GEOMETRÍA BÁSICA

TEMA IV - ESTUDIO DEL TRIÁNGULO

1. CONCEPTOS BÁSICOS. CRITERIOS DE CONGRUENCIA
2. RELACIONES ENTRE LADOS Y ÁNGULOS
3. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON REGLA Y COMPÁS

1. CONCEPTOS BÁSICOS. CRITERIOS DE CONGRUENCIA

Ya hemos visto varios conceptos y teoremas relativos a los triángulos. En este y en el siguiente tema, completaremos con algunos más.

<u>Clasificación de triángulos según sus lados y según sus ángulos</u>. Un triángulo se dice isósceles si posee dos lados con igual longitud. Si ABC es un triángulo isósceles donde los lados AC y BC tienen la misma longitud, entonces se dice que ABC es isósceles de base AB y laterales AC y BC.

Un triángulo se dice *equilátero* si tiene todos sus lados iguales. Si un triángulo tiene todos sus lados desiguales se dice *escaleno*.

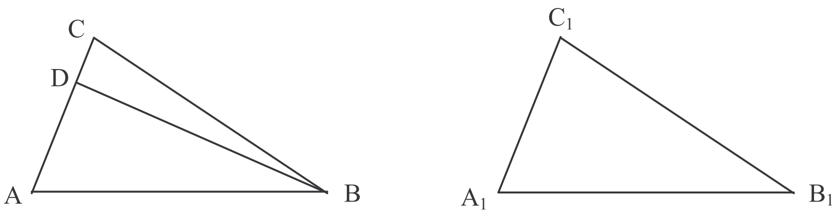
Si un triángulo tiene todos sus ángulos agudos se dice *acutángulo*. Si posee un ángulo recto se dice *triángulo rectángulo*. Y si posee un ángulo obtuso se dice *obtusángulo*.

Segundo Criterio de congruencia de triángulos (ALA)

Si dos triángulos ΔABC y $\Delta A_1B_1C_1$ verifican $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\hat{A} = \hat{A}_1$ y $\hat{B} = \hat{B}_1$, entonces los triángulos son iguales.

Dem.: Probaremos que $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, por reducción al absurdo, y luego aplicaremos el primer criterio de congruencia.

Supongamos $\overline{AC} \neq \overline{A_1C_1}$. Será, por ejemplo, $\overline{AC} > \overline{A_1C_1}$. Construimos sobre $\overline{AC}$ el segmento $\overline{AD} = \overline{A_1C_1}$.



Por el primer criterio de congruencia, ΔABD y $\Delta A_1B_1C_1$ son iguales. Entonces $A\hat{B}D = \hat{B}_1$. Pero como $\hat{B}_1 = \hat{B}$, será $A\hat{B}D = \hat{B}$. Pero como D está entre A y C, entonces $A\hat{B}D < \hat{B}$; una contradicción. Luego $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$ y por el primer criterio de congruencia (LAL), ΔABC y $\Delta A_1B_1C_1$ son iguales.□

Teorema: Un triángulo es isósceles si y solo si tiene dos ángulos iguales.

Dem.: Sea ΔABC tal que $\overline{AC} = \overline{BC}$. Si comparamos ΔABC y ΔBAC, teniendo en cuenta que $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{BC} = \overline{AC}$ y $\hat{C} = \hat{C}$, se deduce, por el primer criterio de congruencia, que $\Delta ABC = \Delta BAC$. Entonces $\hat{A} = \hat{B}$.

Recíprocamente, supongamos que en ΔABC es $\hat{A} = \hat{B}$. Comparamos nuevamente los triángulos ΔABC y ΔBAC. Ahora, $\overline{AB} = \overline{BA}$, $\hat{A} = \hat{B}$ y $\hat{B} = \hat{A}$. Aplicando el segundo criterio de congruencia, resulta $\Delta ABC = \Delta BAC$ y entonces $\overline{AC} = \overline{BC}$.□

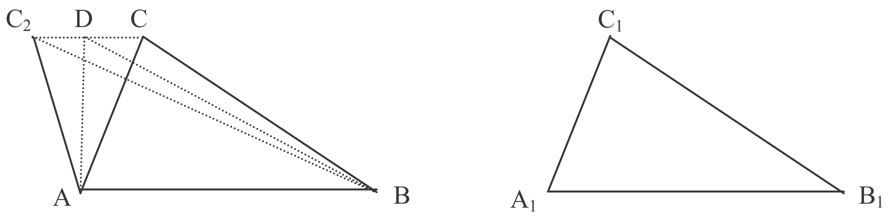
Teorema: En un triángulo isósceles la mediana relativa a la base es bisectriz y altura.

Dem.: Sea ΔABC un triángulo isósceles de base $\overline{AB}$ y sea M el punto medio de la base, de modo que $\overline{CM}$ es la mediana correspondiente. Como $\overline{AM} = \overline{MB}$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ y $\hat{A} = \hat{B}$, del primer criterio de congruencia se deduce que $\Delta CAM = \Delta CBM$. Entonces $M\hat{C}A = M\hat{C}B$, es decir, $\overline{CM}$ es la bisectriz del ángulo $\hat{C}$. Además, como los ángulos $A\hat{M}C$ y $B\hat{M}C$ son adyacentes e iguales, son ángulos rectos. Entonces CM es perpendicular a AB y $\overline{CM}$ es altura del triángulo.□

Tercer Criterio de congruencia de triángulos (LLL)

Si dos triángulos ΔABC y $\Delta A_1B_1C_1$ verifican $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$ y $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$, entonces los triángulos son iguales.

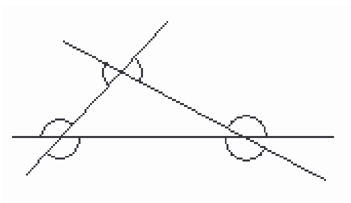
Dem.: Demostramos primero, por reducción al absurdo, que $\hat{A} = \hat{A}_1$. Supongamos $\hat{A} \neq \hat{A}_1$. En el semiplano AB_C sea el punto C_2, tal que $B\hat{A}C_2 = \hat{A}_1$, C_2 está en el mismo semiplano que C con respecto a AB y $\overline{AC_2} = \overline{A_1C_1} = \overline{AC}$.



Por el primer criterio de congruencia $\Delta ABC_2 = \Delta A_1B_1C_1$. Entonces $\overline{BC_2} = \overline{B_1C_1} = \overline{BC}$. Por tanto ΔCC_2A y ΔCC_2B son isósceles y tienen la misma base $\overline{CC_2}$. Sea D el punto medio de $\overline{CC_2}$. Los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ son medianas de dichos triángulos relativas a la base, y por el teorema anterior son alturas de los triángulos. Entonces, AD y BD son dos perpendiculares a CC_2 que pasan por D; esto es imposible. Por lo tanto, $\hat{A} = \hat{A}_1$ y aplicando el primer criterio de congruencia (LAL) resulta $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. □

2. RELACIONES ENTRE LADOS Y ÁNGULOS

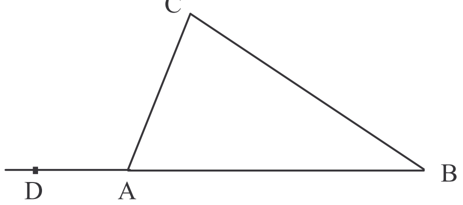
Un *ángulo exterior* de un triángulo es un ángulo adyacente a uno de los ángulos del triángulo. En cada vértice del triángulo hay dos ángulos exteriores, que son opuestos por el vértice.



Una vez visto el criterio de rectas paralelas se obtuvo como consecuencia que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a uno llano, de lo que se obtiene a su vez la siguiente:

Proposición: En todo triángulo, cualquier ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.

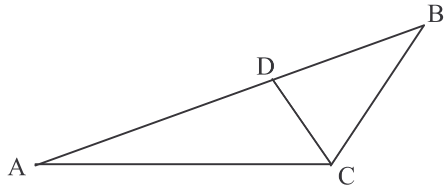
Dem.: En ΔABC, consideramos por ejemplo el ángulo exterior $D\hat{A}C$ adyacente a $\hat{A}$. Entonces $D\hat{A}C + \hat{A} = 180º$ y como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$, se deduce que $D\hat{A}C = \hat{B} + \hat{C}$.□



Consecuencia: En un triángulo, cualquier ángulo exterior es mayor que cualquiera de los dos ángulos interiores no adyacentes.

***Teorema**:* En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo, y recíprocamente.

Dem.: En ΔABC supongamos que $\overline{AB} > \overline{BC}$. Sea D el punto de $\overline{AB}$ tal que $\overline{BD} = \overline{BC}$.



$B\hat{C}D < \hat{C}$ y como ΔBCD es isósceles, $B\hat{C}D = B\hat{D}C$. Además $B\hat{D}C$ es ángulo exterior de ΔADC y entonces $B\hat{D}C > \hat{A}$. Por tanto, $\hat{C} > \hat{A}$.

