Hoja 2 de Problemas

1.- Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $(12x+5y-9)\,dx+(5x+2y-3)\,dy=0.$

(b) $y'=-\dfrac{y}{x+y^3}.$

(c) $(e^x \operatorname{sen} y+\tan y)\,dx+\left(e^x\cos y+x\sec^2 y\right)dy=0.$

(d) $x^2y'=xy+3\left(x^2+y^2\right)\arctan\dfrac{y}{x}.$

2.- Resolver los siguientes problemas:

(a) $y'=e^{x-y}$, $y\,(0)=\log 2.$

(b) $(y')^2=9y^4,\;\; y\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$, $y\in C\left(\left[\dfrac{1}{3},\infty\right)\right).$

(c) $y'=\dfrac{xy+y}{x-1}$, $y\,(0)=2.$

3.- Sea la ecuación:

$$f\,(y)\,dx-\left(2xy+y^2\right)dy=0$$

(a) Determinar para qué funciones $f\,(y)$ es exacta y resolverla para esas funciones.

(b) Calcular un factor integrante de la forma $\mu=\mu\,(y)$ para cada f.

(c) Resolver la ecuación si $f\,(y)=y$.

4.- Resolver las siguientes ecuaciones encontrando un factor integrante que dependa de una sola variable.

(a) $\left(4x+3y^3\right)dx+3xy^2dy=0.$

(b) $\left(4xy^2+y\right)\mathrm{d}\,x+\left(6y^3-x\right)dy=0.$

(c) $2xdx-x^2\cot y dy=0.$

(d) $(2x+y)\,dx+\left(x^2+xy+x\right)dy=0.$

5.- Hallar un factor integrante para la ecuación

$$\left(3y^2-x\right)dx+2y\left(y^2-3x\right)dy=0,$$

de la forma: $\mu=\mu\left(x+y^2\right)$.

6.- Dada la ecuación diferencial $P(x,t)dx+Q(x,t)dt=0$, se pide:

a) Hallar la condición que han de cumplir $P(x,t)$ y $Q(x,t)$ para que la ecuación diferencial admita un factor integrante que sea función de $t+x$.

b) Aplicar lo obtenido en el apartado anterior para resolver la ecuación diferencial $(2tx - t^2 - t)dx + (2tx - x^2 - x)dt = 0$.

7.- Integrar mediante un cambio de variables las ecuaciones del tipo:

(a) $\dfrac{dx}{dt} = f\,(at + x)$.

(b) $\dfrac{dx}{dt} = f\left(\dfrac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right)$.

(c) $y' = (x + y)^2$, aplicar el apartado "a".

(d) $y' = \dfrac{x + y + 4}{x - y - 6}$, aplicar el apartado "b".

8.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

(a) $xy' - 3y = x^4$.

(b) $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$.

(c) $\left(1 + x^2\right) dy + (2xy - \cot x)\, dx = 0$.

(d) $y' + y = 2xe^{-x} + x^2$.

(e) $\left(2y - x^3\right) dx = xdy$.

(f) $\dfrac{dx}{dy} - 2yx = 6ye^{y^2}$.

9.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Bernoulli:

(a) $y' + \dfrac{1}{x}y - x^3y^2 = 0$.

(b) $xy^2y' + y^3 = x\cos x$.

(c) $y' + \dfrac{1}{x}y - y^2 = 0$.

(d) $\left(3y + 3xe^x y^{\frac{2}{3}}\right) dx + xdy = 0$.

10.- Resolver las siguientes ecuaciones de Ricatti, utilizando las soluciones particulares indicadas:

(a) $y' + 2xy = 1 + x^2 + y^2, \quad y_1(x) = x$.

(b) $y' = 14 + 20x + 8x^2 - (10 + 8x)\, y + 2y^2, \quad y_1(x) = ax + b$.

(c) $y' + y^2 = x^{-4}, \quad y_1(x) = \dfrac{ax + b}{x^2}$.

11.- Está nevando con regularidad. A las 12h sale una máquina quitanieves que recorre en la primera hora 2km y en la segunda, 1km. ¿A qué hora empezó a nevar?.

12.- Una bola de nieve se derrite de tal manera que la razón de cambio de su volumen es proporcional al área de su superficie. El diámetro de la bola de nieve es inicialmente de 4cm

y al cabo de 30 minutos su diámetro pasa a ser de 3cm.
(a) ¿Cuándo será su diámetro son 2cm.?
(b) ¿Cuándo desaparecerá la bola de nieve?.

13.- De acuerdo con la ley de Torricelli, el agua escapará de un depósito abierto por un pequeño orificio a una velocidad igual a la que adquiriría al caer libremente desde el nivel del agua hasta el del orificio. Un cuenco hemisférico de radio R está inicialmente lleno de agua, y en el instante t = 0 se le perfora un orificio circular de radio r en el fondo. ¿Cuánto tarda en vaciarse?.

14.- Demostrar que la aproximación que proporciona el método de Euler explícito para determinar la solución del problema $y' = -5y$, $y(0) = 1$, utilizando una partición equiespaciada de paso h es

$$y_n = (1 - 5h)^n \,.$$

Calcular el error absoluto cometido en $t = 1$ utilizando $h = 0{,}1$.

15.- Calcular las trayectorias ortogonales a las familias de curvas:

(a) $xy = C$.

(b) $x^2 + y^2 = Cx$.

(c) $y = ce^{-x}$.

(d) $x^2y^2 = C\left(x^2 - 1\right)$.

(e) $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = C$.

(f) $y = \dfrac{x}{1 + Cx}$.