GEOMETRÍA BÁSICA

TRABAJO PARA EL ALUMNO

TEMA II - GEOMETRÍA COMBINATORIA

1. POLIMINOS
2. POLICUBOS

---

1. POLIMINOS Y POLIAMANTES

Se llaman polimінós a las formas que se obtienen juntando cuadrados lado a lado. Si los que se unen de esta manera son triángulos equiláteros se obtienen los poliamantes. Puesto que el tipo de actividades y procesos que se pueden desarrollar con unos y con otros son similares vamos a centrarnos en la parte de la geometría combinatoria plana que está relacionada con el uso de poliminós. Llamaremos dominós, triminós, tetraminós, ... a los poliminós obtenidos juntando dos, tres, cuatro, ... cuadrados, respectivamente.

Desde que en 1954, los poliminós fueron presentados al mundo matemático por Solomon W. Golomb hasta hoy se han publicado centenares de problemas y configuraciones. Por ejemplo, Martin Gardner en dos de sus libros titulados *Nuevos pasatiempos matemáticos* y *Festival mágico matemático*, desarrolla actividades muy interesantes.

En los ejercicios siguientes se abordan problemas de clasificación y simetría que pueden trabajarse en el contexto de los poliminós.

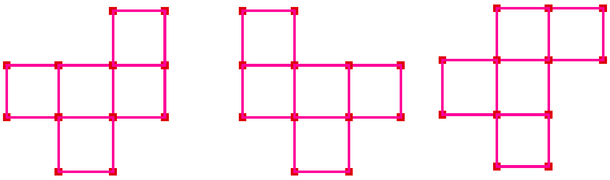
Actividad 1: POSIBLES COMBINACIONES DEL CUADRADO

A continuación se hablará de unir o juntar cuadrados. Esta unión se hace superponiendo un lado de un cuadrado con un lado del otro. Este lado se convierte entonces en un lado común a los dos cuadrados que se unen.

1.1. a) Realiza todas las figuras distintas que se pueden obtener uniendo cinco cuadrados.

b) ¿Qué criterio has seguido para establecer la igualdad entre dos figuras?

c) Según el criterio que has establecido, ¿puedes clasificar como iguales los siguientes pentaminós?



d) Admitiendo como iguales aquellos pentaminós que pueden obtenerse uno de otro por algún movimiento (rotación, traslación o simetría), ¿cuántos pentaminós distintos han aparecido?

1.2. Construcción de rectángulos con pentaminós

a) Determina las posibles dimensiones de los rectángulos que se pueden construir usando sólo
- Dos pentaminós
- Tres pentaminós
- Cuatro pentaminós
- Cinco pentaminós
- Seis pentaminós
- Nueve pentaminós
- Doce pentaminós

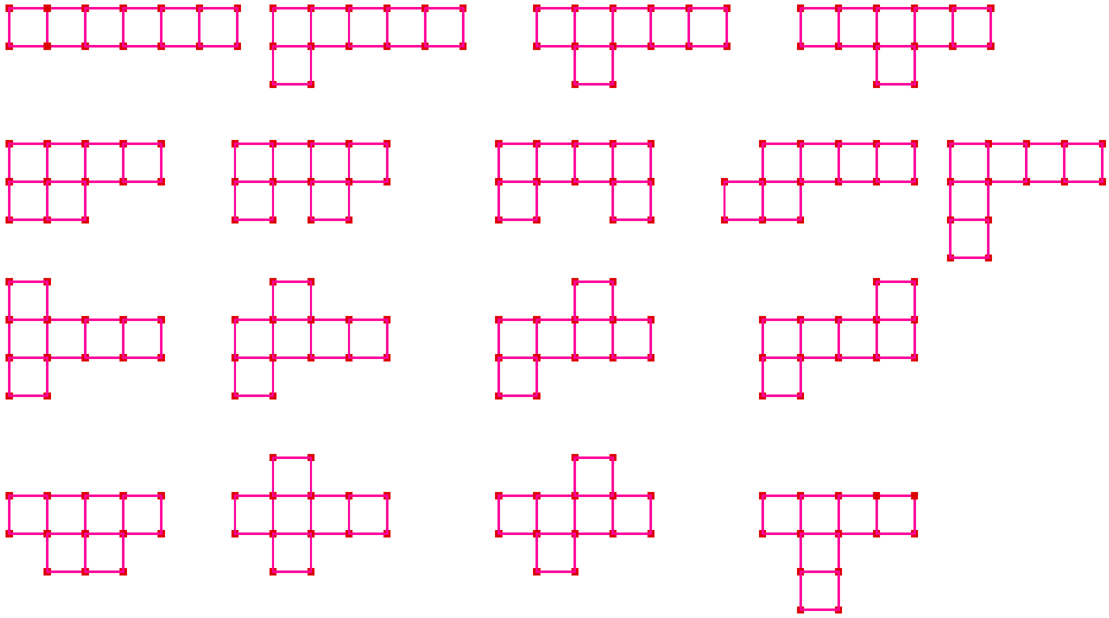
b) Usando seis pentaminós distintos construye rectángulos 3x10 y 6x5. ¿ Son únicos, o hay distintas maneras de hacerlos?

