SOLUCIONES I
Hoja 1 de Problemas

1.- Calcular $\displaystyle\iint_D \left(x^2+y\right) dxdy$, donde $D = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$. Indicación: transformar la integral en una en la parte de D que está en el primer cuadrante.

Solución:
En la figura 1 está dibujado el dominio D

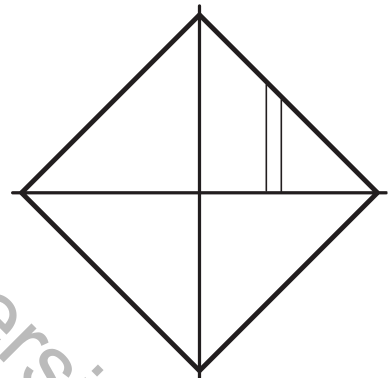

Figura 1:

$$D \equiv |x| + |y| \leq 1 \begin{cases} \text{si} \quad x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0 & |x| + |y| \leq 1 \quad \to \quad x + y \leq 1 \\ \text{si} \quad x \leq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0 & |x| + |y| \leq 1 \quad \to \quad -x + y \leq 1 \\ \text{si} \quad x \leq 0 \quad \text{y} \quad y \leq 0 & |x| + |y| \leq 1 \quad \to \quad -x - y \leq 1 \\ \text{si} \quad x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \leq 0 & |x| + |y| \leq 1 \quad \to \quad x - y \leq 1 \end{cases}$$

La integral dada

$$\iint_D \left(x^2+y\right) \mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y = \iint_D x^2 \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y + \iint_D y \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y$$

la segunda es nula, ya que el dominio es simétrico respecto $y = 0$ y la función toma valores opuestos para un mismo $x = x_0$. La primera, debido a la simetría, es cuatro veces el valor de la integral en el primer cuadrante

$$\begin{aligned} I = & \iint_D x^2 \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y = 4 \iint_{D_1} x^2 \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y = 4 \int_0^1 x^2 \left[\int_0^{1-x} \mathrm{d}\,y\right] \mathrm{d}\,x = \\ = & \; 4 \int_0^1 x^2 \left(1-x\right) \mathrm{d}\,x = 4 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

2.- Calcular $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f\left(x,\, y\right) dxdy$, donde $f\left(x,\, y\right) = \text{máx}\left(|x|\,,\, |y|\right)$.

Solución:

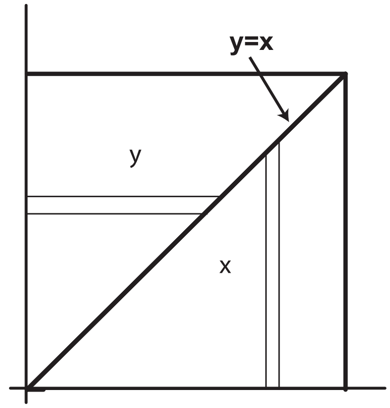

Figura 2:

En la figura 2 aparece el dominio y el valor que tom la función en cada parte del dominio.

$$
\begin{aligned}
I = & \int_0^1 \int_0^1 f(x,\, y)\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y = \int_0^1 x \left[\int_0^x \mathrm{d}\, y \right] \mathrm{d}\, x + \int_0^1 y \left[\int_0^y \mathrm{d}\, x \right] \mathrm{d}\, y = \\
= & \int_0^1 x^2\, \mathrm{d}\, x + \int_0^1 y^2\, \mathrm{d}\, y = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^1 = 2\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

3.- Determinar la integral de la función

$$f(x,\, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sobre los recintos:

1. $E = \left\{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \right\}$.
2. $H = \left\{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1,\; 0 \leq x \right\}$.

Solución:

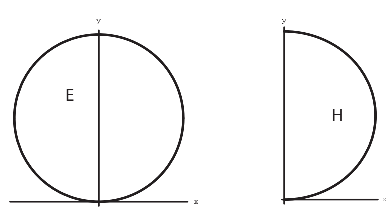

Figura 3:

Apartado 1: La función subintegral es impar respecto a la variable x, y el dominio es simétrico respecto a $x = 0$, ver en la figura 3 la parte de la izquierda, es

$$\iint_E \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y = 0$$

Apartado 2: Si nos fijamos en la función subintegral

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}e^{\sqrt{x^2+y^2}} \to \frac{\partial f\,(x,\,y)}{\partial x}e^{f(x,\,y)} = \frac{\partial e^{f(x,\,y)}}{\partial x}$$

luego integraremos primero en x

$$I = \iint_H \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\,x\right]\mathrm{d}\,y =$$

$$= \int_0^2 \left[e^{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}}\mathrm{d}\,y = \int_0^2 \left[e^{\sqrt{1-y^2+2y-1+y^2}} - e^y\right]\mathrm{d}\,y = \int_0^2 \left[e^{\sqrt{2y}} - e^y\right]\mathrm{d}\,y$$

hemos de resolver

$$I_1 = \int_0^2 e^{\sqrt{2y}}\,\mathrm{d}\,y \qquad I_2 = \int_0^2 e^y\,\mathrm{d}\,y$$

$$I_1 = \int_0^2 e^{\sqrt{2y}}\,\mathrm{d}\,y \underset{2y=u^2}{=} \int_0^2 e^u u\,\mathrm{d}\,u = ue^u\Big|_0^2 - \int_0^2 e^u\,\mathrm{d}\,u = 2e^2 - e^2 + 1$$

$$I_2 = \int_0^2 e^y\,\mathrm{d}\,y = e^y\Big|_0^2 = e^2 - 1$$

por lo tanto el resultado final es

$$I = \iint_H \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^2 \left[e^{\sqrt{2y}} - e^y\right]\mathrm{d}\,y = 2e^2 - e^2 + 1 - e^2 + 1 = 2$$

Otra forma: Debido a que en la función subintegral aparece x^2+y^2 y el dominio es una semicircunferencia, vamos a hacerla mediante un cambio a coordenadas polares

$$\begin{cases} x = & \rho\cos\theta \\ y = & \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases} \to \frac{\partial\,(x,\,y)}{\partial\,(\rho,\,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

y la correspondencia del dominio

$$H = \left\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2y \le 0,\ 0 \le x\right\} \to H_1 = \begin{cases} 0 \le & \rho & \le 2\operatorname{sen}\theta \\ 0 \le & \theta & \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

luego

$$I = \iint_H \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint_{H_1} \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{\rho^2}}e^{\sqrt{\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\left[\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} \rho e^\rho\,\mathrm{d}\,\rho\right]\mathrm{d}\,\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\left[\rho e^\rho - e^\rho\right]_0^{2\operatorname{sen}\theta}\mathrm{d}\,\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\left[2\operatorname{sen}\theta e^{2\operatorname{sen}\theta} - e^{2\operatorname{sen}\theta} + 1\right]\mathrm{d}\,\theta$$

hemos de resolver

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta e^{2\operatorname{sen}\theta}\,\mathrm{d}\,\theta; \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta e^{2\operatorname{sen}\theta}\,\mathrm{d}\,\theta; \qquad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta e^{2\operatorname{sen}\theta} \,\mathrm{d}\,\theta = \operatorname{sen}\theta e^{2\operatorname{sen}\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta e^{2\operatorname{sen}\theta} \,\mathrm{d}\,\theta = e^2 - I_2$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta e^{2\operatorname{sen}\theta} \,\mathrm{d}\,\theta = \frac{1}{2}\, e^{2\operatorname{sen}\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \,\mathrm{d}\,\theta = 1$$

luego

$$I = I_1 - I_2 + I_3 = e^2 - 2\left[\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right] + 1 = 2$$

$\blacksquare$

4.- Calcular $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{xy}$, donde D es el dominio plano limitado por las curvas

$$x^2 + y^2 = ax,\ x^2 + y^2 = a'x,\ x^2 + y^2 = by,\ \ x^2 + y^2 = b'y,$$

siendo: $0 < a < a'$, $0 < b < b'$.
Indicación: Efectúa un cambio de variable, de forma que el nuevo dominio sea el rectángulo $[a,\, a'] \times [b,\, b']$.

Solución:

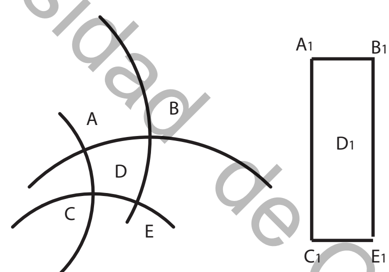

Figura 4: Ejercicio 8

El dominio puede expresarse

$$a \leq \frac{x^2 + y^2}{x} \leq a' \qquad b \leq \frac{x^2 + y^2}{y} \leq b',$$

luego el cambio

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \dfrac{x^2 + y^2}{x} \\ v = \dfrac{x^2 + y^2}{y} \end{array} \right. \to \frac{\partial\,(u,\, v)}{\partial\,(x,\, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2} & 2\dfrac{y}{x} \\ 2\dfrac{x}{y} & \dfrac{y^2 - x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{\left(x^2 - y^2\right)^2}{x^2 y^2} - 4 = -\frac{\left(x^2 + y^2\right)^2}{x^2 y^2}$$

al iual que en el ejercicio reseñado, el dominio se transforma en un rectángulo

$$I = \iint_D \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{xy} = \iint_{D_1} \frac{x^2 y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \frac{\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v}{xy} = \iint_{D_1} \frac{1}{uv} \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v = \int_a^{a'} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u \int_b^{b'} \frac{1}{v}\,\mathrm{d}\,v =$$

$$= \log\frac{a'}{a} \log\frac{b'}{b}$$

■

5.- Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies: $y = z^2$, $2y = z^2$, $z = x^2$, $2z = x^2$, $x = y^2$, $2x = y^2$.
Indicación: efectuar un cambio de variables de forma que el nuevo recinto de integración sea el cubo $[1,\ 2]^3$. Hallar el jacobiano del cambio inverso.

Solución:
El cambio de variables que permite obtener el dominio que se sugiere es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{z^2}{y}=1 & \dfrac{z^2}{y}=2 \\[2ex] \dfrac{x^2}{z}=1 & \dfrac{x^2}{z}=2 \\[2ex] \dfrac{y^2}{x}=1 & \dfrac{y^2}{y}=2 \end{array}\right. \to D_1 \left\{\begin{array}{l} 1 \leq u = \dfrac{z^2}{y} \leq 2 \\[2ex] 1 \leq v = \dfrac{x^2}{z} \leq 2 \\[2ex] 1 \leq w = \dfrac{y^2}{x} \leq 2 \end{array}\right.$$

Siendo el jacobiano inverso de la transformación

$$\frac{\partial\,(u,\ v,\ w)}{\partial\,(x,\ y,\ z)} = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{z^2}{y^2} & \dfrac{2z}{y} \\[2ex] \dfrac{2x}{z} & 0 & -\dfrac{x^2}{z^2} \\[2ex] -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} & 0 \end{vmatrix} = 8-1$$

por lo tanto

$$V = \iiint_D \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \iiint_{D_1} \frac{1}{\dfrac{\partial\,(u,\ v,\ w)}{\partial\,(x,\ y,\ z)}}\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v\,\mathrm{d}\,w = \iiint_{D_1} \frac{1}{7}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v\,\mathrm{d}\,w =$$

$$= \frac{1}{7}\left[\int_1^2 \mathrm{d}\,u\right]\left[\int_1^2 \mathrm{d}\,v\right]\left[\int_1^2 \mathrm{d}\,w\right] = \frac{1}{7}$$

■

6.- Calcular el volumen limitado por la superficie $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3 = 3a^3xyz$, que pertenece al primer octante.
Solución:
Hagamos un cambio de variables a coordenadas esféricas.