Recíprocamente, supongamos $\hat{C} > \hat{A}$. Si fuera $\overline{AB} = \overline{BC}$, sería $\hat{C} = \hat{A}$. Si fuera $\overline{AB} < \overline{BC}$, aplicando la primera parte de esta demostración, resultaría $\hat{C} < \hat{A}$. Entonces, si $\hat{C} > \hat{A}$ solo puede ser $\overline{AB} > \overline{BC}$.□

***Teorema**:* La suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercer lado.

Dem.: Consideramos ΔABC y vamos a probar que $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$. Sea D un punto de la semirrecta A_C tal que $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{BC}$, de modo que $\overline{CD} = \overline{BC}$. Entonces ΔBCD es isósceles y $C\hat{B}D = \hat{D}$. Como $A\hat{B}D > C\hat{B}D$, entonces $A\hat{B}D > \hat{D}$. Aplicando el teorema anterior a ΔABD, resulta $\overline{AD} > \overline{AB}$, es decir, $\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AB}$.□

3. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON REGLA Y COMPÁS

Estos son problemas clásicos en los que se trata de construir una figura geométrica usando solamente la regla no graduada y el compás. La solución del problema consiste no tanto en la construcción de la figura como en explicar el modo de realizarla y en efectuar la demostración correspondiente. El problema se considera resuelto si se ha señalado el método de construcción de la figura y se ha demostrado que realizando los pasos indicados se obtiene efectivamente la figura con las propiedades pedidas.

<u>La regla como instrumento de construcciones geométricas permite trazar</u>

- una recta cualquiera,
- una recta cualquiera que pasa por un punto y
- una recta que pasa por dos puntos dados

<u>Con la regla no se puede realizar</u> ninguna otra operación: no se pueden construir segmentos, no pueden utilizarse simultáneamente ambos bordes de la regla, etc.

Con el compás podemos describir desde un centro la circunferencia de radio dado. En particular, el compás permite construir el segmento igual a un segmento dado, en una semirrecta dada y a partir de un punto dado.

Construcción de un segmento congruente a uno dado

Se tiene un segmento $\overline{AB}$ y una semirrecta con origen en un punto O y se quiere dibujar un segmento sobre la semirrecta, con un extremo en O y cuya longitud sea la de $\overline{AB}$. Con el compás se pincha en A y se abre hasta B. Manteniendo la abertura del compás, se pincha en O y se dibuja el corte C de la semirrecta con la circunferencia de centro O y radio igual a $\overline{AB}$. Entonces $\overline{OC}$ es el segmento buscado.

Construcción de un ángulo congruente a uno dado

Dado un ángulo $B\hat{A}C$, una semirrecta O_D y un semiplano α determinado por la recta OD, se quiere construir un ángulo con vértice O, un lado la semirrecta O_D, con medida igual a $B\hat{A}C$ y contenido en α.

Con centro en A se dibuja una circunferencia, que cortará a los lados de $B\hat{A}C$ en puntos P_1 y P_2. Manteniendo la abertura del compás se dibuja una dibuja una circunferencia con centro en O y con el mismo radio que la anterior. Esta circunferencia corta a O_D en un punto Q_1. Se pincha el compás en P_1 y se abre hasta P_2. Con esta medida, se dibuja una circunferencia con centro en Q_1. Esta circunferencia corta a la circunferencia anterior en dos puntos. Uno de estos puntos está en el semiplano α y lo llamamos Q_2. Entonces $Q_2\hat{O}Q_1$ es el ángulo buscado.

En efecto, $\overline{AP_1} = \overline{OQ_1}$, $\overline{AP_2} = \overline{OQ_2}$ y $\overline{P_1P_2} = \overline{Q_1Q_2}$, de donde, por el tercer criterio de congruencia, $\Delta P_2AP_1 = \Delta Q_2OQ_1$ y entonces $Q_2\hat{O}Q_1 = P_2\hat{A}P_1 = B\hat{A}C$.

Construcción del punto medio y de la mediatriz de un segmento.

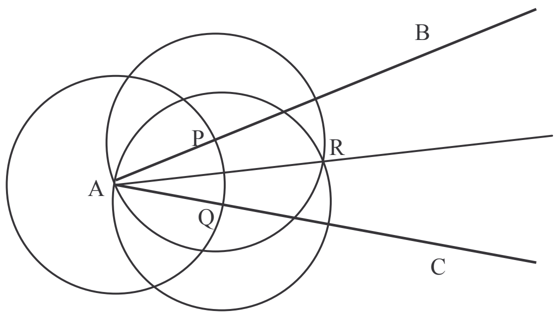
Dado un segmento $\overline{AB}$ se quiere construir el punto medio M y la mediatriz. Se dibuja la circunferencia con centro en A y radio $\overline{AB}$, y luego la circunferencia con centro en B y radio $\overline{AB}$. Estas circunferencias se cortan en dos puntos P y Q. La recta PQ es la mediatriz de $\overline{AB}$ y la intersección de PQ con $\overline{AB}$ es el punto medio M.

En efecto, la distancia de P a A es igual a la distancia de P a B, pues las dos circunferencias tienen el mismo radio. Entonces P está en la mediatriz. Del mismo modo, se ve que Q está en la mediatriz.

Construcción de la bisectriz de un ángulo.

Dado un ángulo $B\hat{A}C$, trazamos una circunferencia de centro A, que cortará a los lados del ángulo en puntos P y Q, respectivamente. Con la misma abertura del compás se dibuja una circunferencia con centro en P y otra con centro en Q. Estas dos circunferencias se cortan en un punto R. La semirrecta A_R es la bisectriz del ángulo.

Se deja como ejercicio demostrar que esto es correcto.



Construcción de un triángulo de lados dados (teniendo en cuenta el resultado relativo a circunferencias).

Dados tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, se quiere construir un triángulo ΔABC tal que, $\overline{AC} = \overline{PQ}$ y $\overline{BC} = \overline{RS}$. Se supone que $\overline{PQ} + \overline{RS} > \overline{AB}$. Se pincha con el compás en P y se abre hasta Q. Con esta abertura se traza una circunferencia con centro en A. Luego se pincha con el compás en R y se abre hasta S. Con esta abertura se traza una circunferencia con centro en B. Estas circunferencias se cortan en dos puntos. Si llamamos C a uno de ellos entonces ΔABC es el triángulo buscado. Probarlo como ejercicio.

Tres problemas clásicos

Los matemáticos griegos se interesaron por tres problemas de construcciones geométricas: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.

1. <u>La duplicación del cubo</u>. El problema consiste en calcular el lado de un cubo que tuviera doble volumen que otro dado previamente. El lado que se buscaba debía ser obtenido a partir del primitivo mediante la regla y el compás. Cuenta la tradición que una epidemia asoló Atenas hacia el 428 a.C. Para acabar con ella se consultó el oráculo de Apolo, en Delos, y el oráculo respondió que debían duplicar el volumen del altar de Apolo, que tenía forma de cubo. Los atenienses duplicaron las dimensiones del altar y entonces el volumen se multiplicó por 8. Ciertamente, la epidemia no desapareció. Varios geómetras ofrecieron soluciones matemáticas parciales y aproximadas del problema que, sin duda, contribuyeron al desarrollo de las matemáticas. Tuvieron que pasar muchos siglos para poder probar que el problema no tenía solución en la forma en que lo planteaban los griegos. En efecto, utilizando coordenadas cartesianas el problema se reduce

a resolver la ecuación $x^3 = 2$, y se puede demostrar que, partiendo de un segmento de longitud a, no se puede construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt[3]{2}\,a$ (Descartes, 1637).

2. La trisección del ángulo. Se pretendía dividir un ángulo en tres ángulos iguales, usando solo la regla y el compás. Esto no es posible en general y varios matemáticos introdujeron curvas auxiliares que les sirvieran de ayuda, como por ejemplo, la *trisectriz* de Hipias. El matemático francés Pierre Wantzel (1814-1848) demostró que un ángulo α es trisecable con regla y compás si el polinomio $4x^3 - 3x - \cos(\alpha)$ es reducible.
3. La cuadratura del círculo. Sorprendía a los griegos que dibujando, sólo con regla y compás, no se pudiese construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. Este problema preocupó a muchas generaciones de matemáticos. A veces se ofrecieron soluciones aparentes, triviales y sin sentido. Hubo matemáticos que dedicaron una gran parte de su vida a intentar resolver el problema de la cuadratura del círculo (evidentemente sin conseguirlo). La imposibilidad de la cuadratura del círculo fue plenamente probada por Lindemann a finales del siglo XIX, al haber demostrado la transcendencia del número π; esto es, π no puede ser raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros.

Construcción de polígonos regulares

Hay tres maneras principales de plantear la construcción de polígonos regulares con regla y compás:

1. construir el polígono regular de n lados que tiene como lado un segmento dado,
2. construir el polígono regular de n lados inscripto en una circunferencia dada,
3. construir el polígono regular de n lados circunscrito a una circunferencia dada.