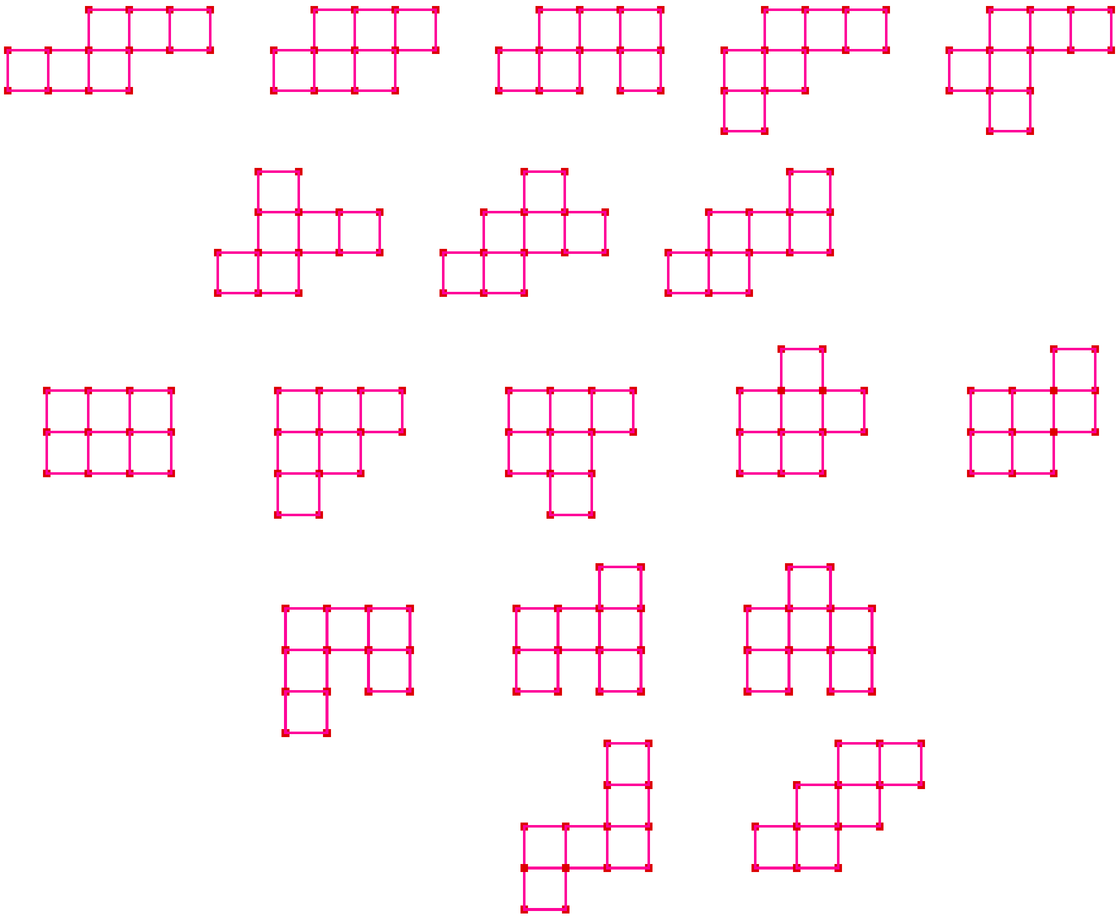
Da un argumento que justifique la imposibilidad de construir un rectángulo 2x15 con pentaminós diferentes.