El jacobiano de la transformación es,

$$\frac{\partial\,(x,y,z)}{\partial\,(\rho,\theta,\omega)} = \begin{vmatrix} \cos\omega\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\omega\cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\,\mathrm{sen}\,\omega\cos\theta & \rho\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y la ecuación de la superficie en esféricas,

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^3 = 3a^3xyz \Rightarrow \rho^3 = 3a^3\cos\omega sen\theta sen\omega sen\theta\cos\theta$$

Por tanto,

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_V \frac{\partial\,(x,y,z)}{\partial\,(\rho,\theta,\omega)}d\rho d\theta d\omega =$$

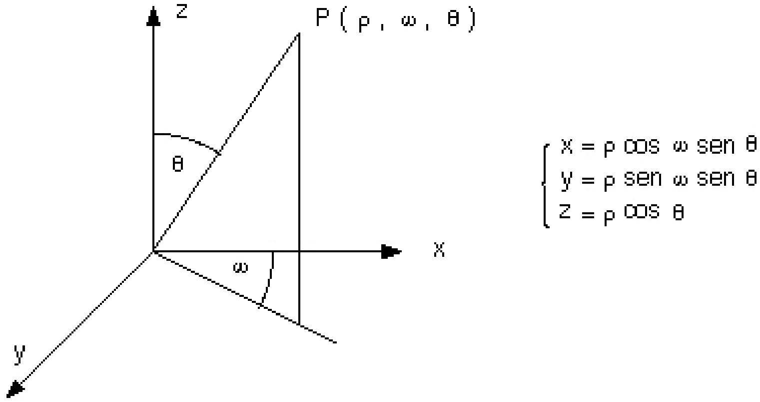

Figura 5:

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{3\cos\omega sen^2\theta \operatorname{sen}\omega\cos\theta}} \rho^2 \operatorname{sen}\theta d\rho = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{a\sqrt[3]{3\cos\omega\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\omega\cos\theta}} d\theta = \\
&= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta \left[\cos\omega\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\omega\cos\theta\right] d\theta = \\
&= = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega\operatorname{sen}\omega d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta d\theta = \\
&= = a^3 \left[\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\operatorname{sen}^4\omega}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{8}
\end{aligned}
$$

■

7.- Calcular $I = \iiint\limits_V \left[x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right] dxdydz$, siendo V el volumen determinado por el cilindro, $y^2 + z^2 = 2pz$, y las dos hojas del cono, $x^2 - q^2\left(y^2 + z^2\right) = 0$, siendo p, $q > 0$.

Solución:

El cilindro tiene su eje paralelo al, eje O x, y su sección recta por el plano $x = 0$ es: $y^2 + (z-p)^2 = p^2$, por lo tanto su eje es: $y = 0$ y $z = p$, ver la figura 6.

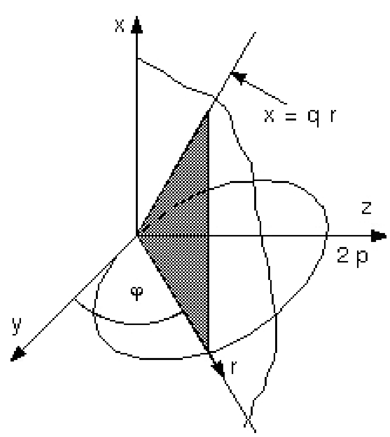

Figura 6:

El cono, circular, tiene como eje el eje Ox. La sección de estas dos superficies por un plano que pase por Ox y que forme un ángulo φ con el eje Oy, ver la figura 7,

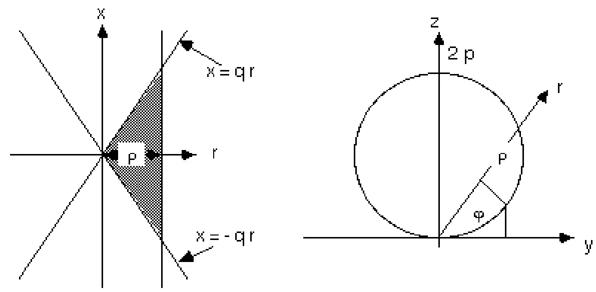

Figura 7:

El cambio de variable indicado será:

$$\begin{cases} x = x \\ y = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}; \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ 0 & \mathrm{sen}\,\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$

siendo ahora la ecuación del cilindro: $y^2 + z^2 = 2pz \Rightarrow \rho = 2p\,\mathrm{sen}\,\varphi$ y la del cono: $x^2 - q^2\left(y^2+z^2\right) = 0 \Rightarrow x = \pm q\rho$. Por tanto

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_V \left[x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right] \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \\
&= \iiint_V \left[x^2\rho^2 + \rho^4\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi\right] \rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,x = \\
&= \int_0^\pi \mathrm{d}\,\varphi \int_0^{2p\,\mathrm{sen}\,\varphi} \rho^3\,\mathrm{d}\,\rho \int_{-q\rho}^{q\rho} \left[x^2 + \rho^2\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi\right] \mathrm{d}\,x = \\
&= \int_0^\pi \mathrm{d}\,\varphi \int_0^{2p\,\mathrm{sen}\,\varphi} \rho^3 \left[\frac{x^3}{3} + \rho^2\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi\,x\right]_{-q\rho}^{q\rho} \mathrm{d}\,\rho = \\
&= \int_0^\pi \mathrm{d}\,\varphi \int_0^{2p\,\mathrm{sen}\,\varphi} \rho^3 \left[2\frac{q^3\rho^3}{3} + 2q\rho^3\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi\right] \mathrm{d}\,\rho = \\
&= \int_0^\pi \left[2\frac{q^3}{3} + 2q\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi\right] \left[\frac{\rho^7}{7}\right]_0^{2p\,\mathrm{sen}\,\varphi} \mathrm{d}\,\varphi = \\
&= 2\frac{q^3}{3}\frac{(2p)^7}{7}\int_0^\pi \mathrm{sen}^7\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi + 2q\frac{(2p)^7}{7}\int_0^\pi \cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^9\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi = \\
&= 2\frac{q^3}{3}\frac{(2p)^7}{7}2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^7\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi + 2q\frac{(2p)^7}{7}2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^9\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi = \\
&= \frac{2^9q^3p^7}{21}\frac{6!!}{7!!} + \frac{2^9qp^7}{7}\frac{8!!}{11!!} = \frac{2^9qp^7}{7}\frac{6!!}{7!!}\left[\frac{q^2}{3} + \frac{8}{11\times 9}\right] = \\
&= \frac{2^9qp^7}{21}\frac{6!!}{7!!}\left[q^2 + \frac{8}{33}\right] = \frac{2^{13}qp^7}{735}\left[q^2 + \frac{8}{33}\right]
\end{aligned}$$

■

8.- Hallar $I = \iiint x^2y^2z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$ extendida a la porción de cono $x^2+y^2 = xz$, comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = c$. (En esféricas).

Solución:

El cono tiene el vértice en el origen, es simétrico respecto al plano $y = 0$, sus secciones por planos $z = 2k$ son circunferencias:

$$\begin{cases} z = 2k \\ x^2 + y^2 = 2xk \end{cases} ; \qquad \begin{cases} z = 2k \\ (x-k)^2 + y^2 = k^2 \end{cases}$$

El dominio de integración será:

$$D \equiv \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x} \leq z \leq c \\ x^2 + y^2 - xc \leq 0 \end{cases}$$

Pasando a coordenadas esféricas, ver las figuras 5 y 8:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} ; \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial\,(x,y,z)}{\partial\,(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2 \operatorname{sen}\theta$$

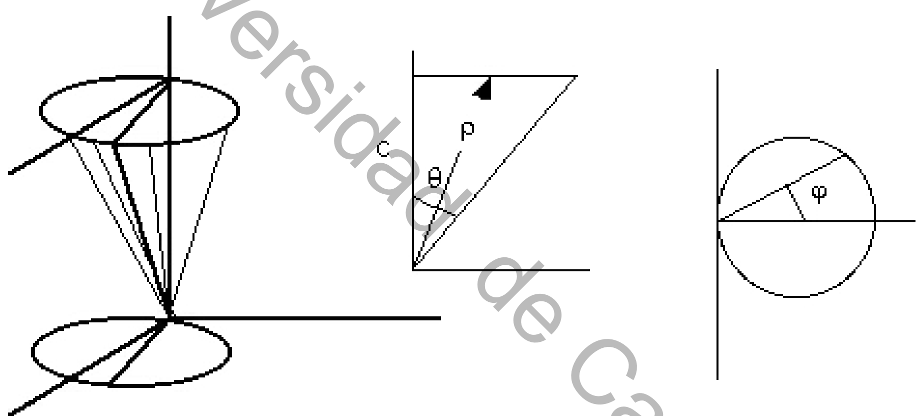

Figura 8:

El cono en coordenadas esféricas,

$$x^2 + y^2 = xz \Rightarrow \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta = \rho \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\rho\cos\theta :\longrightarrow \operatorname{tg}\theta = \cos\varphi$$

Por lo tanto el dominio,

$$D \equiv \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x} \leq z \leq c \\ x^2 + y^2 - xc \leq 0 \end{cases} \Rightarrow D \equiv \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq \dfrac{c}{\cos\theta} \\ 0 \leq \theta \leq \operatorname{arc\,tg}(\cos\varphi) \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$I \;=\; \iiint\limits_{D} x^2y^2z\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z =$$

$$
\begin{aligned}
&= \iiint_D [\rho\cos\varphi \operatorname{sen}\theta]^2 [\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta]^2 \rho\cos\theta \rho^2 \operatorname{sen}\theta \, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \\
&= \iiint_D \rho^7 \operatorname{sen}^5\theta \cos\theta \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi \int_0^{\operatorname{arc\,tg}(\cos\varphi)} \operatorname{sen}^5\theta\cos\theta \, d\theta \int_0^{\frac{c}{\cos\theta}} \rho^7 \, d\rho = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi \int_0^{\operatorname{arc\,tg}(\cos\varphi)} \operatorname{sen}^5\theta\cos\theta \, d\theta \left[\frac{\rho^8}{8}\right]_0^{\frac{c}{\cos\theta}} = \\
&= \frac{c^8}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi \int_0^{\operatorname{arc\,tg}(\cos\varphi)} \frac{\operatorname{sen}^5\theta\cos\theta}{\cos^8\theta} \, d\theta
\end{aligned}
$$

Hagamos en la última integral, por ser par en cos y en sen, el cambio siguiente:

$$
\operatorname{tg}\theta = z \to d\theta = \frac{1}{1+z^2}\, dz \longrightarrow \begin{cases} \theta = 0 & \to \quad z = 0 \\ \theta = \operatorname{arc\,tg}(\cos\varphi) & \to \quad z = \cos\varphi \end{cases}
$$

Por lo que,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\operatorname{arc\,tg}(\cos\varphi)} \frac{\operatorname{sen}^5\theta\cos\theta}{\cos^8\theta}\, d\theta = \int_0^{\operatorname{arc\,tg}(\cos\varphi)} \frac{\operatorname{sen}^5\theta}{\cos^7\theta}\, d\theta = \\
&= \int_0^{\cos\varphi} \left[\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right]^5 \left[\sqrt{1+z^2}\right]^7 \frac{1}{1+z^2}\, dz = \left.\frac{z^6}{6}\right|_0^{\cos\varphi} = \frac{\cos^6\varphi}{6}
\end{aligned}
$$

luego,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{c^8}{24}\, 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8\varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi = \frac{c^8}{24} \mathrm{B}\left[\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right] = \frac{c^8}{24} \frac{\Gamma\left[\frac{9}{2}\right]\Gamma\left[\frac{3}{2}\right]}{\Gamma[6]} = \\
&= \frac{c^8}{24} \frac{\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left[\frac{1}{2}\right]\frac{1}{2}\Gamma\left[\frac{1}{2}\right]}{5!} = \frac{7\pi}{24}\left(\frac{c}{2}\right)^8
\end{aligned}
$$

■

9.- Calcular $\iiint_W f(x, y, y)\, dxdydz$, en el siguiente caso: $f(x, y, y) = ze^{x^2+y^2+z^2}$, donde $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 1\right\}$.

