SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones lineales tienen muchas aplicaciones en todos los campos y ciencias y ya desde a. C. se tenían métodos para resolver los sistemas. Estudiaremos sobre todo el método llamado de eliminación gaussiana o de Gauss, porque es la base de los procedimientos que se utilizan para resolver un sistema con el ordenador y asimismo para el estudio de los temas que siguen, Espacios Vectoriales y Aplicaciones Lineales.

2.1-INTRODUCCIÓN Y DEFINICIONES

El término lineal proviene de línea recta que es la expresión más simple de una ecuación y que puede escribirse de la forma

$$a_1 \cdot x + a_2 \cdot y = b$$

donde a_1, a_2 (***coeficientes***) y b (***término independiente***) son ctes. tal que a_1 y a_2 no son simultáneamente cero. Dicha ecuación se llama ***ecuación lineal de incógnitas x** e **y***.

En general una ecuación lineal es cualquiera de la forma

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_n \cdot x_n = b$$

donde las variables x_1, x_2, ... x_n (***incógnitas***) aparecen elevadas a la primera potencia y no son funciones trascendentes (lnx, cosx, e^x etc.) ni existen productos, ni raíces de las variables.

A menudo tenemos necesidad de resolver varias ecuaciones lineales al mismo tiempo, una colección finita de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas x_1, x_2, ... x_n se llama un ***sistema de ecuaciones lineales o sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas:***

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}$$

donde los coeficientes y términos independientes pertenecen en nuestro caso a ○**.**

Ejemplo 2-1

$$\begin{array}{l}
3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -4 \\
-x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2
\end{array}$$

Sistema lineal de dos ecuaciones con tres incógnitas, donde las variables vienen relacionadas con operaciones de suma y resta.

Ejemplo 2-2

$$\begin{array}{l}
3x - \ln y = 1 \\
-2x + 4e^y = -2
\end{array}$$

Sistema no lineal, ya que las ecuaciones tienen funciones trascendentes (lny, e^y), es un sistema de ecuaciones sin más.

Ejemplo 2-3

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ 3x + y - 3z &= 0 \\ -2x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

Sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, términos independientes todos nulos (*sistema homogéneo*).

Ejemplo 2-4

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ -3x + \frac{2}{y} - z &= -1 \\ y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

No es un sistema lineal, pues aparecen incógnitas multiplicadas.

Los sistemas admiten una ecuación de matrices*: *A · X = B

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A \cdot X = B}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

se llama ***matriz de los coeficientes***

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$$ ***matriz de las incógnitas* y** $$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}$$ ***matriz de términos independientes***.

También se utilizará

$$\mathbf{A'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ ***matriz ampliada***.

Toda matriz representa un sistema lineal y todo sistema lineal se puede representar por su matriz ampliada.

Ejemplo 2-5

Dada la matriz $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -7 & 12 \end{pmatrix}$ el sistema asociado es $\begin{cases} \quad\quad 1y - 3z = 5 \\ 1x \; -4y \quad\quad = -1 \\ 3x \; +2y - 7z = 1 \end{cases}$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B$$

Ejemplo 2-6

El sistema

$\begin{matrix} 3x + 2y - 4z = -7 \\ -2x - 5y \; + z \; = \; 5 \end{matrix}$ la matriz asociada es $F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & -7 \\ -2 & -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B$$

Se llama **solución** de un sistema lineal a una colección de valores que sustituidos en las incógnitas satisfacen simultáneamente las ecuaciones (**comprobación**).

Ejemplo 2-7

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \quad \text{Solución única} = \begin{cases} x = 11 \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot(11) - 3\cdot(7) = 1 \\ -11 + 2\cdot(7) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{infinitas soluciones} = \begin{cases} x = 7\alpha \\ y = 5\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \{(x,y,z) = (7,5,1)\cdot\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Para $\alpha = 1$ $\quad$ **(x, y, z) = (7, 5, 1)** $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot(7) - 3\cdot(5) + 1 = 0 \\ 7 - 2\cdot(5) + 3\cdot(1) = 0 \end{cases}$

