{d}\,y + (2xy - \cot x)\,\mathrm{d}\,x = 0 \quad \to \quad y^{(1} + 2\frac{xy}{1+x^2} = \frac{\cot x}{1+x^2}$$

La homogénea es

$$y^{(1} + 2\frac{xy}{1+x^2} = 0 \to \frac{\mathrm{d}\,y}{y} = -\frac{2x\,\mathrm{d}\,x}{1+x^2} \to \log|y| = -\log\left|1+x^2\right| \to y = \frac{1}{1+x^2}$$

Hagamos el cambio

$$y = \frac{v}{1+x^2} \to y^{(1} = -\frac{2xv}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{v^{(1}}{1+x^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de partida

$$\left(1+x^2\right)y^{(1} + (2xy - \cot x) = 0 \to$$

$$\to \quad -\frac{2xv}{1+x^2} + v^{(1} + 2x\frac{v}{1+x^2} = \cot x \to v^{(1} = \cot x \to v = \log|\operatorname{sen} x| + C \to$$

$$\to \quad y = \frac{\log|\operatorname{sen} x| + C}{1+x^2}$$

$\blacksquare$

Apartado d: $y^{(1} + y = 2xe^{-x} + x^2$.
Solución:
La homogénea es

$$y^{(1} + y = 0 \to \frac{\mathrm{d}\,y}{y} = -\,\mathrm{d}\,x \to \log|y| = -x \to y = e^{-x}$$

Hagamos el cambio

$$y = ve^{-x} \to y^{(1} = -ve^{-x} + v^{(1}e^{-x}$$

Sustituyendo en la ecuación de partida

$$\begin{aligned} & y^{(1} + y = 2xe^{-x} + x^2 \rightarrow \\ \rightarrow \quad & -ve^{-x} + v^{(1} e^{-x} + ve^{-x} = 2xe^{-x} + x^2 \rightarrow v^{(1} = 2x + x^2 e^x \rightarrow \\ & v = x^2 + e^x \left[x^2 - 2x + 2\right] + C \rightarrow \\ \rightarrow \quad & y = e^{-x} x^2 + \left[x^2 - 2x + 2\right] + e^{-x} C \end{aligned}$$

■

Apartado e: $\left(2y - x^3\right) \mathrm{d}\, x = x \,\mathrm{d}\, y$.
Solución:
Tenemos

$$\left(2y - x^3\right) \mathrm{d}\, x = x \,\mathrm{d}\, y \quad \underset{x \neq 0}{\rightarrow} \quad y^{(1} - 2\frac{y}{x} = x^2$$

La homogénea es

$$y^{(1} - 2\frac{y}{x} = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}\, y}{y} = 2\frac{\mathrm{d}\, x}{x} \rightarrow \log |y| = 2 \log |x| \rightarrow y = x^2$$

Hagamos el cambio

$$y = x^2 v \rightarrow y^{(1} = 2xv + x^2 v^{(1}$$

Sustituyendo en la ecuación de partida

$$\begin{aligned} & 2x^2 v - x^3 = x \left(2xv + x^2 v^{(1}\right) \rightarrow \\ \rightarrow \quad & v^{(1} = -1 \rightarrow v = -x + C \rightarrow \\ \rightarrow \quad & y = -x^3 + Cx^2 \end{aligned}$$

■

Apartado f: $\dfrac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, y} - 2yx = 6ye^{y^2}$.
Solución:
Dada le estructura del enunciado, x es la variable dependiente e y la independiente. La homogénea es

$$\frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, y} - 2yx = 0 \rightarrow 2y \,\mathrm{d}\, y = \frac{\mathrm{d}\, x}{x} \rightarrow \log |x| = y^2 \rightarrow x = e^{y^2}$$