Solución: El dominio es el volumen encerrado por el cono $z = +\sqrt{x^2+y^2}$ y el plano $z = 1$, superficies que se cortan en la curva $\begin{cases} x^2+y^2 = z^2 \\ z = 1 \end{cases}$, que proyectada sobre el plano $z = 0$, nos define un dominio plano $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\right\}$, por lo que

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_W ze^{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \iint_{D_1} e^{x^2+y^2} \left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 ze^{z^2}\, dz\right] dx\, dy = \\
&= \iint_{D_1} e^{x^2+y^2} \left[\frac{1}{2}e^{z^2}\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dx\, dy = \frac{1}{2}\iint_{D_1} e^{x^2+y^2}\left[e - e^{x^2+y^2}\right] dx\, dy
\end{aligned}
$$

pasando ahora a coordenadas polares

$$
\begin{aligned}
V = {} & \frac{1}{2}\iint_{D_1} e^{x^2+y^2}\left[e - e^{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}\iint_{D_2} e^{\rho^2}\rho\left[e-e^{\rho^2}\right]\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta = \\
= {} & \frac{1}{2}\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\right]\left[\int_0^1 e^{\rho^2}\rho\left[e-e^{\rho^2}\right]\mathrm{d}\,\rho\right] = \pi\left[\frac{1}{2}ee^{\rho^2}-\frac{1}{4}e^{2\rho^2}\right]_0^1 = \\
= {} & \pi\frac{2e^2-2e-e^2+1}{4} = \frac{\pi}{2}\left(e-1\right)^2
\end{aligned}
$$

SOLUCIONES II
Hoja 1 de Problemas

Ejercicio nº 1 *Integrar:*

(a) $f(x,y) = 2xy^2$ *sobre el primer cuadrante de la circunferencia de radio* R.

(b) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2$ *a lo largo de la hélice circular* $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3t)$, *desde el punto* $(1,0,0)$ *hasta el punto* $(1,0,6\pi)$.

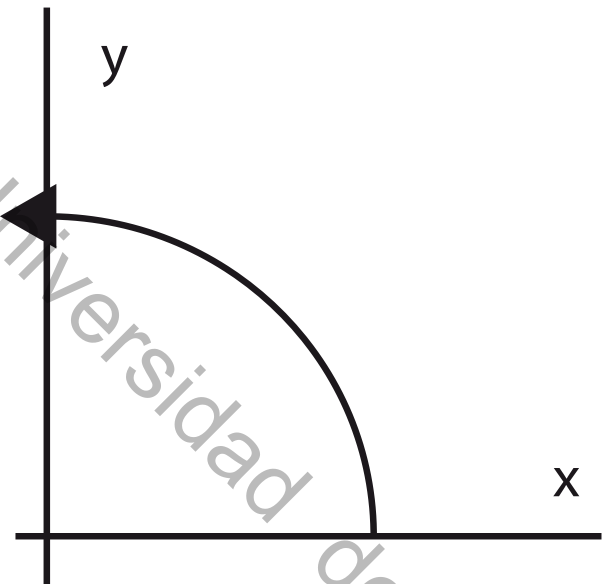

Figura 1: Ejercicio 1, apartado a

Solución:
Ejercicio nº 1, apartado a:
Las ecuaciones paramétricas del arco de circunferencia γ,

$$x = \quad R\cos\theta \qquad y = \quad R\operatorname{sen}\theta \qquad \mathrm{d}\,s = \quad R\,\mathrm{d}\theta$$

y el campo de variación del parámetro, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, luego

$$I = \int_\gamma 2xy^2\,\mathrm{d}\,s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2R\cos\theta\,R^2\operatorname{sen}^2\theta\,R\,\mathrm{d}\,\theta = 2R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta\;\mathrm{d}\,\theta =$$

$$= 2R^4\,\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R^4}{3}$$

Ejercicio nº 1, apartado b:
La variación del parámetro la obtenemos

$$\begin{array}{rclcrcl}(\cos t_0, \operatorname{sen} t_0, 3t_0) & = & (1,0,0) & \to & t_0 & = & 0\\ (\cos t_1, \operatorname{sen} t_1, 3t_1) & = & (1,0,6\pi) & \to & t_1 & = & 2\pi\end{array}$$

El diferencial de arco

$$\mathrm{d}\, s = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + (3)^2}\ \mathrm{d}\, t = \sqrt{10}\ \mathrm{d}\, t$$

luego

$$\begin{aligned} I = & \int_\gamma \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \mathrm{d}\, s = \int_0^{2\pi} \left(1+9t^2\right)^2 \sqrt{10}\, \mathrm{d}\, t = \\ = & \sqrt{10} \int_0^{2\pi} \left(1+18t^2+81t^4\right) \mathrm{d}\, t = \sqrt{10} \left[t + 6t^3 + \frac{81t^5}{5}\right]_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{10}\frac{5+120\pi^2+1296\pi^4}{5} \end{aligned}$$

∎

Ejercicio *nº* **2** *Determinar la longitud y la masa de un hilo cuya forma es el arco de parábola* $y = x^2$ *desde* $(0,0)$ *hasta* $(2,4)$ *y cuya densidad es* $\rho(x,y) = x$.

Solución:
Tenemos

$$\mathrm{d}\, s = \sqrt{1 + \left(y^{(1}\ (x)\right)}\ \mathrm{d}\, x = \sqrt{1+4x^2}\ \mathrm{d}\, x, \qquad 0 \le x \le 2$$

luego la longitud viene dado por la integral siguiente,

$$I = \int_\gamma \mathrm{d}\, s = \int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\ \mathrm{d}\, x$$

Hagamos el cambio

$$2x = \operatorname{senh} u; \qquad 2\,\mathrm{d}\, x = \cosh u\, \mathrm{d}\, u; \begin{cases} x = 0 & \to \quad u = \qquad 0 \\ x = 2 & \to \quad u = \quad \operatorname{arg\,senh} 4 \end{cases}$$

resultando

$$\begin{aligned} I = & \int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\ \mathrm{d}\, x = \int_0^{\operatorname{arg\,senh} 4} \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 u}\frac{\cosh u\, \mathrm{d}\, u}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arg\,senh} 4} \cosh^2 u\, \mathrm{d}\, u = \\ = & \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arg\,senh} 4} \frac{1+\cosh 2u}{2}\ \mathrm{d}\, u = \frac{1}{4}\left[u + \frac{\operatorname{senh} 2u}{2}\right]_0^{\operatorname{arg\,senh} 4} = \frac{1}{4}\left[u + \operatorname{senh} u\ \cosh u\right]_0^{\operatorname{arg\,senh} 4} = \\ = & \frac{\operatorname{arg\,senh} 4 + 4\sqrt{1+16}}{4} \end{aligned}$$

recordando que

$$\operatorname{arg\,senh} f\,(x) \equiv \log\left[f\,(x) + \sqrt{1 + (f\,(x))^2}\right]$$

tenemos que

$$I = \frac{\operatorname{arg\,senh} 4 + 4\sqrt{1+16}}{4} = \frac{\log\left[4+\sqrt{1+4^2}\right] + 4\sqrt{1+16}}{4} = \frac{\log\left[4+\sqrt{17}\right]}{4} + \sqrt{17}$$

La masa viene dada por la integral

$$M = \int_0^2 \rho(x,y)\, \mathrm{d}\, s = \int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\ \mathrm{d}\, x = \frac{2}{3}\frac{1}{8}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{1}{12}\left[17^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

∎

Ejercicio nº 3 *Hallar la integral de línea* $\displaystyle\int_\rho xydx + (x^2-y^2)dy$*, siendo* ρ*:*

a) La circunferencia de centro el origen y radio unidad (recorrida en sentido antihorario).

b) El arco de parábola $y^2 = x$*, entre* $A = (1, -1)$ *y* $B = (1, 1)$*.*

c) La curva $y^2 = x^3$ *entre* $A = (1, -1)$ *y* $B = (1, 1)$*.*

Solución:

a)

Utilizando como parametrización del camino de integración coordenadas polares $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0,\, 2\pi]$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\rho xydx + (x^2-y^2)dy &= \int_0^{2\pi} \left[-\cos t \sin^2 t + (\cos^2 t - \sin^2 t)\cos t\right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\cos^3 t - 2\cos t \sin^2 t\right] dt = 0.\end{aligned}$$

b) Una parametrización del arco de curva que nos dan sería $r(t) = (t^2, t)$, $t \in [-1,\, 1]$. El vector tangente a la curva en cada punto sería con esta parametrización: $r'(t) = (2t, 1)$. De este modo, la integral de línea que nos piden calcular quedaría:

$$\int_\rho xydx + (x^2-y^2)dy = \int_{-1}^{1} \left(t^2 t 2t\, dt + (t^4 - t^2)\, dt\right) = \int_{-1}^{1} (3t^4 - t^2)\, dt = \frac{8}{15}.$$

c) Una parametrización del camino de integración es en este último caso $r(t) = (t^{2/3}, t)$, $t \in [-1,\, 1]$.

La integral de línea que nos piden calcular quedaría:

$$\int_\rho xydx + (x^2-y^2)dy = \int_{-1}^{1} \left(t^{2/3} t \frac{2}{3} t^{-1/3}\, dt + (t^{4/3} - t^2)\, dt\right) = \int_{-1}^{1} (\frac{5}{3} t^{4/3} - t^2)\, dt = \frac{16}{21}.$$

$\blacksquare$

Ejercicio nº 4 *Calcular las siguientes integrales, si las curvas cerradas se recorren en sentido positivo, es decir, en sentido contrario a las agujas del reloj:*

(*a*) $\displaystyle\int_g (x-y)dx + (x+y)dy$, *siendo* g *el segmento que une* $(1, 0)$ *con* $(0, 2)$*.*

(*b*) $\displaystyle\int_C x^3 dy - y^3 dx$, *siendo* C *la circunferencia* $\{x^2 + y^2 = 1\}$*.*

(*c*) $\displaystyle\int_\rho (x+2y)dx + (3x-y)dy$, *siendo* ρ *la elipse de ecuación* $x^2 + 4y^2 = 4$*.*

Solución:
Ejercicio nº 4, apartado a:
El segmento $g \equiv y + 2x - 2 = 0$, **si expresamos la integral en función de** x,

$$x_{inicial} = 1, \qquad x_{final} = 0, \qquad y = 2\,(1-x)\,, \qquad \mathrm{d}\,y = -2\,\mathrm{d}\,x$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_g &= \int_g (x-y)\,dx \,+\, (x+y)\,dy = \\
&= \int_1^0 \left([x-2\,(1-x)] + [x+2\,(1-x)]\,(-2)\right)\mathrm{d}\,x = \int_1^0 (5x-6)\,\mathrm{d}\,x = \\
&= \left.\frac{5x^2}{2} - 6x\right|_1^0 = -\frac{5}{2} + 6 = \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Si expresamos la integral en función de y,

$$y_{inicial} = 0, \qquad y_{final} = 2, \qquad x = -\frac{y-2}{2}, \qquad \mathrm{d}\,x = -\frac{\mathrm{d}\,y}{2}$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_g &= \int_g (x-y)\,dx \,+\, (x+y)\,dy = \\
&= \int_0^2 \left(\left[-\frac{y-2}{2} - y\right]\frac{-1}{2} + \left[-\frac{y-2}{2} + y\right]\right)\mathrm{d}\,y = \int_0^2 \left(\frac{5y}{4} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\,y = \\
&= \left.\frac{5y^2}{8} + \frac{y}{2}\right|_0^2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Solución:
Ejercicio nº 4, apartado b, primera forma:
La circunferencia podemos expresarla del modo siguiente,

$$C \equiv x^2 + y^2 = 1 \qquad \left\{\begin{array}{lll} x = & \cos\theta & \mathrm{d}\,x = & -\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\,\theta \\ y = & \operatorname{sen}\theta & \mathrm{d}\,y = & \cos\theta\,\mathrm{d}\,\theta \end{array}\right. \rightarrow 0 \le \theta \le 2\pi$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_C &= \int_C x^3 dy \,-\, y^3 dx = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\left[\cos^3\theta\right]\cos\theta - \left[\operatorname{sen}^3\theta\right](-\operatorname{sen}\theta)\right)\mathrm{d}\,\theta = \int_0^{2\pi} \left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right)\mathrm{d}\,\theta = \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta\right)\mathrm{d}\,\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\,\theta = 4\mathrm{B}\left[\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right] = 4\frac{\Gamma\left[\frac{5}{2}\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right]} = \\
&= 4\frac{\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\Gamma^2\left[\frac{1}{2}\right]}{2\Gamma\,[2]} = \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