Resolver *un sistema lineal significa encontrar todas las posibles soluciones.*

En orden a las soluciones podemos clasificar los sistemas en:

Compatibles: *si tienen solución* $\begin{cases} \textbf{determinado} \text{ si tiene una única solución} \\ \textbf{indeterminado} \text{ si tiene infinitas soluciones} \end{cases}$

Incompatibles: *si no tienen solución.*

Antes de resolver un sistema podemos averiguar si es compatible o no, para ello utilizamos el ***Teorema de Rouché-Fröbenius***

Un sistema puede ser:

$$\begin{cases} \textbf{Compatible} \Leftrightarrow \textbf{rg(A)} = \textbf{rg(A')} \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{determinado} \Leftrightarrow \textbf{rg(A)} = \textbf{rg(A')} = \textbf{n}^{\textbf{o}} \textbf{ de incógnitas} \\ \textbf{indeterminado} \Leftrightarrow \textbf{rg(A)} = \textbf{rg(A')} < \textbf{n}^{\textbf{o}} \textbf{ de incógnitas} \end{cases} \\ \\ \textbf{Imcompatible} \Leftrightarrow \textbf{rg(A)} \neq \textbf{rg(A')} \end{cases}$$

2.2 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

I) Método de Gauss (Eliminación gaussiana)

Antes de encontrar las soluciones de un sistema, observamos que ciertos sistemas de forma triangular o casi triangular (la matriz ampliada del sistema está escalonada por filas) son más sencillos de resolver que otros, por ejemplo

$$\begin{aligned} x + 4y - 2z &= 3 \\ y + 2z &= 10 \\ 3z &= 12 \end{aligned}$$

Con el proceso de ***sustitución hacia atrás***, en el cual, primero se resuelve la última ecuación en z: $z = \frac{12}{3} = 4$ y después subiendo a la anteúltima, sustituyendo los valores encontrados en la ecuación anterior, se halla y: $y = 10 - 2z = 10 - 2\cdot(4) = 2$, y así, llegamos a la primera ecuación que resolvemos en x:

$$x = 3 - 4y + 2z = 3 - 4(2) + 2(4) = 3$$

Nuestro objetivo es por lo tanto, convertir un sistema lineal general a la forma triangular o casi triangular, para después resolver con la sustitución hacia atrás.

Un sistema lineal puede reducirse a la forma triangular o casi triangular (forma escalonada) aplicando operaciones elementales sobre las ecuaciones, las cuales corresponden a operaciones elementales sobre las filas en la matriz ampliada, de forma que estas operaciones no influyen en la solución del sistema ***(estos sistemas que tienen las mismas soluciones se llaman sistemas equivalentes)***

Las correspondencias serían:

Operación elemental en una matriz	**Operación elemental en un sistema**
Cambiar dos filas	Cambiar dos ecuaciones
Multiplicar una fila por una cte. $K \neq 0$	Multiplicar una ecuación por una cte. $K \neq 0$
Sumar una fila multiplicada por una cte. $K \neq 0$ a otra fila	Sumar una ecuación multiplicada por una cte. $K \neq 0$ a otra ecuación

Ejemplo 2-8

Sea el sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$ Sistema equivalente $\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 5 \\ 2x - y + 3z = -1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Hemos cambiado las ecuaciones de lugar.

Sea el sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$ Sistema equivalente $\begin{cases} -2x + y - 3z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Hemos multiplicado por (–1) la primera ecuación.

Sea el sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 2x + 4y - 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$ Sistema equivalente $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 5y - 5z = 6 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Hemos sumado a la 2ª ecuación la 1ª multiplicada por (–1)

El orden de elección de las operaciones elementales sobre los sistemas es el que marca la sencillez de las operaciones y un determinado razonamiento del trabajo de esas operaciones en la búsqueda del resultado.