Los problemas 2 y 3 son equivalentes a dividir la circunferencia en n partes iguales.

La construcción de un triángulo equilátero (n = 3) o de un cuadrado (n = 4) se puede realizar en cualquiera de los tres casos. También se puede dividir la circunferencia en 5 partes iguales y así construir el pentágono inscripto, aunque la construcción es más complicada que las anteriores. Como 2/5 – 1/3 = 1/15, también se obtiene el polígono regular de 15 lados.

Si se puede dividir la circunferencia en n partes iguales, como se puede bisecar un ángulo, se puede dividir la circunferencia en 2n partes iguales. Aplicando esto a los casos anteriores, se deduce que se pueden construir polígonos regulares de:

3, 6, 12, 24, ...
4, 8, 16, 32, ...
5, 10, 20, 40, ...
15, 30, 60, 120, ...

Todo esto se sabía en tiempos de Euclides, pero hubo que esperar unos 2000 años para que Gauss (1777-1855) realizara la construcción del polígono regular de 17 lados. Pero ¿qué ocurre con los polígonos regulares de 7, 9, 11, 13, 14, 19, ... lados? Gauss demostró también que solo es posible dividir la circunferencia con regla y compás, en un número primo de partes iguales, si este número es un primo de Fermat, es decir, un número primo de la forma $2^{2^k} + 1$. Por lo tanto, los casos de 7, 9, 11, 13, 14, 19, 21, 22, 23, ... lados, son imposibles.

(Recordar que no todos los números de la forma $2^{2^k} + 1$ son primos. Son primos de Fermat 3, 5, 17, 257, 65537, pero $2^{2^5} + 1 = 4294967297$, no es primo.)

GEOMETRÍA BÁSICA

EJERCICIOS TEMA IV: ESTUDIO DEL TRIÁNGULO
CONCEPTOS BÁSICOS. IGUALDAD. RELACIONES. CONSTRUCCIONES.

1. Prueba que: 1) el paralelogramo es un cuadrilátero convexo, 2) los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales, 3) en un paralelogramo los lados opuestos son iguales.

2. Demuestra que en todo paralelogramo las diagonales se cortan en el punto medio de ambas.

3. Prueba que si un cuadrilátero convexo tiene cada par de lados opuestos iguales, entonces es un paralelogramo. ¿Qué relación tiene este enunciado con el establecido en 1. 3)?

4. Prueba que
a) la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo es 360.
b) la suma en grados de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es 180(n - 2).

5. Se tienen dos triángulos ABC y A'B'C' tales que AC ≡ A'C', BC ≡ B'C', A ≡ A' y BC > AC. Queremos probar que, en esas condiciones, los triángulos ABC y A'B'C' son congruentes. A continuación se da un esquema de demostración y tú has de completarlo.

- Si los ángulos C y C' son congruentes, entonces los triángulos ABC y A'B'C' son congruentes porque ....
- Vamos a descartar que los ángulos C y C' sean no congruentes, razonando por ....:
  - Supongamos que C y C' no son congruentes, pudiendo admitir que C > C'.
    Sea D un punto del segmento AB tal que ACD ≡ C'. Se tiene entonces que ADC y A'B'C' son congruentes porque ....
  - Se tiene que A > B y A' > B' puesto que .... De esto se deduce que B y B' son agudos ya que ....
  - Se tiene por tanto que CDA es agudo porque .... Como consecuencia de esto CDB es ....
  - El DBC es isósceles ya que .... Sin embargo los ángulos relativos a la base son ....
  - De suponer que C y C' no son congruentes hemos llegado a .... y por tanto ....

6. ¿Cuánto suman los ángulos exteriores de un pentágono convexo? ¿Y de un polígono convexo de n lados?

7. Sea ABC un triángulo, y M el punto medio del lado AC. Si r es la recta paralela a AB que pasa por M, demuestra que:
a) r corta al lado BC en su punto medio.
b) Si N es el punto medio de BC, AB = 2 MN
El segmento MN recibe el nombre de paralela media del triángulo ABC.
De lo anterior se deduce que siempre que unamos los puntos medios de dos lados de un triángulo, el segmento resultante es paralelo al tercer lado.

8. Si en un triángulo unimos los puntos medios de sus lados obtenemos cuatro triángulos iguales. Justifícalo.

9. Sea ABC un triángulo, y M, N y P los punto medios de los lados AC, BC y AB respectivamente. Sea O el punto de corte de las medianas BM y AN. (Se había probado que dos medianas de un triángulo eran secantes - ver ejercicios tema II -). Demuestra que:
a) 2 OM = OB (También 2 ON = OA)
b) Si O' es el punto de corte de las medianas BM y CP, ¿qué relación existirá entre los segmentos O'M y O'B? Deduce que los puntos O y O' coinciden.

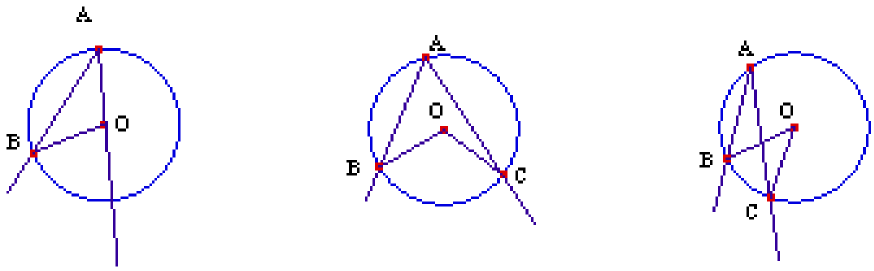
De lo anterior se deduce que las tres medianas de un triángulo se cortan en un único punto, que recibe el nombre de baricentro.

10. Sea ABC un triángulo. Por cada uno de los vértices del triángulo se traza una paralela al lado opuesto, formándose así un nuevo triángulo A'B'C'.
a) Demuestra si r es la recta que contiene una altura de ABC, entonces r es mediatriz de A'B'C'.
b) Se sabe que las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto. Usando esto y a), deduce que las rectas que contienen las alturas de un triángulo se cortan en un único punto.
El punto de corte de las rectas que contienen las alturas se llama ortocentro.

11. Un polígono convexo se dice que está inscrito en una circunferencia si cada uno de sus vértices es punto de dicha circunferencia. En este caso se dice que la circunferencia circunscribe o está circunscrita al polígono.
a) Demuestra que un triángulo cualquiera siempre se puede inscribir en una circunferencia (circunferencia circunscrita).
b) Construye un cuadrilátero convexo que no pueda ser inscrito en ninguna circunferencia.

12. a) Demuestra que en un polígono regular las mediatrices de todos sus lados se cortan en un único punto. Dicho punto, que equidista de todos los vértices del polígono regular, se llama centro del polígono.
b) Deduce que siempre es posible circunscribir una circunferencia a un polígono regular.

13. Prueba que en cualquiera de las tres posiciones posibles que indican las figuras siguientes, el ángulo inscrito es la mitad del ángulo central correspondiente.



14. Sean ABC y A'B'C' dos triángulos rectángulos con ángulos rectos $\hat{C}$ y $\hat{C}'$ respectivamente. Demuestra que los triángulos ABC y A'B'C' son congruentes si se verifica uno cualquiera de los siguientes pares de condiciones:
a) $BC \equiv B'C'$ y $\hat{A} \equiv \hat{A}'$
b) $AB \equiv A'B'$ y $BC \equiv B'C'$
c) $AB \equiv A'B'$ y $\hat{A} \equiv \hat{A}'$

15. Se considera un ángulo convexo con vértice A. Demuestra que:
a) Si P es un punto de la bisectriz de dicho ángulo, entonces las distancias de P a las rectas que contienen los lados del ángulo son iguales. Recíprocamente, si Q es un punto que equidista de los lados del ángulo A, entonces Q está en la bisectriz de dicho ángulo.
Esto se expresa diciendo que la bisectriz de un ángulo convexo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.
b) Demuestra que dos bisectrices de un triángulo se cortan en un punto.
c) Demuestra que las tres bisectrices de un triángulo son concurrentes. El punto de corte de las tres bisectrices recibe el nombre de incentro.

16. Sea ABCDE un pentágono regular. Demuestra que el triángulo ADC es isósceles.

17. Indica los pasos que hay que seguir para construir con regla y compás un hexágono regular.

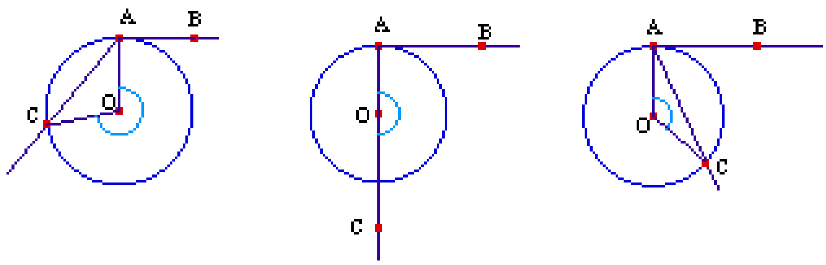
18. Dada una circunferencia, construir con regla y compás un triángulo equilátero circunscrito a la circunferencia.