Ejercicio nº 4, apartado b, segunda forma:
Al ser la integral curvilínea a lo largo de una curva cerrada, podemos aplicar el teorema de Green, si D es el domino encerrado por la curva C

$$\oint_C P\,(x,\, y)\,\mathrm{d}\,x + Q\,(x,\, y)\,\mathrm{d}\,y = \iint_D \left[\frac{\partial Q\,(x,\, y)}{x} - \frac{\partial P\,(x,\, y)}{y}\right]\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

que en nuestro caso

$$\oint_C x^3 dy \,-\, y^3 dx = \iint_D \left[3x^2 + 3y^2\right] \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y = 3 \iint_D \left[x^2 + y^2\right] \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y$$

que pasando a coordenadas polares

$$\oint_C x^3 dy - y^3 dx = 3 \iint_D \left[x^2 + y^2\right] \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y = 3 \iint_D \rho^2 \rho \,\mathrm{d}\, \rho \,\mathrm{d}\, \theta = 3 \left[\int_0^1 \rho^3 \,\mathrm{d}\, \rho\right] \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\, \theta\right] = 3\frac{1}{4}2\pi \blacksquare$$

$\blacksquare$

Solución:
Ejercicio n$^{\underline{o}}$ 4, apartado c:
La elipse podemos expresarla del modo siguiente,

$$\rho \equiv x^2 + 4y^2 = 4 \quad \left\{ \begin{array}{lrlr} x = & 2\cos\theta & \mathrm{d}\, x = & -2 \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}\,\theta \\ y = & \operatorname{sen}\theta & \mathrm{d}\, y = & \cos\theta \,\mathrm{d}\,\theta \end{array} \right. \to 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

luego

$$\oint_\rho = \int_\rho (x + 2y) dx \,+\, (3x - y) dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2\left[\cos + \operatorname{sen}\theta\right] (-2\operatorname{sen}\theta) + \left[6\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\right]\cos\theta\right) \mathrm{d}\,\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-5\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^2\theta + 6\cos^2\theta\right] \mathrm{d}\,\theta$$

la primera integral es, considerando la función es nula, confirmémoslo

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}\,\theta = \left.\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right|_0^{2\pi} = 0$$

Las otras dos, teniendo en cuenta las funciones que consideramos, las podemos refundir en una,

$$\int_0^{2\pi} \left[-4\operatorname{sen}^2\theta + 6\cos^2\theta\right] \mathrm{d}\,\theta = 2\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\,\theta = 4 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\,\theta = 4\mathrm{B}\left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] = 2\pi$$

Ejercicio n$^{\underline{o}}$ 4, apartado c, segunda forma:
Al ser la integral curvilínea a lo largo de una curva cerrada, podemos aplicar el teorema de Green, si D es el domino encerrado por la curva C

$$\oint_C = \int_\rho (x + 2y) dx \,+\, (3x - y) dy = \iint_D [3 - 2] \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y$$

El dominio D es una elipse, cuya superficie es: $\pi ab \equiv \pi \cdot 2 \cdot 1 = 2\pi$, luego el resultado es

$$\oint_C = \int_\rho (x + 2y) dx \,+\, (3x - y) dy = \iint_D [3 - 2] \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y = 2\pi$$

$\blacksquare$

Ejercicio *n*$^{\underline{o}}$ **5** *Calcular:*

(a) $\displaystyle\int_\gamma y dx \,-\, x dy \,+\, z dz$, *siendo* γ *la curva de intersección del cilindro* $x^2+y^2=a^2$ *y el plano* $z-y=a$ *en sentido antihorario.*

(b) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, *siendo* $\mathbf{F}(x,y,z)=(2xy+z^2,x^2,2xz)$ *y* γ *la intersección del plano* $x=y$ *con la esfera* $x^2+y^2+z^2=a^2$, *recorrida en sentido positivo.*

(c) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, *siendo* $\mathbf{F}(x,y,z)=(y,z,x)$ *y* γ *la curva intersección de* $x^2+y^2=2x$ *con* $x=z$.

Solución:
Ejercicio nº 5, apartado a:
La curva γ podemos definirla en función de las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=a^2 \\ z-y=a \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rl} x= & a\cos\alpha \\ y= & a\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ z= & a\,(1+\mathrm{sen}\,\alpha) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rr} \mathrm{d}\,x= & -a\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha \\ \mathrm{d}\,y= & a\cos\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha \\ \mathrm{d}\,z= & a\cos\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha \end{array}\right. , \qquad 0\le\alpha\le 2\pi$$

luego

$$\begin{aligned} \oint &= \int_\gamma y dx \,-\, x dy \,+\, z dz = \\ &= \int_0^{2\pi}\left[-a\,\mathrm{sen}\,\alpha\, a\,\mathrm{sen}\,\alpha - a\cos\alpha\, a\cos\alpha + a\,(1+\mathrm{sen}\,\alpha)\, a\cos\alpha\right]\mathrm{d}\,\alpha = \\ &= a^2\int_0^{2\pi}\left[-1+\cos\alpha+\mathrm{sen}\,\alpha\,\cos\alpha\right]\mathrm{d}\,\alpha = -2a^2\pi+0+0 \end{aligned}$$

Al ser una curva cerrada, podemos aplicar el teorema de Stokes,

$$\oint_\gamma (\mathbf{y},\,-\mathbf{x},\,\mathbf{z})\bullet\begin{pmatrix}\mathrm{d}\,x\\ \mathrm{d}\,y\\ \mathrm{d}\,z\end{pmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{y} & -\mathbf{x} & \mathbf{z} \end{vmatrix}\bullet\mathbf{n}\,\mathrm{d}\,\Omega$$

La normal a la superficie es, si $G\,(x,\,y,\,z)\equiv z-y-a=0$,

$$\mathbf{n}=\frac{\left(\;0,\;\; -1,\;\; 1\;\right)}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}}\equiv\left(\;\cos\alpha,\;\; \cos\beta,\;\; \cos\gamma\;\right)$$

y es

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{y} & -\mathbf{x} & \mathbf{z} \end{vmatrix} = \left(\;0,\;\; 0,\;\; -2\;\right)$$

luego

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{y} & -\mathbf{x} & \mathbf{z} \end{vmatrix} \bullet \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & -2 \end{pmatrix} \bullet \frac{\begin{pmatrix} 0, & -1, & 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{y} & -\mathbf{x} & \mathbf{z} \end{vmatrix} \bullet \mathbf{n} \,\mathrm{d}\,\Omega = \iint_S \frac{-2}{\sqrt{2}} \,\mathrm{d}\,\Omega = \iint_S \frac{-2}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{|\cos\gamma|} =$$

$$= \iint_D \frac{-2}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -2 \iint_D \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

Donde D es la proyección de la superficie S sobre el plano $z = 0$, por lo que:
$D = \left\{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2+y^2 \leq 2 \right\}$, resultando

$$I = -2 \iint_D \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = -2\pi a^2$$

Ejercicio nº 5, apartado b:

La curva γ podemos definirla en función de las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ x = y \end{array} \right. \quad 2x^2+z^2 = a^2 \to \left\{ \begin{array}{rl} x = & \dfrac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\alpha \\ x = & y \\ z = & a\cos\alpha \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{rr} \mathrm{d}\,x = & \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cos\alpha \,\mathrm{d}\,\alpha \\ \mathrm{d}\,y = & \mathrm{d}\,x \\ \mathrm{d}\,z = & -a \operatorname{sen}\alpha \,\mathrm{d}\,\alpha \end{array} \right.$$

siendo $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, luego

$$\oint = \int_\gamma \begin{pmatrix} 2xy+z^2, & x^2, & 2xz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\,x \\ \mathrm{d}\,y \\ \mathrm{d}\,z \end{pmatrix} = \int_\gamma \left(3x^2+z^2\right) \mathrm{d}\,x + 2xz\,\mathrm{d}\,z =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{3a^2}{2} \operatorname{sen}^2\alpha + a^2\cos^2\alpha \right) \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \cos\alpha \right) + \frac{2a^2}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \,\left(-a\operatorname{sen}\alpha\right) \right] \mathrm{d}\,\alpha =$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\alpha \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\alpha \right) - \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha \right] \mathrm{d}\,\alpha =$$

$$= a^3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\alpha + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha \right] \mathrm{d}\,\alpha = 0$$

las integrales que resultan son nulas, resultado al que se llega, sin necesidad de calcular las integrales, mediante el estudio de las funciones en el intervalo $[0,\, 2\pi]$, Al ser una curva cerrada, podemos aplicar el teorema de Stokes,

$$\oint_\gamma (\mathbf{2xy + z^2,\ x^2,\ 2xz}) \bullet \begin{pmatrix} \mathrm{d}\,x \\ \mathrm{d}\,y \\ \mathrm{d}\,z \end{pmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{2xy + z^2} & \mathbf{x^2} & \mathbf{2xz} \end{vmatrix} \bullet \mathbf{n}\ \mathrm{d}\,\Omega$$

Y en este caso

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{2xy + z^2} & \mathbf{x^2} & \mathbf{2xz} \end{vmatrix} = \left(\ 0,\quad 2z - 2z,\quad 2x - 2x\ \right) = \left(\ 0,\quad 0,\quad 0\ \right)$$

Por lo tanto

$$\oint_\gamma (\mathbf{2xy + z^2,\ x^2,\ 2xz}) \bullet \begin{pmatrix} \mathrm{d}\,x \\ \mathrm{d}\,y \\ \mathrm{d}\,z \end{pmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{2xy + z^2} & \mathbf{x^2} & \mathbf{2xz} \end{vmatrix} \bullet \mathbf{n}\ \mathrm{d}\,\Omega = 0$$

Ejercicio nº 5, apartado c:
La curva γ podemos definirla en función de las siguientes ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2x \\ x = z \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x = & 1 + \cos\alpha \\ y = & \operatorname{sen}\alpha \\ z = & 1 + \cos\alpha \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rr} \mathrm{d}\,x = & -\operatorname{sen}\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha \\ \mathrm{d}\,y = & \cos\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha \\ \mathrm{d}\,z = & \operatorname{sen}\alpha\,\mathrm{d}\,\alpha \end{array} \right. ,\qquad 0 \le \alpha \le 2\pi$$

luego

$$\begin{aligned} \oint &= \int_\gamma y dx\ +\ z dy\ +\ x dz = \\ &= \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}\alpha\,(-\operatorname{sen}\alpha) + (1+\cos\alpha)\cos\alpha + (1+\cos\alpha)\,(-\operatorname{sen}\alpha)]\,\mathrm{d}\,\alpha = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left[-\operatorname{sen}^2\alpha + \cos\alpha + \cos^2\alpha - \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\right]\mathrm{d}\,\alpha = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left[\cos 2\alpha + \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha - \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2}\right]\mathrm{d}\,\alpha = 0 + 0 - 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Al ser una curva cerrada, podemos aplicar el teorema de Stokes,

$$\oint_\gamma (\mathbf{y,\ -x,\ z}) \bullet \begin{pmatrix} \mathrm{d}\,x \\ \mathrm{d}\,y \\ \mathrm{d}\,z \end{pmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \end{vmatrix} \bullet \mathbf{n}\ \mathrm{d}\,\Omega$$

La normal a la superficie es, si $G(x,\, y,\, z) \equiv z - x = 0$,

$$\mathbf{n} = \frac{\begin{pmatrix} -1, & 0, & 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} \equiv \begin{pmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

y es

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \end{vmatrix} \bullet \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1, & -1, & -1 \end{pmatrix} \bullet \frac{\begin{pmatrix} -1, & 0, & 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}} = 0$$

Por lo tanto

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{x} \end{vmatrix} \bullet \mathbf{n}\ \mathrm{d}\,\Omega = \iint_S 0\ \mathrm{d}\,\Omega = 0$$

$\blacksquare$

Ejercicio *n*º **6** *Sea* $\mathbf{F}(x, y, z) = (\operatorname{sen} y + z,\ x\cos y + e^z,\ x + ye^z)$.