I) Caso compatible determinado:

Ejemplo 2-9

Resolver por eliminación gaussiana el sistema

$$\begin{aligned} 3x + 3y + 8z &= 1 \\ x + 4y - 4z &= 3 \\ 3y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

En principio el cambio de ecuaciones sería la 1ª por la 2ª para emplear como pivote el **1**

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow F_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + 4y - 4z &= 3 \\ 3x + 3y + 8z &= 1 \\ 3y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

hacemos ceros debajo del primer pivote, el **1**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow F_2 - 3 \cdot F_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -4 & 3 \\ 0 & -9 & 20 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + 4y - 4z &= 3 \\ -9y + 20z &= -8 \\ 3y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

cambiamos la 2ª fila por la 3ª para facilitar hacer ceros en la 2ª columna

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -4 & 3 \\ 0 & -9 & 20 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow F_{2,3} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{3} & 2 & 7 \\ 0 & -9 & 20 & -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + 4y - 4z &= 3 \\ 3y + 2z &= 7 \\ -9y + 20z &= -8 \end{aligned}$$

hacemos ceros en la 2ª columna

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{3} & 2 & 7 \\ 0 & -9 & 20 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow F_3 + 3\cdot F_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{3} & 2 & 7 \\ 0 & 0 & \mathbf{26} & 13 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + 4y - 4z &= 3 \\ 3y + 2z &= 7 \\ 26z &= 13 \end{aligned}$$

rg(A) = rg(A′)=nº de incógnitas → Sistema compatible determinado

aplicando la sustitución hacia atrás **(x, y, z) = (–3, 2,** $\mathbf{\frac{1}{2}}$ **)**

II) Caso compatible indeterminado:

Ejemplo 2-10

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 7 \\ x + y + \quad + 2t &= 8 \\ 2x + 2y + 3z \quad &= 10 \\ -x - y - 2z + 2t &= 0 \end{aligned}$$

Cogemos el primer pivote en la matriz ampliada (procurando que sea un uno) y hacemos ceros debajo de él. En general cuando no es un uno el primer pivote, para anular los correspondientes elementos de la columna, se multiplica por $(\frac{-a_i}{a_{11}})$ la fila del pivote, donde a_i es el elemento que queremos anular y se suma a la fila correspondiente.

$$A' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 - 1\cdot F_1 \\ F_3 - 2\cdot F_1 \\ F_4 + 1\cdot F_1 \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x + y + z + t &= 7 \\ -z + t &= 1 \\ z - 2t &= -4 \\ -z + 3t &= 7 \end{aligned}$$

Cogemos el 2º pivote y hacemos ceros debajo de él

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_3 + 1\cdot F_2 \\ F_4 - 1\cdot F_2 \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + y + z + t &= 7 \\ -z + t &= 1 \\ -t &= -3 \\ 2t &= 6 \end{aligned}$$

Cogemos el 3er pivote y hacemos ceros debajo de él

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{4,3}(2) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A' \Leftrightarrow \begin{aligned} \mathbf{x} + y + z + t &= \mathbf{7} \\ -\mathbf{z} + t &= -2 \\ -\mathbf{t} &= -3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

3 = rg(A) = rg(A′)   nº de incógnitas = 4 → Sistema compatible indeterminado

La anteúltima ecuación tiene solución, por lo que empezaríamos la sustitución hacia atrás despejando la incógnita correspondiente, en este caso la t.

Por regla general se despejan las incógnitas que definen los ***pivotes*** *en función de las otras, quedando* ***la solución en paramétricas***

$$\begin{array}{ll} t = 3 & x = -1 - \alpha \\ z = 5 & y = \quad \alpha \\ x = 7 - y - 5 - 3 & z = 5 \\ & t = 3 \end{array}$$

$$\text{Soluciones indeterminadas} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha$$

El vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ se llama **solución particular,** que sale para el parámetro igual a cero (el valor más sencillo) de forma que $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

Al vector $\alpha . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se le llama **solución homogénea ,** es un vector del espacio nulo, es decir

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

III) Caso incompatible:

Ejemplo 2-11

Resolver el sistema

$$\begin{array}{l} x + y + z + t = 7 \\ x + y + 2t = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \\ -x - y - 2z + 2t = 0 \end{array}$$

Cogemos el primer pivote y hacemos ceros debajo de él

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 - 1\cdot F_1 \\ F_3 - 2\cdot F_1 \\ F_4 + 1\cdot F_1 \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + y + z + t &= 7 \\ -z + t &= -2 \\ z - 2t &= -4 \\ -z + 3t &= 7 \end{aligned}$$