19. Sea P un punto exterior a una recta r.
a) Demuestra que desde P no existen tres oblicuas a r de la misma longitud.
b) Sea λ la distancia de P a r (es decir, $d(P,r) = \lambda$). ¿Por qué cualquier oblicua trazada desde P a r tiene longitud mayor que λ?
c) Si $Q \in r$, y PQ es una oblicua de longitud d, ¿existe desde P otra oblicua con longitud d?

20. Sea ABCD un cuadrilátero convexo cualquiera, y M , N, P, y Q los puntos medios de AB, BC, CD y DA respectivamente. Demuestra que MNPQ es un paralelogramo.

21. Sea ABCD un paralelogramo y E y F los puntos medios de AB y CD respectivamente. Demuestra que los segmentos ED y BF dividen a la diagonal AC en tres segmentos congruentes.

22. Dadas las siguientes figuras, donde la recta AB es tangente a la circunferencia, demostrar que el ángulo BAC es la mitad del ángulo central correspondiente (punteado en la figura).

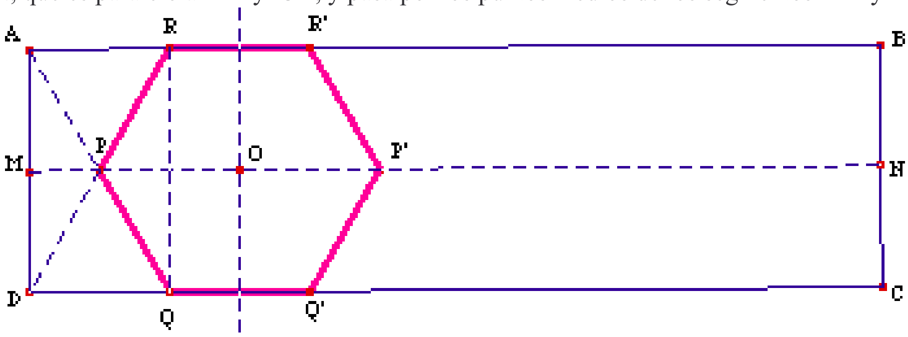


23. Se tiene el dibujo de una circunferencia en el que no está indicado el centro. ¿Cómo se puede determinar el centro de la circunferencia con regla y compás?

24. Sea ABC un triángulo, y AM y BN las medianas relativas a los lados BC y AC respectivamente. Demuestra que si los segmentos AM y BN son congruentes entonces el triángulo ABC es isósceles de base AB.

25. a) Recuerda la definición de polígono regular y cuánto es la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo. Deduce lo que ha de medir cada ángulo interior de un hexágono regular.
b) Sigue las pautas siguientes con el objetivo de construir mediante plegado de papel un hexágono regular.

1. Corta una tira rectangular de papel. Por ejemplo de 15 cm. de largo y 5 cm. de ancho. Tienes así un rectángulo ABCD.
2. Dobla la tira de papel haciendo coincidir D con A y C con B. Si ahora despliegas, se aprecia un segmento, llamémosle MN, que es paralelo a AB y CD, y pasa por los puntos medios de los segmentos AD y BC.

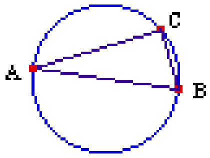


3. Plegando desde A, llevamos D sobre MN y obtenemos así los puntos P, Q y O, que van a ser vértices y centro del hexágono respectivamente. Ver figura.
4. Para obtener un tercer vértice que vamos a llamar R podemos proceder de una de las formas siguientes:

- Por Q plegamos perpendicularmente a DC. R será la intersección de la perpendicular trazada y AB.
- Plegar desde D y hacer coincidir A con O. R será la intersección del nuevo pliegue y AB.

5. Doblamos por O perpendicularmente a DC, obteniendo r. Mediante plegados adecuados, determinamos P' ∈ MN, Q' ∈ DC, R' ∈ AB que distan de r lo mismo que P, Q y R respectivamente.
6. Demostrar que el hexágono resultante PQQ'P'R'R es, efectivamente, regular.

26. Teniendo en cuenta la figura, demuestra que el ángulo ACB es recto si y sólo si AB es diámetro de la circunferencia.



27. Dado un polígono convexo se dice que está circunscrito a una circunferencia (circunferencia inscrita) si cada lado es tangente a la circunferencia.

a) Demuestra que el incentro de un triángulo es centro de una circunferencia inscrita en el mismo.

b) Construye un cuadrilátero convexo en el que no pueda inscribirse ninguna circunferencia.

c) Recuerda la definición de centro de un polígono regular. Se ha probado que dicho punto es centro de una circunferencia que circunscribe al polígono. Demuestra que dicho centro es también centro de una circunferencia inscrita en el polígono.

28. Responde razonadamente si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes:

a) En todo triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.

b) No puede construirse un triángulo de lados de 6, 10 y 3 cm.

c) Se puede construir un triángulo cuyos ángulos sean la mitad de los de otro.

d) Se puede construir un triángulo cuyos lados sean la mitad de los de otro.

f) En un rombo se puede inscribir una circunferencia.

g) Un rectángulo no equilátero no puede circunscribir a una circunferencia

h) En un triángulo equilátero los puntos baricentro, ortocentro, incentro y circuncentro coinciden.

i) Si ABC es un triángulo en el cual la mediana CM es también altura, entonces ABC es isósceles

j) Si ABC es un triángulo en el cual la altura CM es también bisectriz, entonces ABC es isósceles

29. Demuestra que en todo triángulo rectángulo, la suma de los catetos es igual a la de los diámetros de las circunferencias inscrita y circunscrita.

30. Demuestra que si un cuadrilátero ABCD está circunscrito a una circunferencia, entonces la suma de dos lados opuestos, es igual a la suma de los otros dos.

31. La suma de todos los ángulos interiores de un polígono convexo es de 1080^{o}, ¿cuántos vértices tiene?, ¿cuántas diagonales? En el caso de que fuese regular, ¿cuánto valdría el ángulo central formado al unir dos vértices consecutivos con el centro?

32. Demuestra que si ABCD es un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia, entonces los ángulos A y C son suplementarios.

33. Sea ABC un triángulo rectángulo de ángulo recto C y ángulo B de 30^{o}. Demuestra que en esas condiciones el cateto opuesto al ángulo B mide la mitad que la hipotenusa.

34. Sean A y B dos puntos de una circunferencia C, y sea P un punto de C distinto de A y de B. Sea Q un punto del semiplano abierto (AB)p. Demuestra que:

a) Si Q ∈ C, entonces $A\hat{Q}B$ y $A\hat{P}B$ son congruentes.

b) Si Q $\notin$ C, entonces $A\hat{Q}B$ y $A\hat{P}B$ no son congruentes.

De lo anterior se deduce que: "los únicos puntos Q del semiplano (AB)p tales que el ángulo $A\hat{Q}B$ sea igual al $A\hat{P}B$ son, salvo A y B, los del arco de circunferencia de extremos A y B al que pertenece P". Dicho conjunto de puntos recibe el nombre de arco capaz de ángulo $A\hat{P}B$

35. Dados un segmento AB y un ángulo de amplitud α, ¿podrías construir un arco capaz de ángulo de amplitud α y de extremos A y B?

36. Construye un triángulo conocidos un lado, el ángulo opuesto a ese lado, y la altura relativa a dicho lado.

37. En la figura a) de más abajo se tiene que: AP y PR son perpendiculares y congruentes, RQ y BQ son perpendiculares y congruentes, AD, MN, BC y RS son perpendiculares a PQ y M es punto medio de AB. Demuestra que: i) NM = (AD + BC)/2 ii) N es punto medio de PQ iii) NM = PQ/2

38. Las siguientes cuestiones están referidas a la figura b), en la que se han señalado algunos pares de elementos iguales.

a) Nombra los pares de triángulos que parecen ser congruentes.

b) ¿Para cuáles de esos pares de triángulos puede probarse que son congruentes?

c) Deduce que los ángulos DAC y ACB son congruentes. ¿Basta añadir esta condición a las dadas por la figura para poder afirmar que DAE $\equiv$ BCF? En caso negativo, señala algún par de elementos que, de conocerse fueran iguales, nos permitiese deducir dicha congruencia.

39. En la figura c) se tiene que: M es punto medio de AC, AN $\equiv$ NB, NCB $\equiv$ CBN, y BN bisectriz de CBA. Prueba que M, N, B están alineados. ¿Qué nombre recibe la recta a la que pertenecen tales puntos?

