AUTOEVALUACIÓN - Espacios Vectoriales.

Cada **(●)** *es un punto.*

Hay en total 50 puntos, de los cuales 20 son de cuestiones y 30 de ejercicios.

A) Cuestiones (20 puntos)

C-1) ¿Existe...

(●) **a)**...un subespacio de $\Re^2$ que "se parezca" a $\Re$?

(●) **b)**...un subespacio de $\Re^2$ que "se parezca" a $\Re^3$?

Si existe pon un ejemplo, y si no, razona por qué.

(●) **C-2)** En el espacio vectorial de las matrices 2x2 con términos reales, inventa un ejemplo de subespacio (que no hayas visto en otro lugar).

(●●) **C-3)** **a)** Si S y T son subespacios de $\Re^5$, siendo **dim S = 2** y **dim T = 3**, ¿qué posibilidades hay para las dimensiones de **S+T** y de **S∩T** ?

(●) **b)** Lo mismo pero en $\Re^4$ en lugar de $\Re^5$.

(●) **C-4)** ¿La intersección de dos planos en $\Re^3$ puede ser un solo punto? Explica por qué. *(Puedes razonar como en la cuestión anterior).*

(●) **C-5)** **a)** En $\Re^2$, inventa un conjunto de tres vectores {u,v,w} linealmente dependientes, que tenga rango 2, de modo que se pueda suprimir uno de ellos y se conserve el rango.

(●●) **b)** Lo mismo, pero de modo que no se pueda suprimir uno cualquiera. Señala cuáles se pueden suprimir y cuáles no.

C-6) ¿Pueden ser...

(●) **a)** linealmente independientes cinco vectores en $\Re^4$?

(●) **b)** sistema generador cuatro vectores en $\Re^5$?

Si es posible pon un ejemplo, y si no, razona por qué.

(●) **C-7)** Si **u, v** son linealmente independientes, ¿también lo son **2u** y **3v**? Explica por qué.

(●) **C-8)** ¿Cierto o falso? *"En un espacio vectorial, ningún conjunto linealmente independiente puede tener más vectores que un sistema generador."* Razona la respuesta.

C-9) Dado el vector **v=(1,2)** en $\Re^2$, como es sabido, sus coordenadas en la base canónica { **(1,0), (0,1)** } son (1,2). Si es posible, inventa otra base de modo que las coordenadas de **v** sean...

(●) **a)** (2,1)

(●) **b)** (–1, –2)

(●) **c)** (0, 0)

C-10) ¿Puede esta matriz ser una matriz de cambio de base en algún espacio vectorial? Razona la respuesta.

(●) **a)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(●) **b)** $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(●) **c)** $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

B) Ejercicios (30 puntos)

E-1) En $\Re^2$, determina si es o no subespacio vectorial el conjunto...

(●) **a)** { (a+b, a+b+2) : a, b $\in \Re$ }

(●) **b)** { (a+1, a+1) : a$\in \Re$ }

(●) **E-2)** En $\Re^3$, determina si v=(1,4,16) pertenece al subespacio generado por (1,2,4) y (-1,-1,2).

(●) **E-3)** **a)** Pasar a forma implícita el subespacio de $\Re^3$ dado en paramétricas: { (a+b, a+2b, b) : a, b $\in \Re$ }

(●) **b)** Pasar a forma paramétrica el subespacio de $\Re^3$ dado en implícitas: { x-2y+3z=0 }

E-4) Determinar si es o no linealmente independiente el conjunto...

(●) **a)** (1, 2, 0, 1), (-1, -1, -1, 3), (4, 0, -2, 1), (2, 0, 0, 1) en $\Re^4$

(●) **b)** (1, 2, 0, 1) , (2, -3, -3, 3), (-1,12, 6, -3) en $\Re^4$

E-5) Hallar el rango del siguiente conjunto de vectores:

(●) **a)** (1,0,1), (2,0,3), (-1,0,4) en $\Re^3$

(●) **b)** (1,2), (3,-1), (5,0), (1,-2) en $\Re^2$

(●) **E-6)** Extraer del siguiente conjunto en $\Re^4$ una familia linealmente independiente:

(1, 2, 0, 1), (-1, -1, -1, 3), (-1, 1, -3, 11) ,(4, 0, -2, 1), (2, -3, -3, 3),

(●) **E-7)** Dado el subespacio de $\Re^5$ en forma paramétrica (a, a+b, a+b+c, c, 2a-b), obtener un sistema generador del subespacio.

E-8) En $\Re^4$, si S tiene como sistema generador { (1,1,0,0), (1, -1, 0, 0) } y T tiene como sistema generador { (0,2,1,0) , (-1,1,1,0) }, hallar:

(●) **a)** un sistema generador del subespacio S+T.

(●) **b)** una base de S+T.

E-9) Dados los subespacios de $\Re^4$ S= $\left\{\begin{array}{c} x+y-z-t=0 \\ 2x+2y-z-t=0 \end{array}\right\}$ y T= $\left\{\begin{array}{c} x-y=0 \\ z-t=0 \end{array}\right\}$, calcular:

(●) **a)** el subespacio S∩T.

(●) **b)** el subespacio S+T *(sugerencia: se puede usar el resultado de a) para hallar la dimensión de S+T).*

E-10) Dado el siguiente subespacio de $\Re^4$ en implícitas, $\left\{\begin{array}{c} x+y+z+t=0 \\ y-2z-t=0 \end{array}\right\}$ hallar una base y dimensión. Puedes hacerlo mediante el siguiente proceso:

(●) - Pasar las implícitas a paramétricas.

(●) - De la forma paramétrica, obtener un sistema generador.

(●) - Del sistema generador, extraer una base. Dar la dimensión.

(●) **E-11)** **a)** Determinar si (1,2,3) (4,5,6), (7,8,9) forma base de $\Re^3$.

(●) **b)** Determinar si (1,0,1) , (-1,0,2) forma base del subespacio { y=0 } de $\Re^3$.

(●) **E-12)** Extender el siguiente conjunto linealmente independiente hasta que forme base de $\Re^4$. (2,3,0,1), (0,2,0,0).

(●) **E-13)** Reducir el siguiente sistema generador hasta que forme base de $\Re^3$.

(1,2,3) (4,5,6), (7,8,9), (0,1,3)

(●●) **E-14)** Dada la base { (0,-1), (1,2) } de $\Re^2$, hallar las coordenadas del vector v= (-3,-8) en dicha base.

E-15) Dadas las bases B={ (1,0), (0,1) } (canónica) y B'={ (0,-1), (1,2) } , hallar:

(●) **a)** la matriz de cambio de base de B' a B .

(●●) **b)** la matriz de cambio de base de B a B'

E-16) Determinar si los siguientes subespacios están en suma directa.

(●) **a)** S= <(1,2,0,0), (1,0,0,2)> y T= <(0,0,2,1), (2,0,0,1)> en $\Re^4$

(●) **b)** S= <(1,2,0), (1,0,2)> y T= <(0,2,1), (2,0,1)> en $\Re^3$

(●) **E-17)** Hallar un subespacio suplementario (o complementario) de <(1,2,3), (4,5,6)> en $\Re^3$.