Hagamos el cambio

$$x = ve^{y^2} \rightarrow y^{(1} = v^{(1} e^{y^2} + ve^{y^2} 2y$$

Sustituyendo en la ecuación de partida

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, y} - 2yx = 6ye^{y^2} \rightarrow \\ \rightarrow \quad & v^{(1} e^{y^2} + ve^{y^2} 2y - 2yve^{y^2} = 6ye^{y^2} \rightarrow v^{(1} = 6y \rightarrow v = 3y^2 + C \rightarrow \\ \rightarrow \quad & x = \left(3y^2 + C\right) e^{y^2} \end{aligned}$$

■

9.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli:

(a) $y' + \dfrac{1}{x}y - x^3y^2 = 0.$

(b) $xy^2y' + y^3 = x\cos x.$

(c) $y' + \dfrac{1}{x}y - y^2 = 0.$

(d) $\left(3y + 3xe^xy^{\frac{2}{3}}\right)dx + xdy = 0.$

Las de Bernouilli son del tipo:

$$y^{(1} = yA(x) + y^nQ(x), \qquad \text{Cambio}: \ z = y^{1-n}$$

Apartado a: $y^{(1} + \dfrac{1}{x}y - x^3y^2 = 0.$
Solución:
Identificando con las de Benouilli, el cambio es

$$z = y^{1-2} \to z = y^{-1} \to z^{(1} = -y^{-2}y^{(1}$$

resultando

$$y^{(1} + \frac{1}{x}y - x^3y^2 = 0 \to -y^2z^{(1} + \frac{1}{x}y - x^3y^2 = 0 \to -z^{(1} + \frac{1}{x}z = x^3$$

que es una cuación lineal, por lo que comenzamos resolviendo la homogénea

$$-z^{(1} + \frac{1}{x}z = 0 \to \frac{\mathrm{d}\,z}{z} = \frac{\mathrm{d}\,x}{x} \to z = x$$

hagamos el cambio

$$z = vx \to z^{(1} = xv^{(1} + v$$

resultando

$$-z^{(1} + \frac{1}{x}z = x^3 \to -xv^{(1} - v + \frac{1}{x}vx = x^3 \to v^{(1} = -x^2 \to$$

$$\to \quad v = -\frac{x^3}{3} + C$$

Deshaciendo los cambios

$$v = \quad -\frac{x^3}{3} + C \to z = x\left(-\frac{x^3}{3} + C\right) \to y = \frac{1}{x\left(-\dfrac{x^3}{3} + C\right)}$$

■

Apartado b: $xy^2y^{(1}+y^3=x\cos x$.
Solución:
La podemos expresar del modo siguiente

$$xy^2y^{(1}+y^3=x\cos x\to y^{(1}+\frac{y^3}{xy^2}=\frac{x\cos x}{xy^2}\to y^{(1}+\frac{1}{x}y=y^{-2}\cos x$$

Identificando con las de Benouilli, el cambio es

$$z=y^{1-(-2)}\to z=y^3\to z^{(1}=3y^2y^{(1}$$

resultando

$$y^{(1}+\frac{1}{x}y=y^{-2}\cos x\to\frac{z^{(1}}{3y^2}+\frac{1}{x}y=y^{-2}\cos x\to z^{(1}+3\frac{1}{x}z=3\cos x$$

que es una cuación lineal, por lo que comenzamos resolviendo la homogénea

$$z^{(1}+3\frac{1}{x}z=0\to\frac{\mathrm{d}\,z}{z}=-3\frac{\mathrm{d}\,x}{x}\to z=x^{-3}$$

hagamos el cambio

$$z=vx^{-3}\to z^{(1}=x^{-3}3v^{(1}-3x^{-4}v$$

resultando

$$z^{(1}+3\frac{1}{x}z=3\cos x\to x^{-3}v^{(1}-3x^{-4}v+3\frac{1}{x}x^{-3}v=3\cos x\to v^{(1}=3x^3\cos x\to$$

$$\to\quad v=3\left[3\left(-2+x^2\right)\cos x+x\left(-6+x^2\right)\operatorname{sen}x\right]+C\to$$

$$\to\quad z=\frac{v}{x^3}=\frac{3\left[3\left(-2+x^2\right)\cos x+x\left(-6+x^2\right)\operatorname{sen}x\right]+C}{x^3}\to$$

$$\to\quad y=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{\frac{3\left[3\left(-2+x^2\right)\cos x+x\left(-6+x^2\right)\operatorname{sen}x\right]+C}{x^3}}$$