Actividad 2: DESARROLLOS PLANOS DEL CUBO

2.1. A continuación aparecen todos los hexaminós posibles con el criterio de igualdad anterior.

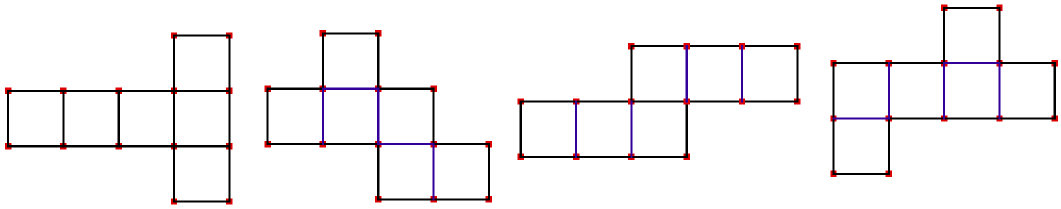
Descubre la estrategia que se ha seguido para su construcción.





2.2. Sin recortar ni pegar, decir cuáles de los hexominós obtenidos pueden ser desarrollos planos de un cubo.
Describe características que te hayan hecho rechazar los casos restantes.

2.3. En cada uno de los siguientes desarrollos del cubo, señala los lados de los polígonos que formarán la misma arista del poliedro.



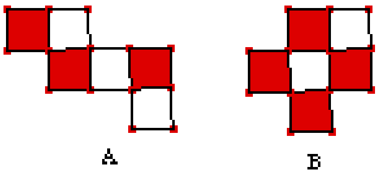
Para construir a partir de ellos el cubo, debes resolver un problema de tipo práctico: cómo juntar las caras. La técnica comúnmente empleada es la de añadir al desarrollo lengüetas o pestañas. Tendrá que haber una lengüeta por cada arista resultante en el sólido y que no estuviera ya pegada en el desarrollo.

a) Investiga las formas posibles de colocación de las lengüetas para cada uno de los desarrollos anteriores. ¿Todos los desarrollos tienen el mismo número de disposiciones de lengüetas diferentes? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es tu opinión acerca de lo que puede suceder con los desarrollos del cubo restantes?

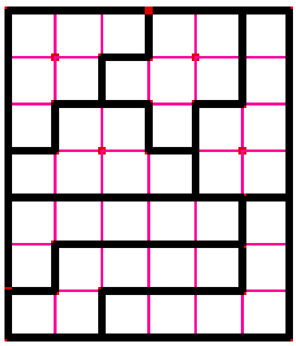
Actividad 3: PARES E IMPARES

3.1. Los dos hexominós A y B de esta figura tienen sus cuadrados sombreados alternativamente, como en un tablero de ajedrez.



El A presenta tres cuadrados blancos y tres negros, mientras que el B tiene cuatro negros y dos blancos. Por este motivo diremos que A es un hexominó "impar" y que B es "par".
Sombrea de la misma manera todos los hexominós y clasifícalos en "pares" e "impares". ¿Cuántos hay de cada clase?

3.2. La siguiente figura nos muestra una manera de trocear un rectángulo 7×6 en siete hexominós. En este caso hay dos hexominós pares y cinco impares.



a) Busca otras tres maneras de dividir en hexominós el mismo rectángulo 7×6 y toma nota en cada caso del número de pares e impares. Explica por qué es imposible, en este rectángulo, una disección en 7 hexominós pares.

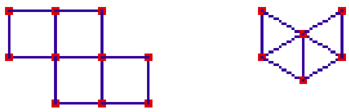
b) ¿Es posible construir un rectángulo utilizando todos los hexominós distintos? ¿Y utilizando, exclusivamente, todos los hexominós pares?

c) ¿Es posible, teóricamente, una disección de un rectángulo 8×6 utilizando sólo hexominós pares? Si además lo has conseguido en la práctica, muéstralo gráficamente.

Actividad 4: POLIAMANTES

4.1 Construye todos los tetramantes distintos que haya. ¿Se corresponden todos ellos con desarrollos planos del tetraedro?

4.2. Considera tetraminós y tetramantes de igual lado (como es el caso de los que aparecen en la figura).



Si tomamos como unidad de longitud la del lado del cuadrado y del triángulo básicos, y como unidad de área la del cuadrado de un tetraminó,

a) ¿Cuál es el área de cada uno de los tetramantes y tetraminós?

b) ¿Todos los tetramantes tienen igual perímetro? ¿Todos los tetraminós tienen igual perímetro? ¿Es verdadera o falsa la siguiente frase: "A igual área corresponde igual perímetro"?

c) Elige un tetraminó de perímetro mínimo, y construye un poliamante de área mínima que tenga el mismo perímetro que el tetraminó elegido. ¿Es verdadera o falsa la siguiente frase: "A igual perímetro corresponde igual área"?