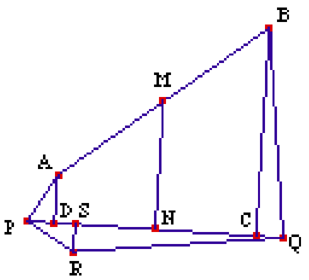


Figura a)

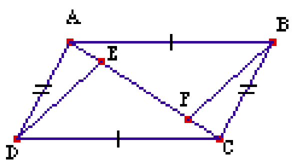


Figura b)

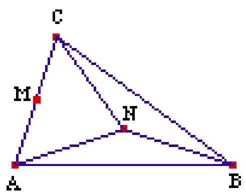


Figura c)

40. Construye un trapecio isósceles conocidas las bases y la diagonal.

41. Construye un triángulo rectángulo conocida la longitud ℓ del cateto que se opone a un ángulo del triángulo que mide 30°.

42. Construye con regla y compás un paralelogramo, conocido un ángulo y los lados.

43. Sea ABCD un cuadrilátero convexo. Se sabe que el ángulo B es recto, que BC y AD son paralelas, y que ABCD puede inscribirse en una circunferencia. Demuestra que ABCD es un rectángulo.

44. Construye un triángulo ABC conocidas la longitud del lado AB, la amplitud del ángulo A y la longitud del segmento AO, donde O representa el incentro de ABC.

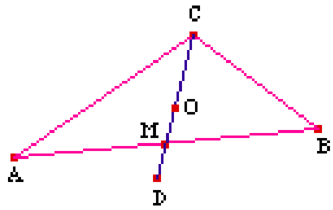
45. a) Demostrar que en todo triángulo, una mediana cualquiera, es menor que la semisuma de los lados que la comprenden. (Para ello, se puede prolongar la mediana tanto como lo que mide y trabajar con los triángulos que se forman).

b) Ayúdate del apartado anterior para construir un triángulo conocidos dos lados y la mediana comprendida entre ellos.

46. En el triángulo ABC de la figura, CM es mediana, O baricentro y M punto medio de OD.

1. Prueba que el triángulo OBD tiene por lados segmentos que son 2/3 de las medianas de ABC

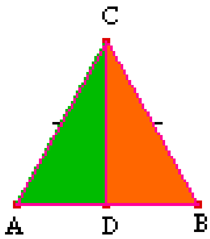
2. Con ayuda de lo anterior idea cómo construir un triángulo conocidas sus tres medianas.



47. Construye un paralelogramo conocidas las longitudes de uno de sus lados y de sus diagonales.

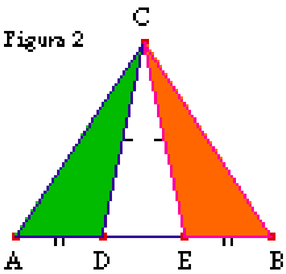
48. En las siguientes figuras, determina si la información dada es suficiente para probar que los triángulos sombreados son congruentes. A las condiciones señaladas puedes añadir las que se observan de alineación de puntos o de intersección de rectas, pero ninguna otra relativa a congruencia de segmentos o congruencia de ángulos.

Figura 1



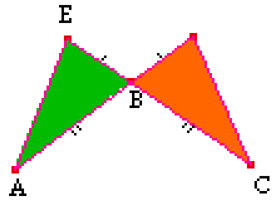
AC = BC

Figura 2



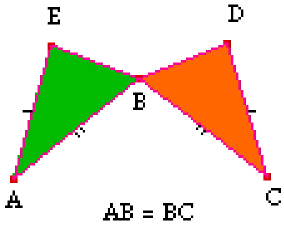
AD = EB
DC = EC

Figura 3



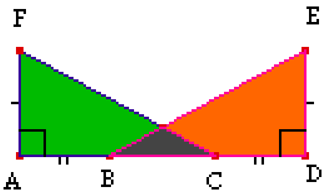
AB = BC
BE = BD

Figura 4



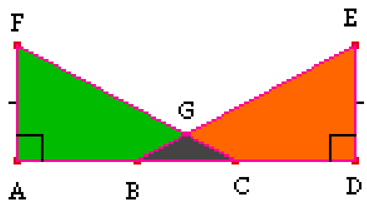
AB = BC
AE = CD

Figura 5



AB = CD
AF = DE
A y D rectos

Figura 6



AF = DE
BG = CG
A y D rectos

Para las figuras en las que las condiciones hayan sido insuficientes, añade alguna otra que, junto con las dadas, te permita deducir la congruencia de los triángulos señalados

49. Sobre cada uno de los lados de un cuadrado ABDC se construyen triángulos rectángulos iguales, de hipotenusa igual al lado del cuadrado, que se colocan alternativamente "hacia adentro" y "hacia afuera" (como indica la figura 1 de la página siguiente).

a) Prueba que el triángulo HEA es rectángulo e isósceles.

b) Sea J el punto de corte de las rectas AE y DG, y sea K el punto de corte de las rectas CG y BE. Demuestra que el polígono EKGJ es un cuadrado.

c) Con ayuda de los apartados anteriores, deduce que los puntos H, E y G están alineados.

d) ¿Están alineados los puntos H, E, G y F?

50. Sobre cada uno de los lados de un cuadrado ABDC se construyen triángulos iguales, que se colocan alternativamente "hacia adentro" y "hacia afuera" (como indica la figura 2). Demuestra que si los puntos H, E, G y F están alineados, entonces los triángulos son rectángulos. ¿Qué relación hay entre el resultado del ejercicio 49 y éste?

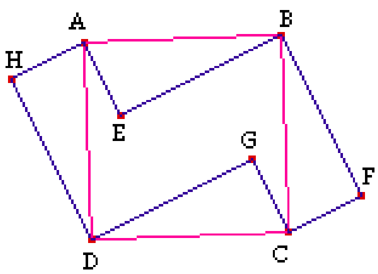


Figura 1

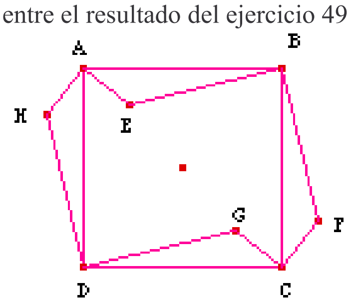
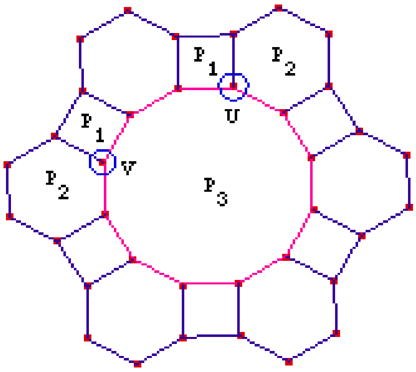


Figura 2

51. Mosaicos son diseños formados por combinaciones de figuras geométricas (baldosas) que recubren el plano sin dejar huecos ni solaparse unas a otras. Hablamos de mosaico regular cuando las baldosas son todas el mismo polígono regular, y además dos baldosas cualesquiera o no tienen ningún punto en común, o si lo tienen es un vértice o un lado. Llamamos mosaico semirregular a aquellos mosaicos que están formados por distintos tipos de polígonos regulares que tienen en contacto o un vértice o un lado y además en cada vértice confluyen los mismos polígonos y en el mismo orden cíclico. Esto último quiere decir lo siguiente. Si alrededor de un vértice hay r polígonos regulares P_1, P_2, ..., P_r, colocados en un orden P_{i1}, P_{i2}, ..., P_{ir}, se verifica que en cualquier otro vértice, empezando por el polígono P_{i1} encontramos los polígonos P_{i2}, ..., P_{ir} en alguna de los dos posibles orientaciones - igual o contraria a la de las agujas del reloj-. Así en la figura, en los vértices U y V confluyen los mismos polígonos en el mismo orden cíclico.



A continuación se trata de determinar todos los posibles mosaicos semirregulares y regulares que se pueden construir. En los primeros apartados del ejercicio se establecen algunas conclusiones de carácter general que son de utilidad para tal fin.

a) Sean **P** y **P'** dos polígonos regulares de n y m lados respectivamente, y con ángulos interiores respectivos α y β. Demuestra que $\alpha > \beta \Leftrightarrow n > m$. Esto es, cuanto mayor es el número de lados del polígono regular, mayor es su ángulo interior, y recíprocamente.

b) Determina los ángulos interiores de los polígonos regulares de 3, 4, ..., 15 lados. ¿Existen polígonos regulares cuyos ángulos interiores midan respectivamente 990/7, 162, 1200/7, 165 grados?

c) Sea r el número de polígonos regulares alrededor de un vértice de un mosaico de los descritos al principio, y t el nº de ellos que son triángulos. Demuestra que $2 < r \leq 6$, $t = r \Leftrightarrow r=6$ y $3(r-4) \leq t$.

d) Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, determina, en función de r y t, las situaciones posibles que, a priori, se pueden plantear cuando se intenta teselar el plano.

e) Haz un estudio pormenorizado de cada uno de los casos obtenidos en d) para descartar áquellos que no conducen a mosaicos regulares o semirregulares.

f) ¿Has podido teselar el plano con dos pentágonos y un decágono?

g) En el estudio realizado hasta aquí habrás obtenido dieciseis posibles configuraciones alrededor de un vértice, de las cuales tres producen mosaicos regulares, y una no es válida para teselar. Es por esto que los mosaicos semirregulares debes buscarlos entre las doce configuraciones restantes. ¿Cuántos mosaicos semirregulares obtienes?