∎

Apartado c: $y^{(1}+\frac{1}{x}y-y^2=0$.
Solución:
Identificando con las de Benouilli, el cambio es

$$z=y^{1-2}\to z=y^{-1}\to z^{(1}=-y^{-2}y^{(1}$$

resultando

$$y^{(1}+\frac{1}{x}y=y^2\to-\frac{z^{(1}}{y^{-2}}+\frac{1}{x}y=y^2\to-z^{(1}+\frac{1}{x}z=1$$

que es una cuación lineal, por lo que comenzamos resolviendo la homogénea

$$-z^{(1}+\frac{1}{x}z=0\to\frac{\mathrm{d}\,z}{z}=\frac{\mathrm{d}\,x}{x}\to z=x$$

hagamos el cambio

$$z=vx\to z^{(1}=xv^{(1}+v$$

resultando

$$-z^{(1} + \frac{1}{x}z = 1 \to -xv^{(1} - v + \frac{1}{x}xv = 1 \to v^{(1} = \frac{1}{x} \to$$

$$\begin{aligned}
\to \quad & v = \log x + C \to \\
z = \quad & x\left(\log x + C\right) \to \\
y = \quad & \frac{1}{x\left(\log x + C\right)}
\end{aligned}$$

■

Apartado d: $\left(3y + 3xe^x y^{\frac{2}{3}}\right) \mathrm{d}\, x + x \,\mathrm{d}\, y = 0.$
Solución:
Podemos escribirla del modo siguiente

$$\left(3y + 3xe^x y^{\frac{2}{3}}\right) \mathrm{d}\, x + x \,\mathrm{d}\, y = 0 \to y^{(1} + \frac{3}{x}y = -3e^x y^{\frac{2}{3}}$$

Identificando con las de Benouilli, el cambio es

$$z = y^{1-\frac{2}{3}} \to z = y^{\frac{1}{3}} \to z^{(1} = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y^{(1}$$

resultando

$$y^{(1} + \frac{3}{x}y = -3e^x y^{\frac{2}{3}} \to 3y^{\frac{2}{3}}z^{(1} + \frac{3}{x}y = -3e^x y^{\frac{2}{3}} \to z^{(1} + \frac{1}{x}z = -e^x$$

que es una cuación lineal, por lo que comenzamos resolviendo la homogénea

$$z^{(1} + \frac{1}{x}z = 0 \to \frac{\mathrm{d}\, z}{z} = -\frac{\mathrm{d}\, x}{x} \to z = \frac{1}{x}$$

hagamos el cambio

$$z = \frac{v}{x} \to z^{(1} = \frac{v^{(1}}{x} - \frac{v}{x^2}$$

resultando

$$z^{(1} + \frac{1}{x}z = -e^x \to \frac{v^{(1}}{x} - \frac{v}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{v}{x} = -e^x \to v^{(1} = -xe^x \to$$

$$\begin{aligned}
\to \quad & v = -\left(x-1\right)e^x + C \to \\
z = \quad & -\frac{\left(x-1\right)e^x + C}{x} \to \\
y = \quad & -\left[\frac{\left(x-1\right)e^x + C}{x}\right]^3
\end{aligned}$$

■

10.- Resolver las siguientes ecuaciones de Ricatti, utilizando las soluciones particulares indicadas:

(*a*) $y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2, \quad y_1(x) = x.$