Cogemos el 2º pivote y hacemos ceros debajo de él

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_3 + 1\cdot F_2 \\ F_4 - 1\cdot F_2 \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x + y + z + t &= 7 \\ -z + t &= -2 \\ -t &= -6 \\ 2t &= 9 \end{aligned}$$

Cogemos el 3er pivote y hacemos ceros debajo de él

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow F_4 + 2\cdot F_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}' \Leftrightarrow \begin{aligned} x + y + z + t &= 7 \\ -z + t &= -2 \\ -t &= -6 \\ \mathbf{0} &= \mathbf{-3} \end{aligned}$$

La última ecuación no tiene solución, luego el sistema es incompatible.

Por Rouché-Fröbenius el rg(A) = 3 y rg(A') = 4, luego el sistema es incompatible.

*Cuando hay una ecuación de la forma **(0, 0,.....0, b) con b ≠ 0** al hallar la matriz escalonada de la matriz ampliada, el sistema es **incompatible.***

Ejemplo 2-12

Resolver el sistema

$$x - y + 3z - 2t = -3$$

Nº de incógnitas(4) menos nº de ecuaciones(1) igual a nº de parámetros(3)

A'=(1 -1 3 –2 – 3)

Solución paramétrica: $x = y - 3z + 2t - 3$ $\begin{cases} x = \mu - 3\lambda + 2\delta - 3 \\ y = \mu \\ z = \lambda \\ t = \delta \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistemas homogéneos

*Los sistemas en los que todos los términos independientes son nulos se llaman **sistemas homogéneos**. Siempre tienen la solución (0,0,.....0) llamada **trivial, por lo tanto siempre son compatibles determinados.***

Como la columna de los términos independientes no aporta nada al rango de la matriz ampliada, se puede prescindir de esa columna y sólo estudiaríamos el rango de la matriz A, luego el teorema de **Rouché-Fröbenius** se convierte para los sistemas homogéneos en:

$$\textbf{Compatible} \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{determinado} \Leftrightarrow \textbf{rg(A)} = \textbf{n}^{\textbf{o}} \textbf{ de incógnitas} \Leftrightarrow \text{Para A cuadrada } |\mathbf{A}| \neq 0 \\ \textbf{indeterminado} \Leftrightarrow \textbf{rg(A)} < \textbf{n}^{\textbf{o}} \textbf{ de incógnitas} \Leftrightarrow \text{Para A cuadrada } |\mathbf{A}| = 0 \end{cases}$$

Nuestro interés es encontrar soluciones distintas de la trivial, es decir resolver sistemas homogéneos compatibles indeterminados.

Ejemplo 2-13

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

Cogemos el primer pivote y hacemos ceros debajo de él

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 - 1 \cdot F_1 \\ F_3 - 2 \cdot F_1 \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ -2z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

Cambiamos la 2ª ecuación por la 1ª

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F_{2,3} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ -2z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

Hacemos ceros debajo del 2º pivote

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F_4 - 1 \cdot F_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ -2z &= 0 \\ 2z &= 0 \end{aligned}$$

Hacemos ceros debajo del 3er pivote

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F_4 + 1\cdot F_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ -2z &= 0 \end{aligned}$$

rg(A) = nº de incógnitas ↔ Compatible determinado

3 = rg(A) = nº de incógnitas = 3 ↔ Compatible determinado

La sustitución hacia atrás nos da la solución**: (x, y, z) = (0, 0, 0)** llamada ***solución trivial*** y que tienen todos los sistemas homogéneos.