(*a*) *Probar que la integral sobre cualquier curva cerrada simple,* $\mathcal{C}^1$ *a trozos, vale 0.*

(*b*) *Obtener un potencial de* $\mathbf{F}$*, es decir, encontrar* ϕ *tal que* $\mathbf{F} = \nabla\phi$*.*

Solución:
Ejercicio nº 6, apartado a:
Veamos si hay igualdad de las derivadas cruzadas, si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\operatorname{sen} y + z,\ x\cos y + e^z,\ x + ye^z) \equiv (X,\ Y,\ Z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \cos y & \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} &= \cos y \\ \frac{\partial X}{\partial z} &= 1 & \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= e^z & \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} &= e^z \end{aligned}$$

Al ser iguales las derivadas cruzadas existe función potencial, luego la integral sobre cualquier curva cerrada es nula.

Ejercicio nº 6, apartado b:
Determinemos la función potencial,

$$\phi = \int (\operatorname{sen} y + z) \, \mathrm{d}\, x = x \operatorname{sen} y + xz + g\,(y,\, z)$$

por lo que

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{cases} x \cos y + \dfrac{\partial g\,(y,\, z)}{\partial y} \\ x \cos y + e^z \end{cases} \rightarrow \frac{\partial g\,(y,\, z)}{\partial y} = e^z \rightarrow g\,(y,\, z) = ye^z + h\,(z)$$

resultando

$$\phi = x \operatorname{sen} y + xz + ye^z + h\,(z)$$

y

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \begin{cases} x + ye^z + \dfrac{\partial h\,(z)}{\partial z} \\ x + ye^z \end{cases} \rightarrow \frac{\partial h\,(z)}{\partial z} = 0 \rightarrow h\,(z) = K$$

finalmente

$$\phi = x \operatorname{sen} y + xz + ye^z + K$$

De otro modo, teniendo en cuenta que

$$\phi = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y_0,z_0)} X \,\mathrm{d}\, x + Y \,\mathrm{d}\, y + X \,\mathrm{d}\, z + \int_{(x,y_0,z_0)}^{(x,y,z_0)} X \,\mathrm{d}\, x + Y \,\mathrm{d}\, y + X \,\mathrm{d}\, z + \int_{(x,y,z_0)}^{(x,y,z)} X \,\mathrm{d}\, x + Y \,\mathrm{d}\, y + X \,\mathrm{d}\, z$$

La primera integral

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y_0,z_0)} X \,\mathrm{d}\, x + Y \,\mathrm{d}\, y + X \,\mathrm{d}\, z = \\ = & \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y_0,z_0)} (\operatorname{sen} y_0 + z_0) \,\mathrm{d}\, x = x \operatorname{sen} y_0 + xz_0 - (x_0 \operatorname{sen} y_0 + x_0 z_0) \end{aligned}$$

La segunda integral

$$\begin{aligned} I_2 = & \int_{(x,y_0,z_0)}^{(x,y,z_0)} X \,\mathrm{d}\, x + Y \,\mathrm{d}\, y + X \,\mathrm{d}\, z = \\ = & \int_{(x,y_0,z_0)}^{(x,y,z_0)} (x \cos y + e^{z_0}) \,\mathrm{d}\, y = x \operatorname{sen} y + ye^{z_0} - (x \operatorname{sen} y_0 + y_0 e^{z_0}) \end{aligned}$$

La tercera integral

$$\begin{aligned} I_3 = & \int_{(x,y,z_0)}^{(x,y,z)} X \,\mathrm{d}\, x + Y \,\mathrm{d}\, y + X \,\mathrm{d}\, z = \\ = & \int_{(x,y,z_0)}^{(x,y,z)} (x + ye^z) \,\mathrm{d}\, z = xz + ye^z - (xz_0 + ye^{z_0}) \end{aligned}$$

Sumando

$$\begin{aligned} I = & \quad x \operatorname{sen} y_0 + xz_0 - (x_0 \operatorname{sen} y_0 + x_0 z_0) + \\ & + \; x \operatorname{sen} y + ye^{z_0} - (x \operatorname{sen} y_0 + y_0 e^{z_0}) + \\ & + \; xz + ye^z - (xz_0 + ye^{z_0}) = \\ = & \quad x \operatorname{sen} y + xz + ye^z - (x_0 \operatorname{sen} y_0 + +x_0 z_0 + y_0 e^{z_0}) \end{aligned}$$

∎

Ejercicio *nº* **7** *Sea el campo vectorial*

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{y^2+2xy+ax^2}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

1. *Obtener a y b para que la integral de este campo vectorial sobre cualquier curva cerrada simple (excluyendo aquéllas que encierren o contengan al origen) valga siempre* 0.

2. *Con lo valores obtenidos en el apartado anterior, obtener una función potencial de* $\mathbf{F}(x,y)$.

   Ayuda: *Una posible forma de resolver una racional del tipo*

$$\int \frac{P(x)}{(x^2+k)^n}\,\mathrm{d}\,x$$

   siendo el grado de $P(x)$ un polinomio en x de grado, como máximo, $2n-1$, es el cambio de variable siguiente:

$$x = \sqrt{k}\,\mathrm{tg}\, z$$

Solución:

1. Se ha de verificar que

$$\frac{\partial \left[\dfrac{y^2+2xy+ax^2}{(x^2+y^2)^2} \right]}{\partial y} = \frac{\partial \left[-\dfrac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2} \right]}{\partial x}$$

   Es decir,

$$\frac{2(x+y)\left(x^2+y^2\right)^2 - 2\left(x^2+y^2\right)2y\left(y^2+2xy+ax^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4} =$$

$$= \quad -\frac{2(x+y)\left(x^2+y^2\right)^2 - 2\left(x^2+y^2\right)2x\left(x^2+2xy+by^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4}$$

   por lo tanto, simplificando,

$$\left(x^2+y^2\right)\left[4(x+y)\left(x^2+y^2\right) - 4\left(y^3+2xy^2+ax^2y+x^3+2x^2y+bxy^2\right)\right] = 0$$

$$(x+y)\left(x^2+y^2\right) - (x+y)\left[\left(y^2-xy+x^2\right)+2xy\right] - xy\,(ax+by) = 0$$

$$(x+y)\,xy = -xy\,(ax+by) \Rightarrow a = b = -1$$

2. Sustituyendo los valores de los parámetros obtenidos en el apartado anterior, tendríamos que

$$\frac{y^2+2xy-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,\mathrm{d}\,x - \frac{x^2+2xy-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,\mathrm{d}\,y \equiv U_x\,\mathrm{d}\,x + U_y\,\mathrm{d}\,y$$

   de donde

$$U=\int \frac{y^2+2xy-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,\mathrm{d}\,x+\Phi\left(y\right)$$

resolviendo la primitiva

$$I=\int \frac{y^2+2xy-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,\mathrm{d}\,x$$

para lo cual hacemos el cambio de variable,

$$x=y\operatorname{tg}z;\rightarrow\ \mathrm{d}\,x=y\left(1+\ \operatorname{tg}^2 z\right)\,\mathrm{d}\,z$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{y^2+2y^2\operatorname{tg}z-y^2\operatorname{tg}^2 z}{\left(y^2\operatorname{tg}^2 z+y^2\right)^2}y\left(1+\ \operatorname{tg}^2 z\right)\,\mathrm{d}\,z=\frac{1}{y}\int\frac{1+2\operatorname{tg}z-\ \operatorname{tg}^2 z}{\left(1+\ \operatorname{tg}^2 z\right)}\,\mathrm{d}\,z= \\
&= \frac{1}{y}\int\left[\cos^2 z+2\cos z\ \operatorname{sen}z-\ \operatorname{sen}^2 z\right]\,\mathrm{d}\,z=\frac{1}{y}\int\left[\cos 2z+\ \operatorname{sen}2z\right]\,\mathrm{d}\,z= \\
&= \frac{1}{y}\left[\frac{\operatorname{sen}2z}{2}-\frac{\cos 2z}{2}\right]=\frac{1}{2y}\left[\frac{2\operatorname{tg}z}{1+\ \operatorname{tg}^2 z}-\frac{1-\ \operatorname{tg}^2 z}{1+\ \operatorname{tg}^2 z}\right]= \\
&= \frac{1}{2y}\left[\frac{2\dfrac{x}{y}}{1+\left[\dfrac{x}{y}\right]^2}-\frac{1-\left[\dfrac{x}{y}\right]^2}{1+\left[\dfrac{x}{y}\right]^2}\right]=\frac{1}{2y}\left[\frac{2xy}{x^2+y^2}-\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\right]=\frac{x^2+2xy-y^2}{2y\left(x^2+y^2\right)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$U = \int \frac{y^2+2xy-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,\mathrm{d}\,x+\Phi\left(y\right)=\frac{x^2+2xy-y^2}{2y\left(x^2+y^2\right)}+\Phi\left(y\right)$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial\left[\dfrac{x^2+2xy-y^2}{2y\left(x^2+y^2\right)}+\Phi\left(y\right)\right]}{\partial y} \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{x^2+2xy-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}
\end{aligned}$$

de donde.

$$\frac{2\left(x-y\right)2y\left(x^2+y^2\right)-\left(x^2+2xy-y^2\right)\left[2\left(x^2+y^2\right)+4y^2\right]}{\left(2y\right)^2\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\mathrm{d}\,\Phi\left(y\right)}{\mathrm{d}\,y}=$$
$$=-\frac{x^2+2xy-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

simplificando,

$$\frac{2\left(x-y\right)y-\left(x^2+2xy-y^2\right)}{2y^2\left(x^2+y^2\right)}+\frac{\mathrm{d}\,\Phi\left(y\right)}{\mathrm{d}\,y}=0\Rightarrow-\frac{1}{2y^2}+\frac{\mathrm{d}\,\Phi\left(y\right)}{\mathrm{d}\,y}=0$$

e integrando,

$$\Phi(y) = \int \frac{1}{2y^2}\,\mathrm{d}\,y = -\frac{1}{2y} + C$$

Luego:

$$U = \frac{x^2+2xy-y^2}{2y\left(x^2+y^2\right)} + \Phi(y) = \frac{x^2+2xy-y^2}{2y\left(x^2+y^2\right)} - \frac{1}{2y} + C$$

simplificando:

$$U = \frac{1}{2y}\left[\frac{x^2+2xy-y^2}{x^2+y^2} - 1\right] + C = \frac{1}{2y}\frac{2xy-2y^2}{x^2+y^2} + C = \frac{x-y}{x^2+y^2} + C$$

$\blacksquare$

Ejercicio nº 8 *Calcular* $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, *siendo* $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2xze^{x^2+y^2}, 2yze^{x^2+y^2}, e^{x^2+y^2}\right)$ *y* γ *la curva en* $\mathbb{R}^3$ *dada por* $\mathbf{r}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$, $0 \le t \le 1$.
Indicación: probar que $\mathbf{F}$ *es conservativo,*