(b) $y' = 14 + 20x + 8x^2 - (10 + 8x)\, y + 2y^2, \quad y_1(x) = ax + b.$

(c) $y' + y^2 = x^{-4}, \quad y_1(x) = \dfrac{ax + b}{x^2}.$

Las de Ricatti son del tipo:

$$y^{(1} = B_0\,(x) + B_1\,(x)\, y + B_2\,(x)\, y^2$$

Apartado a: $y^{(1} + 2xy = 1 + x^2 + y^2, \quad y_1(x) = x.$
Solución:
Hagamos el cambio

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \equiv x + \frac{1}{z} \rightarrow y^{(1} = 1 - \frac{z^{(1}}{z^2}$$

luego

$$y^{(1} + 2xy = 1 + x^2 + y^2 \rightarrow 1 - \frac{z^{(1}}{z^2} + 2x\left(x + \frac{1}{z}\right) = 1 + x^2 + \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 \rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \quad 1 - \frac{z^{(1}}{z^2} + 2x^2 + \frac{2x}{z} = 1 + x^2 + x^2 + \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2} \rightarrow z^{(1} = -1 \rightarrow \\ z = &\quad -x + C \rightarrow \\ y = &\quad x + \frac{1}{C + x} \end{aligned}$$

∎

Apartado b: $y^{(1} = 14 + 20x + 8x^2 - (10 + 8x)\, y + 2y^2, \quad y_1(x) = ax + b.$
Solución:
Determinemos a y b,

$$y_1 = ax + b \rightarrow y_1^{(1} = a$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} & y^{(1} = 14 + 20x + 8x^2 - (10 + 8x)\, y + 2y^2 \rightarrow \\ & y_1^{(1} = 14 + 20x + 8x^2 - (10 + 8x)\, y + 2y_1^2 \rightarrow \\ \rightarrow \quad & a = 14 + 20x + 8x^2 - (10 + 8x)\,(ax + b) + 2\,(ax + b)^2 \rightarrow \\ \rightarrow \quad & 0 = 14 - a - 10b + 2b^2 + x\,(20 - 10a - 8b + 4ab) + x^2\left(8 - 8a + 2a^2\right) \rightarrow \\ \rightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{rl} 8 - 8a + 2a^2 = 0 & \rightarrow a = 2 \\ 20 - 20 - 8b + 8b \equiv 0 & \\ 14 - 2 - 10b + 2b^2 = 0 & \rightarrow b = 3,\ b = 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Eligiendo el valor $b=2$, l cambio a realizar si $y_1 = 2\,(x+1)$ es

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \equiv 2\,(x+1) + \frac{1}{z} \rightarrow y^{(1} = 2 - \frac{z^{(1}}{z^2}$$

luego

$$\begin{aligned}
& y^{(1} = 14 + 20x + 8x^2 - (10+8x)\,y + 2y^2 \rightarrow \\
\rightarrow \quad & 2 - \frac{z^{(1}}{z^2} = 14 + 20x + 8x^2 - (10+8x)\left(2x+2+\frac{1}{z}\right) + 2\left(2x+2+\frac{1}{z}\right)^2 \rightarrow \\
\rightarrow \quad & \frac{z^{(1}}{z^2} = -\frac{10+8x}{z} + 2\frac{2\,(2+2x)}{z} + \frac{2}{z^2} \rightarrow \frac{z^{(1}}{z^2} = -\frac{2}{z} + \frac{2}{z^2} \rightarrow \\
\rightarrow \quad & z^{(1} = -2z + 2
\end{aligned}$$

Resolvemos la homogénea

$$z^{(1} = -2z \rightarrow \frac{z^{(1}}{z} = -2 \rightarrow \frac{\mathrm{d}\,z}{z} = -2\,\mathrm{d}\,x \rightarrow z = e^{-2x}$$