52. En la figura 1, ABCD es un paralelogramo, y sobre sus lados se han construido cuadrados de centros respectivos O_1, O_2, O_3 y O_4. Se desea probar que el cuadrilátero $O_1O_2O_3O_4$ es un cuadrado. Para ello sigue los siguientes pasos.

a) Sean E y F los puntos medios de los segmentos DC y BC respectivamente, y O el punto de corte de las diagonales de ABCD. Demuestra que los triángulos OO_1E y O_2OF son congruentes.

b) Demuestra que el triángulo O_1O_2O es rectángulo e isósceles.

c) ¿Qué puede decirse de los triángulos O_2O_3O, O_3O_4O y O_4O_1O? Deduce que $O_1O_2O_3O_4$ es un cuadrado.

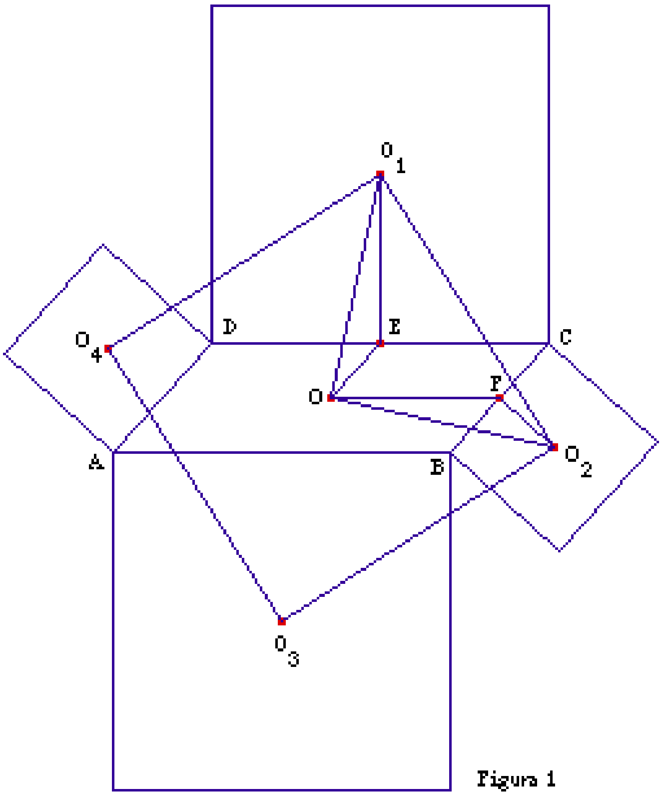


Figura 1

53. En el espacio.

a) Demuestra que los segmentos de rectas paralelas comprendidas entre planos paralelos son iguales.

b) Si dos rectas secantes *a* y *b* son perpendiculares, las rectas secantes *a*' y *b*' paralelas a ellas también son perpendiculares.

Este último resultado nos permite definir rectas perpendiculares que se cruzan: Dos rectas que se cruzan se dicen perpendiculares si son perpendiculares las rectas secantes paralelas a ellas

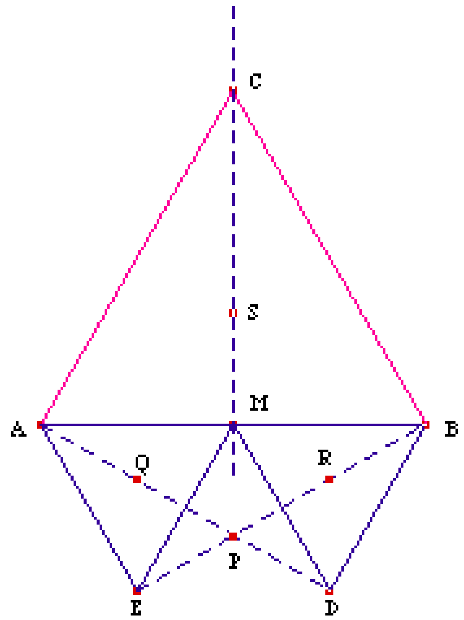
c) Demuestra que si la recta *a* es perpendicular a la recta *b*, entonces *a* es perpendicualr a cualquier paralela a *b*.

d) Una recta se dice perpendicular a un plano si lo es a cada una de las rectas contenidas en dicho plano. Teniendo en cuenta tu experiencia con el espacio que te rodea, enuncia distintos resultados que conjetures como ciertos, y que relacionen perpendicularidad entre rectas y planos, entre rectas, paralelismo entre rectas, paralelismo entre planos, entre rectas y planos...

54. Sea M el punto medio del segmento AB, y sean ABC, AME y BMD triángulos equiláteros construidos según la figura.
Sea P el punto de corte de los segmentos AD y BE, y S, Q, R los baricentros los triángulos ABC, AME, BMD respectivamente.

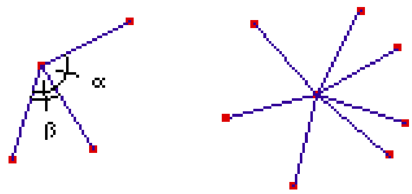
1) Demuestra que P pertenece a la recta CM.
2) Demuestra que los triángulos ABE y BAD son rectángulos.
3) Prueba que el triángulo DEM es equilátero y que P es su baricentro.
4) Sea λ la longitud de una mediana del triángulo ABC y μ la longitud de una mediana del triángulo AME (en cada uno de esos triángulos todas las medianas, por ser equiláteros, tienen igual longitud). Demuestra que $\mu = \lambda/2$.

5) Sea *C* la circunferencia de centro M y radio la longitud del segmento MS. Prueba que los puntos P, Q y R pertenecen a *C*.



Esquema de resolución del ejercicio de determinación de
MOSAICOS REGULARES Y SEMIRRREGULARES

Al abordar este ejercicio uno obtiene una serie de conclusiones de carácter general que vamos a tratar de enumerar.



1. Si en un vértice concurren dos polígonos regulares de n y m lados, y sus ángulos interiores son α y β respectivamente, entonces: $\alpha > \beta \Leftrightarrow n > m$. Esto es, **cuanto mayor es el número de lados del polígono regular, mayor es su ángulo interior**.

2. Si un polígono regular tiene n lados, el ángulo interior mide α según la tabla siguiente, en la que se pueden incorporar más columnas.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
α	60	90	108	120	900/7	135	140	144	1620/11	150	1980/13	1080/7	156

3. **Si alrededor de un vértice hay r polígonos regulares** cuyos ángulos interiores miden $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{r-1}, \alpha_r$, se tiene:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{r-1} + \alpha_r = 360$$
$$60 \leq \alpha_i < 180 \text{ para todo } i$$

Por tanto $60r \leq 360$ y $360 < 180r$, de donde $\mathbf{2 < r \leq 6}$.

4. **Si de los r polígonos regulares** que hay alrededor de un vértice, **t son triángulos**, se tiene:

$$\mathbf{0 \leq t \leq r \leq 6}$$
$$\mathbf{t = r \Leftrightarrow r=6}$$

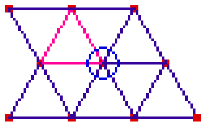
Además $60t + \alpha_{t+1} + ... + \alpha_r = 360$ con $90 \leq \alpha_i < 180$ para i= t+1, ...,r, de donde se deduce que $90(r-t) + 60t \leq 360$, y por tanto $\mathbf{3(r-4) \leq t}$.

5. Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, observamos que si r es el número de polígonos regulares que concurren en un vértice y t el número que de ellos son triángulos, las **situaciones posibles que se pueden plantear** son las siguientes:

r = 6, t = 6
r = 5, t = 3, 4
r = 4, t = 0, 1, 2, 3
r = 3, t = 0, 1, 2

6. Ahora sólo hay que ver qué situaciones se generan en cada uno de los casos anteriores. Veámos cuáles son.

Caso 1. **r = 6, t = 6**

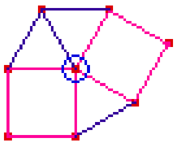


(3-3-3-3-3-3)

Caso 2. **r = 5, t = 3, 4**

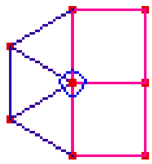
2.1. **r = 5, t = 3**

En este caso $60 + 60 + 60 + \alpha_4 + \alpha_5 = 360$ con $90 \leq \alpha_4$, $\alpha_5 < 180$. De donde se deduce que $\alpha_4 = \alpha_5 = 90$ Por tanto en esta situación, junto a los tres triángulos concurren en el vértice dos cuadrados, pudiéndose presentar las siguientes configuraciones:



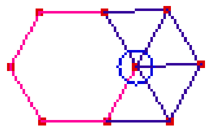
(4-3-4-3-3)

(4-4-3-3-3)



2.2. **r = 5, t = 4**

En este caso $4 \cdot 60 + \alpha_5 = 360$. De donde se obtiene que la figura que concurre en el vértice junto con los cuatro triángulos es un hexágono.