Solución: Probemos que es conservativo si

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2xze^{x^2+y^2}, 2yze^{x^2+y^2}, e^{x^2+y^2}\right) \equiv (X,\ Y,\ Z)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial y} &= 4xyze^{x^2+y^2} & \frac{\partial Y}{\partial x} &= 4xyze^{x^2+y^2}\\
\frac{\partial X}{\partial z} &= 2xe^{x^2+y^2} & \frac{\partial Z}{\partial x} &= 2xe^{x^2+y^2}\\
\frac{\partial Y}{\partial z} &= 2ye^{x^2+y^2} & \frac{\partial Z}{\partial y} &= 2ye^{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Determinemos la función potencial, que podemos si recordamos lo visto en el **ejercicio 6, apartado b**, tenemos

$$\begin{aligned}
\phi = & \int_{x_0}^{x} 2xz_0e^{x^2+y_0^2}\,\mathrm{d}\,x + \int_{y_0}^{y} 2yz_0e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,y + \int_{z_0}^{z} e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,z =\\
= & \ z_0e^{x^2+y_0^2} - z_0e^{x_0^2+y_0^2} + z_0e^{x^2+y^2} - z_0e^{x^2+y_0^2} + ze^{x^2+y^2} - z_0e^{x^2+y^2} =\\
= & \ ze^{x^2+y^2} - z_0e^{x_0^2+y_0^2}
\end{aligned}$$

De otro modo

$$\phi = \int 2xze^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x = ze^{x^2+y^2} + g(y,\ z)$$

por lo que

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \begin{cases} 2yze^{x^2+y^2} + \dfrac{\partial g(y,\ z)}{\partial y} \\ 2yze^{x^2+y^2} \end{cases} \to \frac{\partial g(y,\ z)}{\partial y} = 0 \to g(y,\ z) = h(z)$$

resultando

$$\phi = ze^{x^2+y^2} + h(z)$$

y

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \left\{ \begin{array}{l} e^{x^2+y^2} + \dfrac{\partial h(z)}{\partial z} \\ e^{x^2+y^2} \end{array} \right. \rightarrow \frac{\partial h(z)}{\partial z} = 0 \rightarrow h(z) = K$$

finalmente

$$\phi = ze^{x^2+y^2} + K$$

Luego la integral pedida es

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(1,\, 1,\, 1) - \phi(0,\, 0,\, 0) = e^2 - 0$$

∎

Ejercicio *n*º **9** *Sean la curva en* $\mathbb{R}^3$, $\Gamma = \left\{x^2 + y^2 = 1,\ z = y^2 - x^2\right\}$, *recorrida en sentido positivo, y el campo vectorial* $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(y^3, e^y, z\right)$.

(*a*) *Hallar* $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

(*b*) *¿Existe* f *tal que* $\nabla f = \mathbf{F}$*?*

Solución:
Ejercicio nº b, apartado a:
La curva es cerrada y es la intersección de un cilindro, $x^2 + y^2 = 1,\ z = z$, y un paraboloide, $z = y^2 - x^2$. Hallemos unas ecuaciones paramétricas de la curva

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = & \cos\theta \\ y = & \operatorname{sen}\theta \end{array} \right. ; \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = & \cos\theta \\ y = & \operatorname{sen}\theta \\ z = & \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta \end{array} \right.$$

luego

$$\begin{aligned} I = & \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\Gamma \left(\; y^3, \quad e^y, \quad z \; \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}\,x \\ \mathrm{d}\,y \\ \mathrm{d}\,z \end{pmatrix} = \\ = & \int_0^{2\pi} \left(\; \operatorname{sen}^3\theta, \quad e^{\operatorname{sen}\theta}, \quad \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta \; \right) \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{pmatrix} \mathrm{d}\,\theta = \\ = & \int_0^{2\pi} \Big(-\operatorname{sen}^4\theta + \cos\theta e^{\operatorname{sen}\theta} + \left(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta\right) 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta \Big) \mathrm{d}\,\theta = \\ = & -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^4\theta \,\mathrm{d}\,\theta + \int_0^{2\pi} \cos\theta e^{\operatorname{sen}\theta} \,\mathrm{d}\,\theta + \int_0^{2\pi} -2\cos 2\theta 2\operatorname{sen} 2\theta \,\mathrm{d}\,\theta = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

resultando

$$\begin{aligned} I_1 = & -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^4\theta \,\mathrm{d}\,\theta - 4\int_0^{\frac{\pi}{2i}} \operatorname{sen}^4\theta \,\mathrm{d}\,\theta = -2\mathrm{B}\left[\frac{5}{2},\, \frac{1}{2}\right] = -2\frac{\Gamma\left[\frac{5}{2}\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}\right]}{\Gamma[3]} = \\ = & -2\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\left(\Gamma\left[\frac{1}{2}\right]\right)^2}{2} = -\frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \cos\theta e^{\operatorname{sen}\theta} \,\mathrm{d}\,\theta = e^{\operatorname{sen}\theta}\Big|_0^{2\pi} = e^0 - e^0 = 0$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} -2\cos 2\theta 2 \operatorname{sen} 2\theta \,\mathrm{d}\,\theta = \frac{\cos^2 2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 1 - 1 = 0$$

Al no ser la integral a lo largo de una curva cerrada nula, no existe función potencial, veamos que no hay igualdad de las derivadas cruzadas, si

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(y^3, e^y, z\right) \equiv (X,\ Y,\ Z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= 3y^2 & \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial X}{\partial z} &= 0 & \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= 0 & \frac{\partial Z}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

■

Ejercicio *nº* **10** *Calcular* $\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS$ *(*$\mathbf{n}$ *la normal exterior) en los siguientes casos:*

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$ *y* S *la frontera del cubo* $0 \le x,\ y,\ z \le 1$.

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(xy, -x^2, x+z\right)$ *y* S *la porción del plano* $2x+2y+z=6$ *situada en el primer octante, si* $\mathbf{n}$ *es la normal con tercera componente positiva.*

Solución:

Ejercicio nº 10, apartado a:

Debido a la simetría existente, hallamos la integral a través de dos caras paralelas y multiplicamos el resultado por tres.

A través de la cara **ABCD** la normal es $\mathbf{n} = (1,\,0,\,0)$ y $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = x^2$ y al ser en esa cara $x=1$, es $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 1$, luego

$$\int_{\mathbf{ABCD}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ 1\cdot dS = \int_{\mathbf{ABCD}} dS = \iint_{\mathbf{ABCD}} \mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z = \int_0^1 \mathrm{d}\,y \int_0^1 \mathrm{d}\,z = 1$$

A través de la cara **EFGH** la normal es $\mathbf{n} = (-1,\,0,\,0)$ y $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -x^2$ y al ser en esa cara $x=0$, es $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 0$, luego

$$\int_{\mathbf{EFGH}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS = \int_{\mathbf{EFGH}} 0\cdot dS = 0$$

Por lo tanto el resultado final será: $3\times 1 = 3$.

Ejercicio nº 10, apartado b:

La normal al plano, si $G(x,y,z) \equiv 2x+2y+z-6=0$

$$\mathbf{n} = \frac{(G_x,\,G_y,\,G_z)}{\sqrt{G_x^2+G_y^2+G_z^2}} = \frac{(2,\,2,\,1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \left(\frac{2}{3},\,\frac{2}{3},\,\frac{1}{3}\right) \equiv (\cos\alpha,\,\cos\beta,\,\cos\gamma)$$

y

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \left(xy, -x^2, x+z\right)\cdot\left(\frac{2}{3},\,\frac{2}{3},\,\frac{1}{3}\right) = \frac{2xy-2x^2+x+z}{3}$$

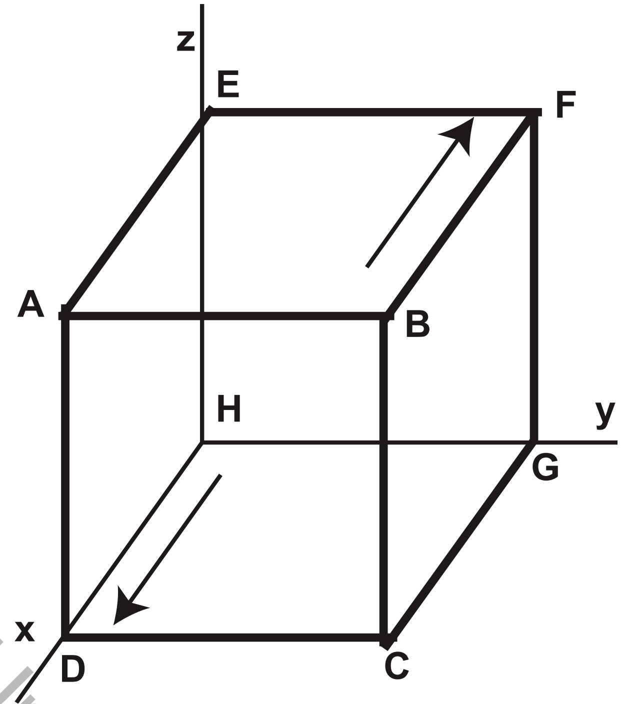

Figura 2: Ejercicio 10, apartado a

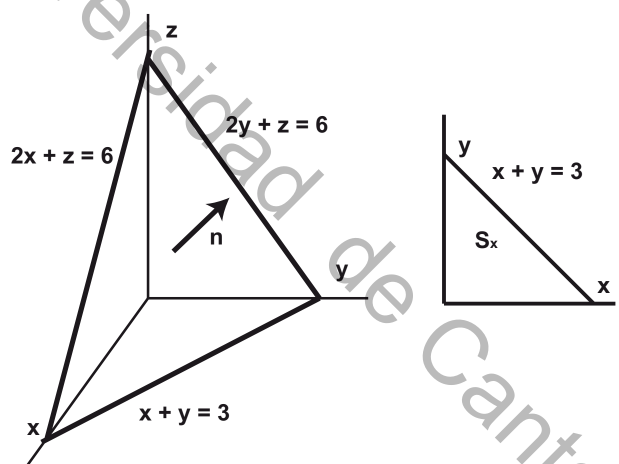

Figura 3: Ejercicio 10, apartado b

luego

$$
\begin{aligned}
I = & \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\, S = \int_S \frac{2xy - 2x^2 + x + z}{3} \, \mathrm{d}\, S = \iint_{S_x} \frac{2xy - 2x^2 + x + [6 - 2x - 2y]}{3} \, \frac{\mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y}{\cos\gamma} = \\
= & \iint_{S_x} \frac{2xy - 2x^2 + x + 6 - 2x - 2y}{3} \, \frac{\mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y}{\frac{1}{3}} = \\
= & \int_0^3 \left[\int_0^{3-x} \left(2xy - 2x^2 - x - 2y + 6 \right) \, \mathrm{d}\, y \right] \mathrm{d}\, x = \int_0^3 \left[(x-1)\, y^2 - \left(2x^2 + x - 6 \right) y \right]_0^{3-x} \mathrm{d}\, x = \\
= & \int_0^3 \left[9 + 6x - 12x\text{‘}2 + 3x^3 \right] \mathrm{d}\, x = 9x + 3x^2 - 4x^3 + 3 \frac{x^4}{3} \bigg|_0^{3-x} = \frac{3^3}{4}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Ejercicio nº 11 *Calcular* $\int_\Gamma \left(5 - xy - y^2\right) \mathrm{d}\, x \; - \; \left(2xy - x^2\right) \mathrm{d}\, y$, *siendo* Γ *el cuadrado de vértices* $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ *y* $(0,1)$, *directamente y aplicando el teorema de Green.*

Solución:

