## Hoja 3 de Problemas

**1.-** Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

(*a*) $y^{(2} + y^{(1} - 2y = 0.$

(*b*) $y^{(2} - 4y^{(1} + 5y = 0.$

(*c*) $y^{(4} + 2y^{(2} + y = 0.$

(*d*) $y^{(3} - y^{(2} - y^{(1} + y = 0.$

(*e*) $y^{(5} - 10y^{(3} + 9y^{(1} = 0.$

**2.-** Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

(*a*) $y^{(2} + 3y^{(1} - 10y = 6e^{4x}.$

(*b*) $y^{(2} - 2y^{(1} + 5y = 25x^2 + 12.$

(*c*) $y^{(2} - y^{(1} - 6y = 20e^{-2x}.$

(*d*) $y^{(2} - 3y^{(1} + 2y = 3\operatorname{sen} 2x.$

**3.-** Hallar las soluciones de los problemas de valores iniciales siguientes:

(*a*) $\begin{cases} y^{(2} + 2y^{(1} + 2y = xe^{-x} \\ y(0) = y^{(1}(0) = 0 \end{cases}.$

(*b*) $\begin{cases} y^{(3} - 2y^{(2} + 10y^{(1} = 0 \\ y(0) = 0;\ \ y^{(1}(0) = 1;\ \ y^{(2}(0) = -8 \end{cases}.$

(*c*) $\begin{cases} y^{(3} + 2y^{(2} + 5y^{(1} = 5x \\ y(0) = y^{(1}(0) = 0;\ \ y^{(2}(0) = \dfrac{1}{5} \end{cases}.$

**4.-** Resolver las siguientes ecuaciones mediante reducción de orden (determinar previamente una solución particular):

(*a*) $xy^{(2} - (1+2x)\left(y^{(1}\right) + 2y = 0.$

(*b*) $xy^{(2} - (1+x)\left(y^{(1}\right) + y = 0.$

**5.-** Resolver las siguientes ecuaciones y problemas de valores iniciales, reduciendo su orden mediante un cambio de la forma $p(x) = y^{(k}(x)$:

(*a*) $y^{(5} - \dfrac{1}{x}y^{(4} = 0.$

(*b*) $y^{(2} = \left(y^{(1}\right)^2.$

(*c*) $yy^{(2} = y^2y^{(1} + \left(y^{(1}\right)^2;\ y(0) = 2;\ y^{(1}(0) = 2.$

(d) $y^{(2} = y^{(1} e^y$; $y(0) = 2$; $y^{(1}(x) = 2$.

**6.-** Hallar los desarrollos en serie de las soluciones alrededor del punto $x = 0$ de las ecuaciones:

1. $y^{(1} + xy = 0$.
2. $xy^{(1} - y = x^2 \cos x$.

**7.-** Hallar los 5 primeros términos del desarrollo en serie en torno al origen de la solución de la ecuación diferencial $y^{(2} + y^{(1} - xy = 0$ que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$; $y^{(1}(0) = 1$.

**8.-** Hallar la solución general de la ecuación diferencial $\left(1 + t^2\right) y^{(2} + 2ty^{(1} - 2y = 0$ en términos de series de potencias de $t$.

**9.-** Indicar si las siguientes ecuaciones tienen puntos singulares o no. Clasificarlos y escribir la ecuación indicial cuando corresponda.

1. $x^2 y^{(2} - 2y = 0$;
2. $x^2 y^{(2} - 2xy^{(1} + 2y = 0$;
3. $xy^{(2} + e^x y^{(1} + 3y \cos x = 0$;
4. $xy^{(2} + 2y^{(1} + 4y = 0$;
5. $x \operatorname{sen} x \, y^{(2} + 3y^{(1} + xy = 0$;
6. $\operatorname{sen} x \, y^{(2} + xy^{(1} + 4y = 0$.

**10.-** Hallar dos soluciones en serie de Frobenius independientes para cada una de las siguientes ecuaciones.

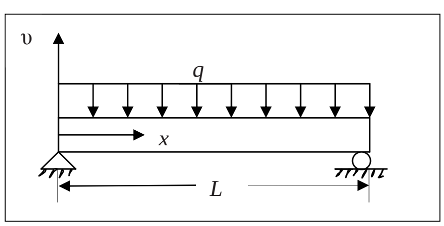
1. $xy^{(2} + 2y^{(1} + xy = 0$;
2. $2xy^{(2} + (x+1) y^{(1} + y = 0$;
3. $xy^{(2} - y^{(1} + 4x^3 y = 0$.

**11.-** Resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{r} y' = 0 \\ y(1/2) = 0, \; y(1) = 3, \end{cases}$$

que aparece en la distribución radial de temperatura en el anillo $\{1/2 \leq r \leq 1\}$, con temperatura fija en los bordes.

**12.-** Consideremos una varilla sujeta por ambos extremos




La curvatura $v$ de una varilla como función de $x$ debida a una carga uniforme $q$ puede expresarse mediante la siguiente EDO

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{qx}{2EI}(x - L).$$

donde

$L$ es la longitud de la varilla,
$E$ es el módulo de Young de la varilla, e
$I$ es el segundo momento de la sección de la varilla.

Asumamos que las condiciones de contorno de nuestro problema vienen expresadas por

$$v(0) = 0, \;\; v(L) = 0,$$

lo que describiría una varilla con extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$.
Considerando $L = q = I = E = 1$, se pide obtener la solución exacta del problema integrando la EDO y determinando el valor de las constantes utilizando las condiciones del problema.

**13.-** Resolver de manera exacta los siguientes problemas de contorno:

**a)**

$$\begin{cases} -u'' = e^x, \;\; x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

**b)**

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left((1+x)\frac{du}{dx}(x)\right) = 1, \;\; x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases}$$