Hagamos ahora el cambio

$$z = ve^{-2x} \rightarrow z^{(1} = v^{(1}\,e^{-2x} - 2ve^{-2x}$$

luego

$$\begin{aligned}
& z^{(1} = -2z + 2 \rightarrow v^{(1}\,e^{-2x} - 2ve^{-2x} = -2ve^{-2x} + 2 \\
\rightarrow \quad & v^{(1} = 2e^{2x} \rightarrow v = e^{2x} + C \rightarrow \\
z = \quad & \left(e^{2x} + C\right) e^{-2x} \rightarrow \\
y = \quad & 2\,(x+1) + \frac{1}{\left(e^{2x} + C\right) e^{-2x}}
\end{aligned}$$

■

Apartado c: $y^{(1} + y^2 = x^{-4}, \quad y_1(x) = \dfrac{ax+b}{x^2}$.

Solución:

Determinemos a y b

$$y_1 = \frac{ax+b}{x^2} \rightarrow y_1^{(1} = -\frac{a}{x^2} - \frac{2b}{x^3}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial de la solución particular

$$y_1^{(1} + y_1^2 = x^{-4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -\frac{a}{x^2} - \frac{2b}{x^3} + \left(\frac{ax+b}{x^2}\right)^2 = \frac{1}{x^4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x^2\left(a^2 - a\right) + x\left(-2b + 2ab\right) + b^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} b^2 - 1 = 0 & \rightarrow b = \pm 1 \\ -2b + 2ab = 0 & \rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Eligiendo el valor $b = -1$, el cambio a realizar, si $y_1 = \dfrac{x-1}{x^2}$, es

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \equiv \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{z} \rightarrow y^{(1} = -\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x^3} - \frac{z^{(1}}{z^2}$$

luego

$$y^{(1} + y^2 = x^{-4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x^3} + \frac{z^{(1}}{z^2} + \left(\frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{x^4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -z^{(1} + z\frac{2(x-1)}{x^2} + 1 = 0$$

Resolvemos la homogénea

$$-z^{(1} + z\frac{2(x-1)}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{z^{(1}}{z} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \rightarrow \frac{\mathrm{d}\,z}{z} = \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}\,x \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \log z = 2\log|x| + \frac{2}{x} \rightarrow \log z = 2\log|x| + \log e^{\frac{2}{x}} \rightarrow z = x^2 e^{\frac{2}{x}}$$

Hagamos ahora el cambio

$$z = vx^2e^{\frac{2}{x}} \rightarrow z^{(1} = v^{(1}x^2e^{\frac{2}{x}} + v\left(2xe^{\frac{2}{x}} + x^2e^{\frac{2}{x}}\frac{-2}{x^2}\right)$$

luego

$$-z^{(1} + z\frac{2(x-1)}{x^2} + 1 = 0 \rightarrow v^{(1}x^2e^{\frac{2}{x}} + v\left(2xe^{\frac{2}{x}} + x^2e^{\frac{2}{x}}\frac{-2}{x^2}\right) = vx^2e^{\frac{2}{x}}\frac{2(x-1)}{x^2} + 1$$

$$\rightarrow \quad v^{(1} = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{2}{x}} \rightarrow v = \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}} + C \rightarrow$$

$$z = \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}} + C\right)x^2e^{\frac{2}{x}} = x^2\left(\frac{1}{2} + Ce^{\frac{2}{x}}\right) \rightarrow$$

$$y = \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{x^2\left(\frac{1}{2} + Ce^{\frac{2}{x}}\right)}$$

∎

11.- Está nevando con regularidad. A las 12h sale una máquina quitanieves que recorre en la primera hora 2km y en la segunda, 1km. ¿A qué hora empezó a nevar?.