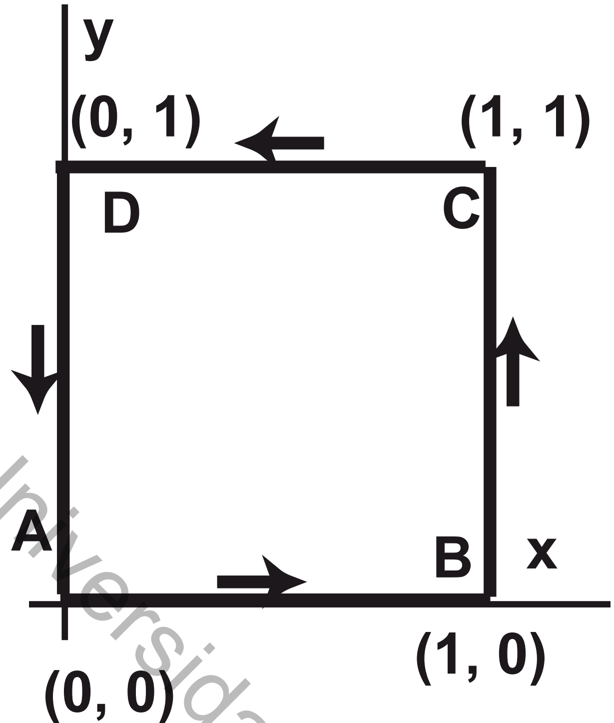

Figura 4: Ejercicio 11

Si $\left(5 - xy - y^2\right) \mathrm{d}\, x \; - \; \left(2xy - x^2\right) \mathrm{d}\, y \equiv X\,(x,\, y)\, \mathrm{d}\, x + Y\,(x,\, y)\, \mathrm{d}\, y$, será

$$
\begin{aligned}
I = & \int_{(0,0)}^{(1,0)} X\,(x,\, y)\, \mathrm{d}\, x + Y\,(x,\, y)\, \mathrm{d}\, y + \int_{(1,0)}^{(1,1)} X\,(x,\, y)\, \mathrm{d}\, x + Y\,(x,\, y)\, \mathrm{d}\, y + \\
+ & \int_{(1,1)}^{(0,1)} X\,(x,\, y)\, \mathrm{d}\, x + Y\,(x,\, y)\, \mathrm{d}\, y + \int_{(0,1)}^{(0,0)} X\,(x,\, y)\, \mathrm{d}\, x + Y\,(x,\, y)\, \mathrm{d}\, y = \\
= & \int_0^1 X\,(x,\, 0)\, \mathrm{d}\, x + \int_0^1 Y\,(1,\, y)\, \mathrm{d}\, y + \int_1^0 X\,(x,\, 1)\, \mathrm{d}\, x + \int_1^0 Y\,(0,\, y)\, \mathrm{d}\, y
\end{aligned}
$$

hagamos las cuatro integrales

$$
\begin{aligned}
I_1 = & \int_0^1 X\,(x,\, 0)\, \mathrm{d}\, x = \int_0^1 5\, \mathrm{d}\, x = 5 \\
I_2 = & \int_0^1 Y\,(1,\, y)\, \mathrm{d}\, y = -\int_0^1 (2y - 1)\, \mathrm{d}\, y = -\left(y^2 - y\right)_0^1 = 0 \\
I_4 = & \int_1^0 X\,(x,\, 1)\, \mathrm{d}\, x = \int_1^0 (5 - x - 1)\, \mathrm{d}\, x = \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)_1^0 = -4 + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2} \\
I_4 = & \int_1^0 Y\,(0,\, y)\, \mathrm{d}\, y = -\int_1^0 0\, \mathrm{d}\, y = 0
\end{aligned}
$$

luego

$$
I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 5 + 0 - \frac{7}{2} + 0 = \frac{3}{2}
$$

Aplicando el teorema de Green

$$I = \oint_C X\,\mathrm{d}\,x + Y\,\mathrm{d}\,y = \iint_D \left[\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right]\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iint_D [2x - 2y - (-x - 2y)]\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y =$$
$$= \iint_D 3x\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^1 3x\,\mathrm{d}\,x \int_0^1 \mathrm{d}\,y = \frac{3}{2}$$

■

Ejercicio $n^{\underline{o}}$ **12** *Se consideran la superficie*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, y \geq 0\right\}$$

(orientada con la normal exterior a la esfera unidad) y la función

$$\mathbf{F}\,(x, y, z) = (x + z, y + z, 2z)\,.$$

Calcular $\int_S rot\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\;\, dS$.

Solución:

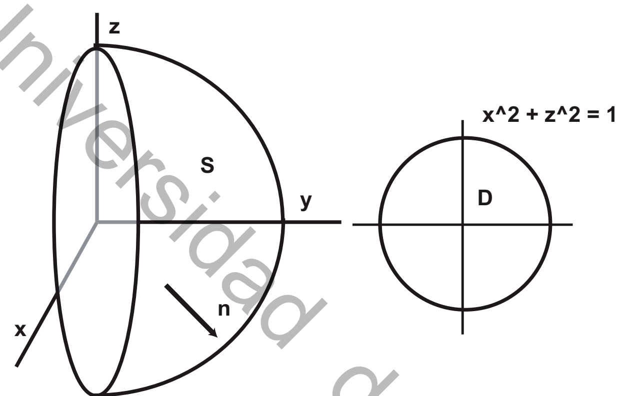

Figura 5: Ejercicio 12

Calculemos el rot$\mathbf{F}$,

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + z & y + z & 2z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(-1) + \mathbf{j}\,(1) + \mathbf{k}\,(0)$$

La normal, si $G\,(x,\, y,\, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, es

$$\mathbf{n} = \frac{(G_x,\, G_y,\, G_z)}{\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}} = \frac{(2x,\, 2y,\, 2z)}{\sqrt{2^2x^2 + 2^2y^2 + 2^2z^2}} \underset{x,\,y,\,z \in \text{ esfera}}{=} \frac{(x,\, y,\, z)}{\sqrt{1}} = (x,\, y,\, z)$$

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma,\,)$$

luego

$$I = \int_S \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\;\, dS = \int_S (-1,\, 1,\, 0) \cdot (x,\, y,\, z)\; dS = \iint_D (-x + y)\,\frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z}{\cos\beta} =$$
$$= \iint_D \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}} + 1\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z =$$
$$= -\iint_D \frac{x}{\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z + \iint_D \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z = 0 + \pi$$

La integral $\iint_D \frac{x}{\sqrt{1-(x^2+z^2)}}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z$ es nula, ya que se trata de una función impar en x, el dominio es simétrico respecto a $x=0$, y par la función en z, el dominio es simétrico respecto a $z=0$.

Si lo hacemos hallando la circulación del vector

$$\oint_C (x+z\,y+z,\,2z)\cdot(\mathrm{d}\,x,\,\mathrm{d}\,y,\,\mathrm{d}\,z)$$

siendo $C=\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y=0 \end{cases}$, que en coordenadas paramétricas,

$C=\begin{cases} x=\operatorname{sen}\theta & \to \quad \mathrm{d}\,x=\cos\theta\,\mathrm{d}\,\theta \\ z=\cos\theta & \to \quad \mathrm{d}\,z=-\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\,\theta \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$. La parametrización se ha realizado de forma que al recorrer la curva "veamos" la normal a la superficie "saliendo" de la superficie, ver la figura 6. Luego

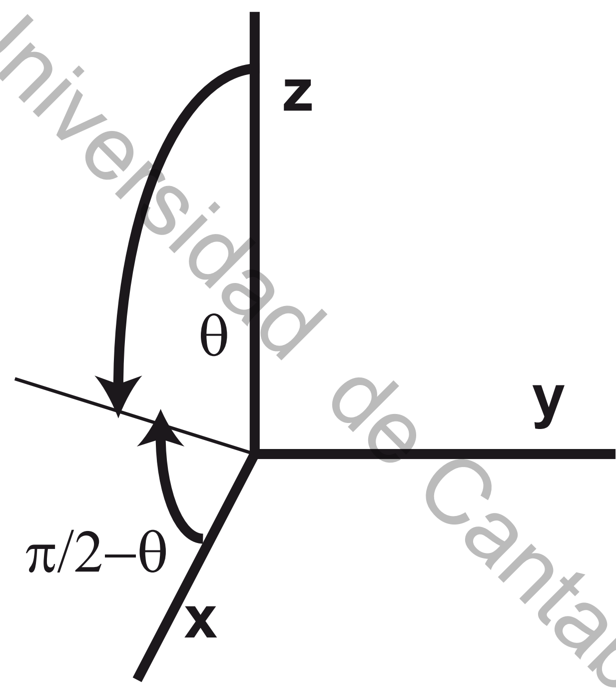

Figura 6: Ejercicio 12

$$\begin{aligned}
I = & \oint_C (x+z\,y+z,\,2z)\cdot(\mathrm{d}\,x,\,\mathrm{d}\,y,\,\mathrm{d}\,z) = \\
= & \int_0^{2\pi} (\cos\theta+\operatorname{sen}\theta,\,0+\cos\theta,\,2\cos\theta)\cdot(\cos\theta,\,-\operatorname{sen}\theta,\,0)\,\mathrm{d}\,\theta = \\
= & \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\,\theta = 2\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta + \left.\frac{\cos^2\theta}{2}\right|_0^{2\pi} = \\
= & \, 2\mathrm{B}\left[\frac{3}{2},\,\frac{1}{2}\right]+0 = 2\frac{\Gamma\left[\frac{3}{2}\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}\right]}{\Gamma\,[2]} = 2\frac{1}{2}\left(\Gamma\left[\frac{1}{2}\right]\right)^2 = \pi
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\, S = \int_V \text{div} \, (\text{rot } \mathbf{F}) \, \mathrm{d}\, V$$

siendo S la superficie que encierra al volumen V, al ser rot $\mathbf{F}$ un vector constante es div (rot $\mathbf{F}$) = 0, luego

$$\int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\, S = 0$$

La superficie tiene dos partes. $S_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{array} \right.$ y $S_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y > 0 \end{array} \right.$, por tanto

$$0 = \int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\, S = \int_{S_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\, S_1 + \int_{S_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\, S_2$$

$$\int_{S_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\, S_2 = -\int_{S_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\, S_1 = -\int_{S_1} (-1,\, 1,\, 0) \cdot (0,\, -1,\, 0) \, \mathrm{d}\, S_1 = -\,(-\pi) = \pi$$

$\blacksquare$

Ejercicio nº 13 *Utilizando el teorema de Stokes calcular la integral* $\int_S \mathit{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; dS$ *en los siguientes casos, donde* S *está orientada según la normal exterior:*

(a) $\mathbf{F}\,(x, y, z) = \left(x^2y^2,\, yz,\, xy\right)$ *y* S *el paraboloide* $z = a^2 - x^2 - y^2,\ z \geq 0.$

(b) $\mathbf{F}\,(x, y, z) = ((1 - z)\, y,\, ze^x,\, x \,\text{sen}\, z)$ *y* S *es la semiesfera superior de radio* a.