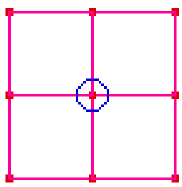


(6-3-3-3-3)

Caso 3. **r = 4, t = 0, 1, 2, 3**

3.1. **r = 4, t = 0**

En estas condiciones $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360$ con $90 \leq \alpha_i < 180$ para i=1,2,3,4. De donde se concluye que $\alpha_i = 90$ para todo i. La configuración es pues

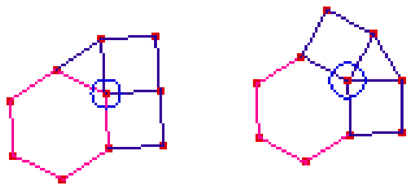


(4-4-4-4)

3.2. **r = 4, t = 1**

En estas condiciones $60 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360$ con $90 \leq \alpha_i < 180$ para i=2,3,4. Puesto que $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 300$, **no todas las figuras restantes son cuadrados**.

- Si $\alpha_2 = 108$ es el ángulo interno de un pentágono regular, $\alpha_3 + \alpha_4 = 192$. Puesto que $90 \leq \alpha_i$, entonces $90 \leq \alpha_3, \alpha_4 \leq 102$, y en consecuencia $\alpha_3 = \alpha_4 = 90$. Pero para esos valores de los ángulos, $\alpha_3 + \alpha_4 \neq 192$. De ello se desprende que **en la configuración no puede entrar un pentágono regular.**
- Si $\alpha_2 = 120$ es el ángulo interno de un hexágono regular, $\alpha_3 + \alpha_4 = 180$ con $90 \leq \alpha_i < 180$ para i=3,4. De donde se obtiene que $\alpha_3 = \alpha_4 = 90$, y las siguientes dos configuraciones.



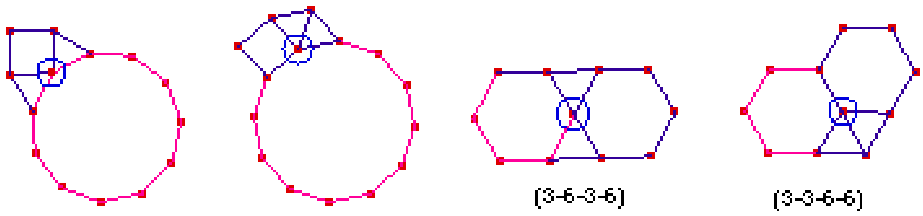
(6-4-4-3) (6-4-3-4)

- Si $\alpha_2 > 120$ es el ángulo interno de un polígono regular con un número de lados mayor que 6, entonces $\alpha_3 + \alpha_4 < 180$ con $90 \leq \alpha_i < 180$ para i=3,4: situación imposible. Para r = 4, t = 1, no aparecen más posibilidades.

3.3. **r = 4, t = 2**

En estas condiciones $2 \cdot 60 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360$ con $90 \leq \alpha_i < 180$ para i=3,4.

- Si $\alpha_3 = 90$ es el ángulo interno de un cuadrado, $\alpha_4 = 150$. Junto a los dos triángulos concurren un cuadrado y un dodecágono.
- Si $\alpha_3 = 108$ es el ángulo interno de un pentágono regular, $\alpha_4 = 132$, valor que no corresponde a la medida del ángulo interno de un polígono regular.
- Si $\alpha_3 = 120$ es el ángulo interno de un hexágono regular, $\alpha_4 = 120$. Junto a los dos triángulos concurren dos hexágonos regulares.
- Como los papeles de α_3 y α_4 son intercambiables, con los casos anteriores queda completo el estudio para r = 4, t = 2.



(3-12-3-4) (3-3-4-12) (3-6-3-6) (3-3-6-6)

3.4. **r = 4, t = 3**

En estas condiciones $3 \cdot 60 + \alpha_4 = 360$ con $90 \leq \alpha_4 < 180$. Esta situación, como es inmediato comprobar, no puede darse.

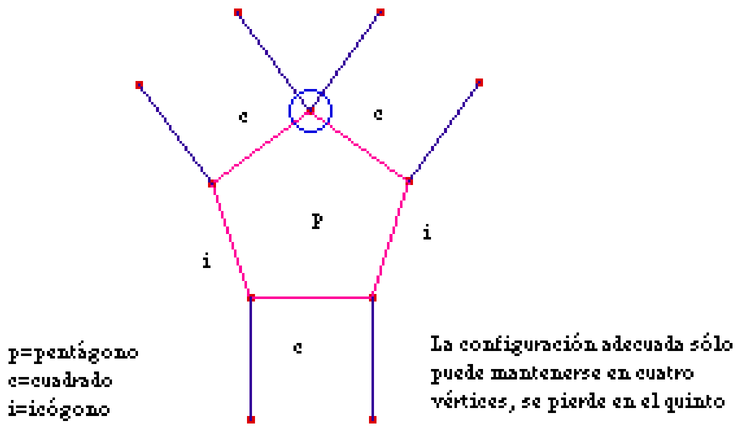
Caso 4. **r = 3, t = 0, 1, 2**

4.1. **r = 3, t = 0**

En este caso $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360$ con $90 \leq \alpha_i < 180$ con i = 1, 2, 3. De donde se deduce que **como máximo el número de cuadrados que concurren en un vértice es uno**.

- Si $\alpha_1 = 90$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 270$ con $108 \leq \alpha_i < 180$ con i = 2, 3.

- Si en la configuración apareciera un pentágono regular, el otro polígono regular debería tener un ángulo interior de 162 grados, que es el de un polígono regular de 20 lados.
Teniendo en cuenta entonces que en cada vértice del mosaico concurren un pentágono, un cuadrado y un icógono con el mismo orden cíclico, alrededor de un pentágono la situación que se genera es la que muestra la figura.



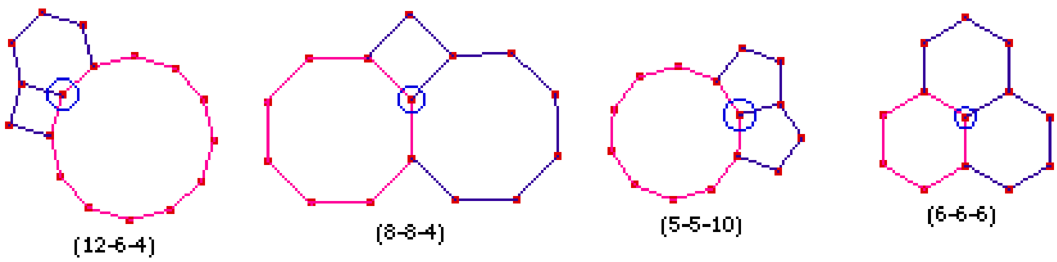
Este caso resulta pues impracticable.
- Si en la configuración apareciera un heptágono regular, el otro polígono regular debería tener un ángulo interior de 990/7 grados, lo que es imposible como puede apreciarse en la tabla del principio.
- Si en el vértice concurre un hexágono regular, el otro polígono es un dodecágono.
- Si en el vértice concurre un octógono regular, el otro polígono es otro octógono.
- Si en la configuración apareciera un polígono de mayor número de lados que 8, el que restase debería tener menor número de lados que 8. Como ese caso ya está considerado, el estudio está completo cuando en la configuración aparece un cuadrado.

- Si $\alpha_1 = 108$ (ángulo interior de pentágono regular), $\alpha_2 + \alpha_3 = 252$ con $108 \leq \alpha_i < 180$ con i = 2, 3.

- Si en el vértice concurre otro pentágono regular, el tercer polígono debe ser un decágono regular.
- Si en la configuración apareciera un hexágono, el otro polígono tendría que tener un ángulo interior de 132 grados, imposible.
- Si en la configuración apareciera un polígono de mayor número de lados que 6, el que restase debería tener un ángulo menor de 132 grados, esto es de 108 o 120, pero estos casos son los que ya están contemplados. En consecuencia el estudio está completo cuando en el vértice no concurren cuadrados y sí algún pentágono.

- Si no concurren cuadrados ni pentágonos, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360$ con $120 \leq \alpha_i < 180$ con i = 1, 2, 3. Esto obliga que $\alpha_i = 120$ para i = 1, 2, 3.