Solución:

Tomamos como origen de tiempo las 12 horas, luego empezó a nevar a las "$12-t_0$". La velocidad de la quitanieves será inversamente proporcional a la altura de la nieve, y como está "*nevando con regularidad* ", la velocidad será inversamente proporcional al tiempo transcurrido

$$v=\frac{k}{t+t_0}\rightarrow\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}=\frac{k}{t+t_0}\rightarrow s=k\log\left(t+t_0\right)+C$$

Para $t=0$, (las 12 horas), es $S=0$

$$0=k\log\left(0+t_0\right)+C\rightarrow C=-k\log t_0\rightarrow s=k\log\left(t+t_0\right)-k\log t_0=k\log\frac{t+t_0}{t_0}$$

introduciendo los valores de s, para $t=1$ y $t=2$

$$\begin{array}{lllll} t=1 & \rightarrow & s=2 & \rightarrow & 2=k\log\dfrac{1+t_0}{t_0} \\ t=2 & \rightarrow & s=3 & \rightarrow & 3=k\log\dfrac{2+t_0}{t_0}\end{array}\rightarrow\frac{2}{3}=\frac{\log\dfrac{1+t_0}{t_0}}{\log\dfrac{2+t_0}{t_0}}\rightarrow\left(\frac{1+t_0}{t_0}\right)^3=\left(\frac{2+t_0}{t_0}\right)^2$$

de donde

$$\left(1+t_0\right)^3=t_0\left(2+t_0\right)^2\rightarrow -t_0^2-t_0+1=0\rightarrow t_0=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$$

de las dos raíces es válida la positiva

$$t=0,618\,h=37\,min\ \ 5\,seg$$

■

12.- Una bola de nieve se derrite de tal manera que la razón de cambio de su volumen es proporcional al área de su superficie. El diámetro de la bola de nieve es inicialmente de 4cm y al cabo de 30 minutos su diámetro pasa a ser de 3cm.

(a) ¿Cuándo será su diámetro son 2cm.?

(b) ¿Cuándo desaparecerá la bola de nieve?.

Solución:

El volumen es $V=V\left(t\right)$ y, obviamente, la superficie es $S=S\left(V\right)$.La "pérdida", *variación* de volumen, V, nos dicen que es proporcional a la superfecie

$$\frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,t}=-kS$$

Teniendo en cuenta que

$$\left\{\begin{array}{rl} V= & \dfrac{4}{3}\pi r^3\left(t\right) \\ S= & 4\pi r^2\left(t\right)\end{array}\right.\rightarrow\left\{\begin{array}{rl}\dfrac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,t}= & 4\pi r^2\left(t\right)\dfrac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t} \\ S= & 4\pi r^2\left(t\right)\end{array}\right.$$

teniendo en cuenta como varía el volumen en función de la superfecie

$$\frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,t}=-kS\rightarrow 4\pi r^2\left(t\right)\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}=-k4\pi r^2\left(t\right)\rightarrow\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}=-k\rightarrow r=-kt+r_0$$

Con las condicioens

$$\left\{\begin{array}{llllll} t= & 0 & r=2 & \rightarrow & 2= & r_0 \\ t= & 30 & r=\dfrac{3}{2} & \rightarrow & \dfrac{3}{2}= & -30k+r_0\end{array}\right.\rightarrow r=-\frac{t}{60}+2$$

Si $r=1$ y $r=0$,

$$1=-\frac{t}{60}+2 \quad\rightarrow\quad t=60\,min$$

$$0=-\frac{t}{60}+2 \quad\rightarrow\quad t=120\,min$$

∎

13.- De acuerdo con la ley de Torricelli, el agua escapará de un depósito abierto por un pequeño orificio a una velocidad igual a la que adquiriría al caer libremente desde el nivel del agua hasta el del orificio. Un cuenco hemisférico de radio R está inicialmente lleno de agua, y en el instante t = 0 se le perfora un orificio circular de radio r en el fondo. ¿Cuánto tarda en vaciarse?.