4.3. a) Construye dos octamantes que corresponden a desarrollos planos del octaedro, señalando aquellos lados que van a formar la misma arista.

b) Construye otros dos octamantes que no sean desarrollos planos del octaedro, indicando por qué.

c) En este ejercicio y otros precedentes has construido figuras cerradas partiendo de tetramantes (tetraedro) y octamantes (octaedro). ¿Podrás construir figuras cerradas con todas sus caras triangulares partiendo de pentamantes? ¿Y con hexamantes? Justifica tu respuesta.

2. POLICUBOS

Los policubos son, salvando distancias, el equivalente en el espacio a los poliminós en el plano. Son pues las figuras que se obtienen juntando cubos por una cara común a ambos.

Actividad 1: POSIBLES COMBINACIONES DEL CUBO

1.1. Forma todos los pentacubos posibles comenzando por aquellos que se corresponden con los pentaminós.

a) ¿Cuántos hay distintos? Señala cuál ha sido el criterio que has empleado para establecer cuándo dos pentacubos son iguales.

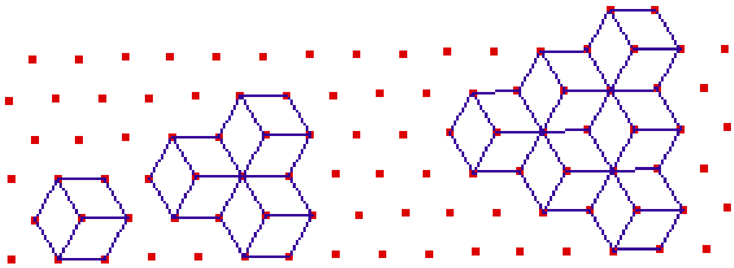
b) Señala, si es posible, un pentacubo con un solo plano de simetría y un pentacubo con exactamente dos planos de simetría.

c) Localiza los pentacubos que posean más de dos planos de simetría.

Actividad 2: HACIENDO CONSTRUCCIONES

Podemos ahora formar construcciones apilando cubitos, y buscar el número necesario según los pisos que tenga.

2.1. Haz pirámides como las siguientes, que teniendo base triangular poseen uno, dos y tres pisos.



a) Si por n denotamos el número de pisos que intervienen en una pirámide, y P_n es el número total de cubos de una pirámide de n pisos, ¿podrías determinar cuánto valen P_5 , P_6, P_7? ¿En qué te has basado para determinarlos?

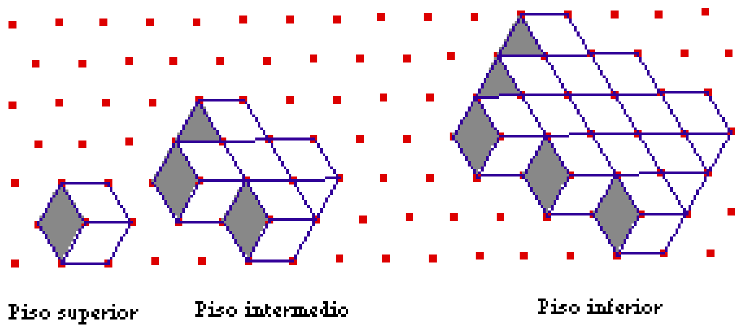
b) ¿Podrías obtener una fórmula que relacione P_n con P_{n-1}?

c) Para los P_n que tú has obtenido, ¿se verifica la siguiente fórmula?

$$P_n = n(n+1)(n+2)/6$$

d) Demuestra dicha fórmula utilizando el principio de inducción.

2.2. Las pirámides que se consideran en este ejercicio son de base "cuadrado-dentada". También ahora denotamos por P_n el número total de cubos de una pirámide de n pisos. Así P_3 será la suma de todos los bloques que aparecen en la figura siguiente, puesto que una pirámide de tres pisos con las condiciones iniciales está integrada por los "pisos" que aparecen dicha figura.



a) Determina el valor de P_5 , P_6, P_7. ¿Dichos valores satisfacen la siguiente fórmula?

$$P_n = n(2n^2+1)/3$$

b) Demuestra dicha fórmula utilizando el procedimiento de inducción.