(c) $\mathbf{F}\,(x, y, z) = \left(x^3 + z^3,\, e^{x+y+z},\, x^3 + y^3\right)$ *y* $S = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, y \geq 0\right\}.$

Solución:
Ejercicio nº 13, apartado a. Si $C \equiv x^2 + y^2 = a^2$, la circulación,

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\mathrm{s} = \int_C \left(x^2y^2,\, 0,\, xy\right) \cdot (\mathrm{d}\, x,\, \mathrm{d}\, y,\, 0) = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(a^4 \cos^2\theta \,\text{sen}^2\,\theta,\, 0,\, a^2 \cos\theta \,\text{sen}\,\theta\right) \cdot (-a \,\text{sen}\,\theta,\, a\cos\theta,\, 0)\, \mathrm{d}\,\theta = \\
&= -\int_0^{2\pi} a^5 \cos^2\theta \,\text{sen}^3\,\theta \,\mathrm{d}\,\theta = 0
\end{aligned}$$

Ejercicio nº 13, apartado b. Si $C \equiv x^2 + y^2 = a^2$, la circulación,

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\mathrm{s} = \int_C ((1 - 0)\, y,\, 0,\, x \,\text{sen}\, 0) \cdot (\mathrm{d}\, x,\, \mathrm{d}\, y,\, 0) = \\
&= \int_0^{2\pi} a\,(\text{sen}\,\theta,\, 0,\, 0) \cdot a\,(-\,\text{sen}\,\theta,\, \cos\theta,\, 0)\, \mathrm{d}\,\theta = -\int_0^{2\pi} \text{sen}^2\,\theta \,\mathrm{d}\,\theta = \\
&= -2a^2 \mathrm{B}\left[\frac{3}{2},\, \frac{1}{2}\right] = -2a^2 \frac{\Gamma\left[\frac{3}{2}\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}\right]}{\Gamma\,[2]} = -2a^2 \frac{1}{2}\left(\Gamma\left[\frac{1}{2}\right]\right)^2 = -\pi a^2
\end{aligned}$$

Ejercicio nº 13, apartado c. Si $C \equiv x^2 + z^2 = 1$, la circulación,

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\,\mathrm{s} = \int_C \left(x^3 + z^3,\, e^{x+0+z},\, x^3 + 0\right) \cdot (\mathrm{d}\, x,\, 0,\, \mathrm{d}\, z) = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\text{sen}^3\,\theta + \cos^3\theta,\, e^{\text{sen}\,\theta + 0 + \cos\theta},\, \text{sen}^3\,\theta\right) \cdot (\cos\theta,\, 0,\, -\,\text{sen}\,\theta)\, \mathrm{d}\,\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\text{sen}^3\,\theta \cos\theta + \cos^4\theta - \text{sen}^3\,\theta\right] \mathrm{d}\,\theta = 0
\end{aligned}$$

La parametrización de la curva es la misma que está expresada en el ejercicio nº 12 en la figura 6.

∎

Ejercicio *nº* **14** *Considerar el campo vectorial*

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(y,\ x^2,\ \left(x^2+y^4\right)^{3/2}\operatorname{sen}\left(e^{\sqrt{xyz}}\right)\right).$$

Calcular $\displaystyle\int_S \mathit{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS$*, donde* S *denota la normal interior al semielipsoide*

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 4x^2+9y^2+36z^2=36,\ z\geq 0\right\}.$$

Solución:

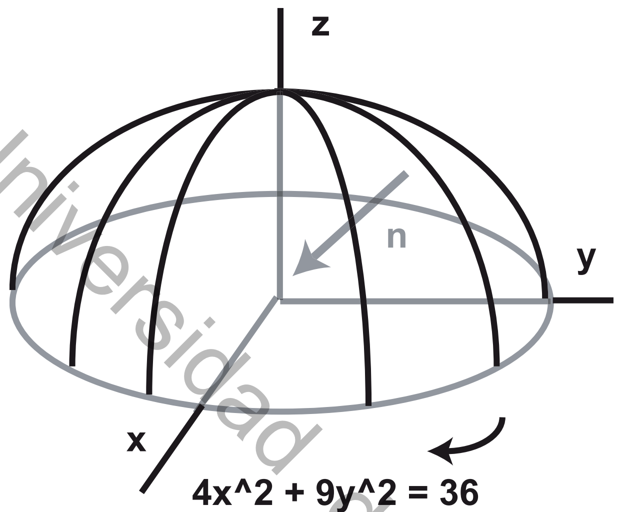

Figura 7: Ejercicio 14

Al ser la normal la "interior", el sentido de recorrido de la curva es el antihorario, por lo que la parametrización de la curva ha de ser

$$4x^2+9y^2=36\rightarrow\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1\rightarrow\begin{cases}x=3\operatorname{sen}\theta\\ y=2\cos\theta\end{cases}$$

luego

$$\begin{aligned}I=&\int_C\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\,\mathbf{s}=\\=&\int_0^{2\pi}\left(2\cos\theta,\ 3^2\operatorname{sen}^2\theta,\ \left(3^2\operatorname{sen}^2\theta+2^4\cos^4\theta\right)^{3/2}\operatorname{sen}\left(e^{\sqrt{3\operatorname{sen}\theta\, 2\cos\theta\, 0}}\right)\right)\cdot\left(3\cos\theta,\ -2\operatorname{sen}\theta,\ 0\right)\mathrm{d}\,\theta\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}I=&\int_0^{2\pi}\left(6\cos^2\theta-18\operatorname{sen}^3\theta\right)\mathrm{d}\,\theta=6\int_0^{2\pi}6\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta-0=6\times 2\times 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\,\theta=\\=&\ 12\mathrm{B}\left[\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]=12\frac{\Gamma\left[\frac{3}{2}\right]\Gamma\left[\frac{1}{2}\right]}{\Gamma[2]}=12\frac{1}{2}\left(\Gamma\left[\frac{1}{2}\right]\right)^2=6\pi\end{aligned}$$

∎

Ejercicio nº 15 *Verificar el teorema de Stokes para* $\mathbf{F}(x,y,z)=(y^2,xy,xz)$ *en el paraboloide* $z=a^2-x^2-y^2,\ z\geq 0.$

Solución: El rot$\mathbf{F}$ es

$$\mathrm{rot}\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & xy & xz\end{vmatrix}=\mathbf{i}\,(0)+\mathbf{j}\,(-z)+\mathbf{k}\,(-y)$$

La normal a la superficie, $G\,(x,\,y,\,z)\equiv x^2+y^2+z-a^2=0$

$$\mathbf{n}=\frac{(2x,\,2y,\,1)}{\sqrt{1+4\,(x^2+y^2)}}$$

luego el flujo del rotacional es

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\,S=\iint_S(0,\,-z,\,-y)\cdot\frac{(2x,\,2y,\,1)}{\sqrt{1+4\,(x^2+y^2)}}\,\mathrm{d}\,S=\\ &= -\iint_S\frac{y\,(2z+1)}{\sqrt{1+4\,(x^2+y^2)}}\frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{\cos\gamma}=-2\iint_D y\left(1+2a^2-2x^2-2y^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\end{aligned}$$

donde $D=\left\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\middle|\,x^2+y^2\leq a^2\right\}$, que es simétrico respecto a $y=0$ y al ser la función subintegral impar en y, la integral es nula.

Si hallamos la circulación del vector $\mathbf{F}$ a lo largo de $C=\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}$, será

$$\oint_C\mathbf{F}\cdot(\mathrm{d}\,x,\,\mathrm{d}\,y,\,\mathrm{d}\,z)=\oint_C\left(y^2,\,xy,\,xz\right)\cdot(\mathrm{d}\,x,\,\mathrm{d}\,y,\,\mathrm{d}\,z)$$

si usamos la parametrización siguiente de la curva: $\begin{cases}x=a\cos\theta & \to \quad \mathrm{d}\,x=-a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\,\theta\\ y=a\,\mathrm{sen}\,\theta & \to \quad \mathrm{d}\,y=a\cos\theta\,\mathrm{d}\,\theta\\ 0\leq\theta\leq 2\pi\end{cases}$, es

$$\oint_C\mathbf{F}\cdot(\mathrm{d}\,x,\,\mathrm{d}\,y,\,\mathrm{d}\,z)=\int_0^{2\pi}\left(-a^3\,\mathrm{sen}^3\,\theta+a^3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\mathrm{d}\,\theta=0$$

∎

Ejercicio nº 16 *Sea el sólido* K

$$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\,0\leq z\leq 4-2x^2-2y^2\right\}.$$

a) *Calcular su volumen.*

b) *Calcular el flujo del campo vectorial* $F=(x,y,2z)$ *a través de la superficie que limita a* K.

Solución:

a) Para calcular el volumen del sólido podemos utilizar, por ejemplo, coordenadas cilíndricas: $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z$, con $0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\rho\leq\sqrt{2}$ y $0\leq z\leq 4-2x^2-2y^2=4-2\rho^2$. El jacobiano de esta transformación de coordenadas es $|J|=\rho$. De este modo:

$$V_K=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{4-2\rho^2}\rho dz\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\rho\left(4-2\rho^2\right)d\rho\,d\theta=2\pi 2=4\pi.$$

b) El flujo del campo vectorial que nos dan se puede calcular directamente: la superficie que limita al sólido está formada por la superficie lateral y la "tapa" en el plano XY. El flujo a través de la superficie lateral (que se puede parametrizar en las variables cartesianas x, y) es 16π, mientras que el flujo a través de la tapa es 0. De modo que el flujo del campo vectorial es 16π.

Otra opción muy sencilla una vez calculado el volumen del sólido es utilizar el Teorema de la divergencia:

$$\int_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, dS = \int_V div(\mathbf{F})\, dV.$$

Como, en este caso, $div(\mathbf{F}) = 4$, resulta que el flujo que nos piden es simplemente 4 veces el volumen del sólido que hemos obtenido en el apartado anterior; es decir, 16π.

∎

Ejercicio nº 17 *Supongamos que la temperatura en cada punto del espacio sea proporcional al cuadrado de la distancia al eje vertical y consideremos el dominio*

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 2z,\ z \leq 2\right\}.$$

(a) *Calcular el volumen de V.*

(b) *Calcular la temperatura promedio en V.*

(c) *Calcular el flujo del gradiente de temperatura a través (y hacia afuera), de ∂V.*

Solución:
Ejercicio nº 17, apartado a.
Si $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, x^2 + y^2 \leq 4\right\}$, el volumen viene dado por

$$V = \iint_D \left[2 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \mathrm{d}\,x\, \mathrm{d}\,y$$

que haciendo un cambio a coordenadas polares, $D_1 = \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$, luego

$$V = \iint_D \left[2 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \mathrm{d}\,x\, \mathrm{d}\,y = \int_0^2 \left[2 - \frac{\rho^2}{2}\right] \rho\, \mathrm{d}\,\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta = \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{8}\right]_0^2 2\pi = 4\pi$$

Ejercicio nº 17, apartado b.
En cada punto del espacio la temperatura es $t = K\left(x^2 + y^2\right)$, luego la "suma de las temperaturas" será

$$\begin{aligned} T = & \iiint_V t\, \mathrm{d}\,x\, \mathrm{d}\,y\, \mathrm{d}\,z = K \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \left[2 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \mathrm{d}\,x\, \mathrm{d}\,y = \\ = & K \int_0^2 \left[2 - \frac{\rho^2}{2}\right] \rho^3\, \mathrm{d}\,\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta = K \left[\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{12}\right]_0^2 2\pi = 2\pi K \left[8 - \frac{16}{3}\right] = \frac{16K\pi}{3} \end{aligned}$$

luego la temperatura media,

$$t_m = \frac{T}{V} = \frac{\frac{16K\pi}{3}}{4\pi} = \frac{4K}{3}$$

Ejercicio nº 17, apartado c.
El gradiente de $t = K\left(x^2 + y^2\right)$ es

$$\nabla t = K\,(2x,\,2y,\,0)$$

y la normal a la superficie es

$$\begin{cases} \text{superficie curva:} & S_1 \equiv x^2 + y^2 - z = 0 & \mathbf{n} = \dfrac{(2x,\,2y,\,-1)}{\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}} \\ \text{plano:} & S_2 \equiv z - 2 = 0 & \mathbf{n} = (0,\,0,\,1) \end{cases}$$

luego si S es la superficie que encierra al volumen V

$$\begin{aligned} \Phi = & \int_S \nabla t \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}\,S = \\ = & \int_{S_1} K\,(2x,\,2y,\,0) \cdot \frac{(2x,\,2y,\,-1)}{\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}}\,\mathrm{d}\,S_1 + \int_{S_2} K\,(2x,\,2y,\,0) \cdot (0,\,0,\,1)\,\mathrm{d}\,S_2 = \\ = & \iint_D K \frac{4x^2+4y^2}{\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}}\,\frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{\cos\gamma} = \\ = & \; 4K \iint_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = 4K \int_0^2 \rho^3\,\mathrm{d}\,\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\theta = 4K \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2 2\pi = 32K\pi \end{aligned}$$

∎