Ejemplo 2-14

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

Hacemos ceros debajo del 1er pivote

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 - 1\cdot F_1 \\ F_3 - 2\cdot F_1 \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -2y - 2z &= 0 \\ -3y - 3z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

Cambiamos la fila 4ª por la 2ª

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_{4,2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ -3y - 3z &= 0 \\ -2y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Hacemos ceros debajo del 2º pivote

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_3 + 3\cdot F_2 \\ F_4 + 2\cdot F_2 \end{cases} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Rg(A) = 2 < nº de incógnitas = 3 →Compatible indeterminado (Solución homogénea)

Resolviendo por sustitución hacia atrás $\begin{cases} y = -z \\ x = -y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{solución particular} + \text{solución homogénea}$$

Aplicación en la eliminación de parámetros

Sea el sistema $\begin{cases} x = b_1 + a_{11}\delta + a_{12}\theta + \dots\dots + a_{1n}\lambda \\ y = b_2 + a_{21}\delta + a_{22}\theta + \dots\dots + a_{2n}\lambda \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ z = b_m + a_{m1}\delta + a_{m2}\theta + \dots\dots + a_{mn}\lambda \end{cases}$

Eliminar los parámetros **δ, θ, ...λ** es lo mismo que obtener la condición que deben verificar los valores **(x, y,.....z)** para los que el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}\delta + a_{12}\theta + \dots\dots + a_{1n}\lambda = x - b_1 \\ a_{21}\delta + a_{22}\theta + \dots\dots + a_{2n}\lambda = y - b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}\delta + a_{n2}\theta + \dots\dots + a_{mn}\lambda = z - b_m \end{cases}$$

sea compatible, es decir:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & x - b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & y - b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & z - b_m \end{array}\right)$$

Ejemplo 2-15

Eliminar los parámetros en el sistema:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta \quad &= x \\ \beta + \gamma &= y \\ \alpha + 2\beta + \gamma &= z \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{pmatrix}$$

Hallamos su forma escalonada: hacemos ceros debajo del 1^{er} pivote **1**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{pmatrix} \Rightarrow F_3 - 1 \cdot F_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z-x \end{pmatrix}$$

Hacemos ceros en la 2ª columna debajo del 2º pivote **1**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & x \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z-x \end{pmatrix} \Rightarrow F_3 - 1 \cdot F_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & x \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-x-y \end{pmatrix}$$

Evidentemente para que el sistema sea compatible en la última fila se tiene que verificar que **z -x - y = 0** (***Ecuación en implícitas***) que es la condición buscada.

Sistemas mal condicionados

Vamos a ver que hay sistemas en las que un pequeño error de redondeo puede producir un error grande en los resultados finales; a estos sistemas se les llama ***mal condicionados.***

Ejemplo 2-20

Sea el sistema

$$x + 2y = 10$$
$$1.1x + 2y = 10.4$$

Restamos la 1ª de la 2ª

$$0{,}1x = 0{,}4 \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Si hacemos un pequeño cambio en el sistema

$$x + 2y = 10$$
$$\mathbf{1.05}\, x + 2y = 10.4$$

Restamos la 1ª de la 2ª

$$0{,}05\, x = 0{,}4 \qquad \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$$

Es decir un error de 5 centésimas ocasiona un cambio total en las soluciones.

Estos sistemas son muy difíciles de manejar y lo que podemos hacer es reconocer cuando estamos ante un sistema mal condicionado.

¿Cómo reconocemos un sistema mal condicionado? En principio cuando el ***determinante de los coeficientes se aproxima a cero***.

El problema es especificar cuanto de aproximado a cero tiene que estar el determinante, puesto que un determinante puede cambiar su valor, multiplicando una o más ecuaciones por un factor escalar, mientras que no altera la solución del sistema:

Ejemplo 2-21

Sea el sistema

3x + 2y =18

-x + 2y = 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \quad \text{bien condicionado}$$

Sea el sistema

x + 2y = 10

1,1x + 2y = 10,4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}1 & 2 \end{vmatrix} = -0{,}2 \quad \text{mal} \quad \text{condicionado}$$

Si en este sistema multiplico las dos ecuaciones por 10, el sistema no varía ni la solución ni el estado de condicionamiento, pues estaríamos ante un sistema equivalente. En cambio si ahora calculamos su determinante, obtenemos

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 11 & 20 \end{vmatrix} = -20 \quad \text{bien condicionado ??}$$

no está bien condicionado, pues el sistema sigue siendo el mismo, luego con el determinante no podemos asegurar su condicionamiento del todo.