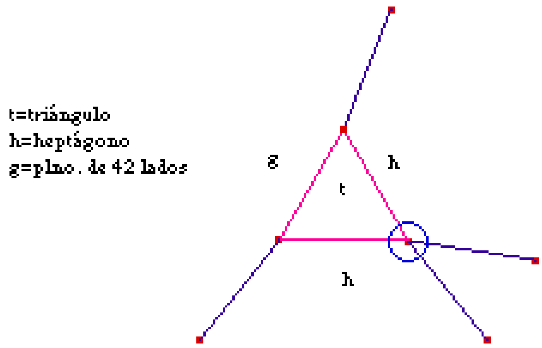
Las distintas configuraciones que aparecen para r=3, t=0 son las siguientes.



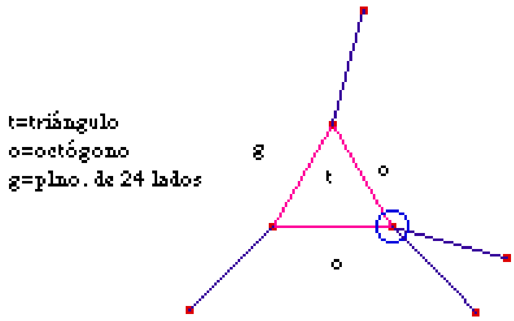
4.2. **r = 3, t = 1**

Si el número de triángulos que concurren en un vértice es uno, $\alpha_2 + \alpha_3 = 300$. Como cada $\alpha_i < 180$, **cada α_i debe ser mayor que 120**.

- Si uno de los α_i es 900/7, el otro deberá ser 1200/7, que corresponde al ángulo interior de un polígono regular de 42 lados, y la situación que se produce es la que muestra la figura siguiente, y que conduce a un mosaico no semiregular.



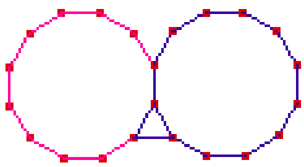
- Si uno de los α_i es 135 (medida de ángulo interior de un octógono), el otro debe ser 165 (medida de ángulo interior de un polígono regular de 24 lados).



La situación que se produce es, como puede apreciarse en la figura anterior, análoga al caso analizado más arriba.

- Si uno de los α_i es 144 (medida de ángulo interior de un decágono), el otro debe ser 156 (medida de ángulo interior de un polígono regular de 15 lados), pero la situación que se produce es análoga a las anteriores. Por tanto tampoco esta distribución es factible.

- Por tanto cada α_i es mayor o igual que 150. Como la suma de ambos es 300, $\alpha_i = 150$ para i = 2, 3. Esta es pues la única posibilidad que se presenta para r = 3, t = 1: dos dodecágonos y un triángulo.



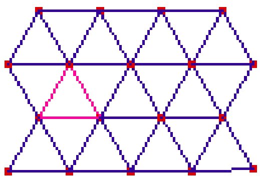
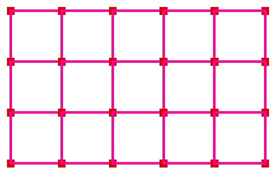
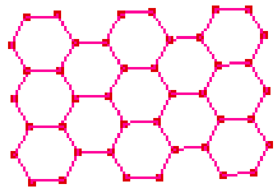
(3-12-12)

4.3. **r = 3, t = 2**

En esta situación, $2 \cdot 60 + \alpha_3 = 360$ con $90 \leq \alpha_3 < 180$. De donde se deduce que esta posibilidad no puede plantearse.

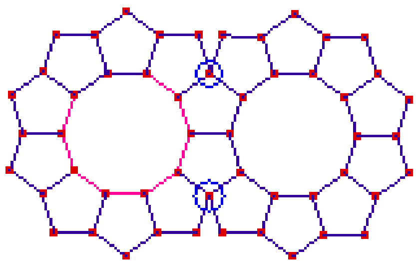
Teniendo en cuenta todo el desarrollo anterior, observamos que:

- A lo sumo hay tres mosaicos regulares provenientes de las configuraciones (3-3-3-3-3-3), (4-4-4-4) y (6-6-6) que se pueden establecer alrededor de un vértice.
  La construcción de los mosaicos nos permite comprobar que cada una de las tres posibilidades es válida. Hay pues tres mosaicos regulares.

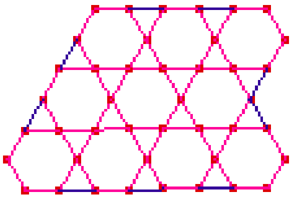
- No existe una teselación en la que aparezca un polígono regular con un número de lados mayor o igual a 13.

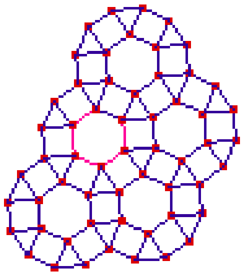
- A la pregunta de si es posible teselar un plano con dos pentágonos y un decágono concurrentes en un vértice, se puede tener la tentación de responder afirmativamente puesto que (10-5-5) es una de las ternas válidas en el estudio realizado. Sin embargo deberemos probar que en todos los vértices puede mantenerse la misma configuración:
  - Cada decágono debe estar "rodeado" de pentágonos.
  - Dos pentágonos consecutivos determinan un decágono.
  - Aparecen vértices en los que concurren tres pentágonos.

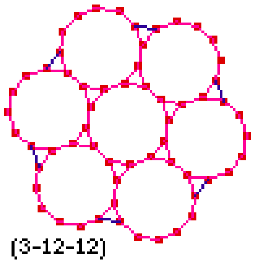


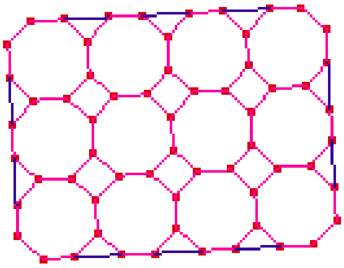
  No es posible entonces teselar el plano con un decágono y dos pentágonos. Como esta es la única configuración con polígonos regulares en la que aparece un pentágono, podemos afirmar que nunca es posible teselar el plano en la que algún polígono regular sea un pentágono.

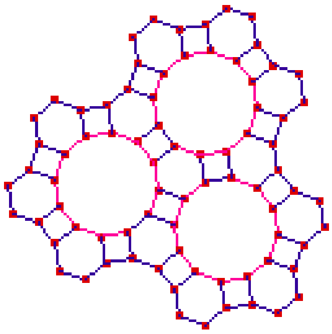
- En el estudio realizado se han obtenido dieciseis posibles configuraciones alrededor de un vértice de las cuales tres producen mosaicos regulares: (3-3-3-3-3-3), (4-4-4-4), (6-6-6), y una no es válida para teselar: (10-5-5). Es por esto que los mosaicos semirregulares debemos buscarlos entre las doce configuraciones restantes.

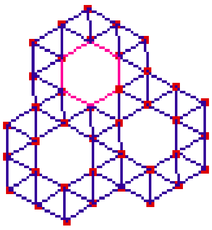

(3-6-3-6)

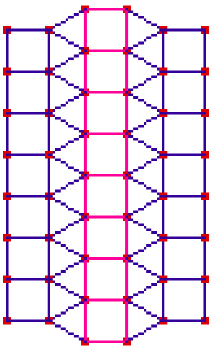

(3-4-6-4)

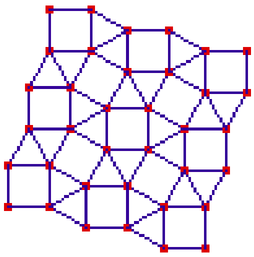

(3-12-12)

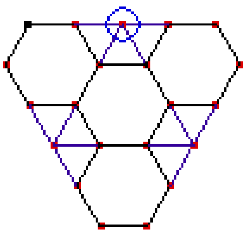

(4-8-8)

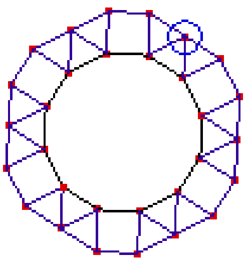

(4-6-12)

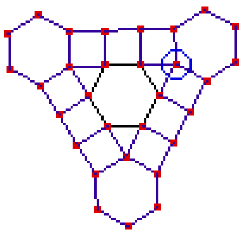

(3,3,3,3,6)

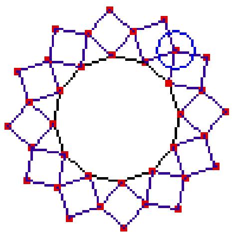

(3,3,3,4,4)


(3,3,4,3,4)


(3,3,6,6)


(3,3,4,12)


(3,4,4,6)


(3,4,3,12)

Puede observarse que no es posible formar mosaicos semirregulares con las doce confuguraciones que inicialmente eran candidatas, sino que finalmente sólo es factible con ocho de ellas.