Solución:

Entre los tiempos t y $t+\mathrm{d}\,t$ el volumen que sale, cuando hay una altura y de líquido es

$$v\cdot \mathrm{d}\,t\cdot S :\rightarrow \sqrt{2gy}\cdot \mathrm{d}\,t\cdot \pi r^2$$

es volumen de agua será igual a lo que ha descendido la superficie libre en el depósito

$$\pi\left[\sqrt{R^2-(R-y)^2}\right]^2\mathrm{d}\,y$$

Como ambos valores han de ser iguales

$$\pi r^2\sqrt{2gy}\,\mathrm{d}\,t=-\pi\left[\sqrt{2Ry-y^2}\right]^2\mathrm{d}\,y\rightarrow\frac{\left(2Ry-y^2\right)}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}\,y=-\sqrt{2g}r^2\,\mathrm{d}\,t$$

luego

$$2R\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}=-\sqrt{2g}r^2t+C$$

En el instante inicial

$$\left\{\begin{array}{c} t=0 \\ y=R \end{array}\right. \rightarrow \frac{4}{3}R^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{5}R^{\frac{5}{2}}=C\rightarrow C=\frac{14}{15}R^{\frac{5}{2}}$$

El depósito se ha vaciado cuando $y=0$

$$\left.2R\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right|_{y=0}=-\sqrt{2g}r^2t+\frac{14}{15}R^{\frac{5}{2}}\rightarrow t=\frac{14R^{\frac{5}{2}}}{15r^2\sqrt{2g}}$$

∎

14.- Demostrar que la aproximación que proporciona el método de Euler explícito para determinar la solución del problema $y'=-5y$, $y(0)=1$, utilizando una partición equiespaciada de paso h es

$$y_n=(1-5h)^n\,.$$

Calcular el error absoluto cometido en $t=1$ utilizando $h=0{,}1$.

Solución:

En primer lugar, es muy sencillo obtener la solución analítica del problema: $y(t)=e^{-5t}$.

Por otra parte, el esquema del método de Euler explícito para una partición equiespaciada de paso h es:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n - 5hy_n = y_n\,(1-5h)\,.$$

Es decir, dado que $y_0 = 1$:

$$y_1 = y_0(1-5h) = (1-5h),\ y_2 = y_1(1-5h) = (1-5h)^2,\ ...$$

de modo que utilizando el principio de inducción $y_n = y_{n-1}\,(1-5h) = (1-5h)^n$, que es la expresión que queríamos demostrar.

El error absoluto $E_{abs} = |y_{aprox} - y_{teorico}|$ lo obtendremos utilizando la expresión analítica de la solución en $t = 1$: $y(1) = e^{-5}$, y el valor que nos proporciona el método de Euler siendo $n = 10$: $y_{10} = (1-0{,}5)^{10}$; luego $E_{abs} = |y_{10} - y_{teorico}| \approx 0{,}006$.

∎

15.- Resolver el problema $y' = y - t^2 + 1,\ y(0) = 0{,}5$, para $t \in [0,1]$ utilizando el método del punto medio explícito y un paso $h = 0{,}2$.

Solución:

En primer lugar, podemos obtener la solución analítica del problema: nuestra EDO es lineal de primer orden, con término inhomogéneo. La solución general de la EDO es $y(t) = Ke^t + (1+t)^2$. Como la condición inicial que tenemos es $y(0) = 0{,}5$, el valor de la constante K resulta ser $K = -0{,}5$.

El método del punto medio (un ejemplo particular de método de Runge-Kutta) es:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2},\, y_n + \frac{h}{2} f_n\right).$$

En nuestro problema, $f(t,y) = y - t^2 + 1$ e $y_0 = 0{,}5$. En la siguiente tabla se muestran los valores de las aproximaciones a la solución de nuestro problema que se obtienen en los distintos puntos de la partición del intervalo $[0,\ 1]$ con espaciado $h = 0{,}2$, así como el valor de la solución exacta en cada punto:

t_n	y_n	y_{exact}
0,0	0,500000	0,5000
0,2	0,828000	0,8293
0,4	1,211360	1,2141
0,6	1,644659	1,6489
0,8	2,121284	2,1272
1,0	2,633167	2,6409

∎