AUTOEVALUACIÓN - El Espacio Euclídeo.

Cada **(●)** *es un punto.*

Hay en total 40 puntos, de los cuales 10 son de cuestiones y 30 de ejercicios.

A) Cuestiones (10 puntos)

Nota: el producto escalar será el usual de $\mathbb{R}^n$ mientras no se indique lo contrario.

C-1) Dar un vector ortogonal a ...

(●) **a)** (1,2,-1) en $\mathbb{R}^3$

(●) **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ en el espacio de matrices M_2 (con el producto escalar usual) que se obtiene mediante la identificación de M_2 con $\mathbb{R}^4$

(●●) **C-2)** Determinar si la siguiente operación entre vectores de $\mathbb{R}^2$ es o no un producto escalar:

(a,b) · (a',b') = a a' – b b' *(Sugerencia: Verificar la propiedad definida positiva)*

(●) **C-3)** ¿En $\mathbb{R}^4$ puede existir un conjunto de 5 vectores ortogonales? Razonar la respuesta.

(●) **C-4)** Razonar si es verdadero o falso: "Un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^3$ siempre tiene 3 vectores".

(●) **C-5)** En $\mathbb{R}^2$, proyectamos un cierto vector sobre la recta y=x. ¿Es posible obtener como resultado el vector (1,2) ? Razonar la respuesta.

(●) **C-6)** ¿Pueden dos vectores distintos producir la misma proyección sobre un subespacio?

(●●) **C-7)** Razonar si la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ puede ser matriz de proyección, y en ese caso, hallar a qué subespacio corresponde.

B) Ejercicios (30 puntos)

E-1) Sean los vectores u=(4,0,3) , v=(1, 1, 3) en $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Hallar:

(•) **a)** El módulo de **u** y de **v.**
(•) **b)** La distancia entre **u** y **v.**
(•) **c)** El ángulo que forman.

E-2) Comprobar si los siguientes vectores son o no ortogonales:

(•) **a)** (1,0,0,3,4) y (1,2,3,1,-1) en $\mathbb{R}^5$ con el producto escalar usual.
(•) **b)** (3,3,1) y (-1,1,-1) en $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar (a,b,c)·(a',b',c') = aa' + 2bb' + 3 cc'
(•) **c)** f(x)=x y g(x)=x+1 en el espacio de funciones continuas ***C***[0,1] con el producto escalar f · g = $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

E-3) Normalizar el vector v= (2,1,3,-2) en $\mathbb{R}^4$

(•) **a)** con el producto escalar usual.
(•) **b)** con el producto escalar dado por: (a,b,c,d)·(a',b',c',d') = aa' + bb' + 2 cc' +2 dd'

E-4) Comprobar en cada caso si se trata o no de una matriz ortogonal:

(•) **a)** A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(•) **b)** B = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(•) **E-5)** Comprobar si S y T son subespacios ortogonales en $\mathbb{R}^4$, siendo:
{ (-3,-3,0,1) , (1,0,2,0) } base de S, { (0,1,0,3) (1,1,-1,6) } base de T.

E-6) Hallar en $\mathbb{R}^3$ el complemento ortogonal de los siguientes subespacios:

(•) a) S generado por (1,0,2)
(•) b) T generado por (1,0,2), (1,1,1)

E-7) Dado el vector (0,3,2), hallar su proyección ortogonal sobre los siguientes subespacios:

(●) **a)** sobre la recta generada por el vector (1,2,1)

(●) **b)** sobre el plano P generado por (1,2,1) y (0,-1,2)

(●) **E-8)** Hallar la mejor aproximación al vector (0,3,2) en el plano generado por (1,2,1) y (0,-1,2).

(●●) **E-8)** Hallar una base ortogonal del plano generado por (0,1,0) y (3,2,1) en $\mathbb{R}^3$.

E-9) Dado el subespacio generado por (1,0,-1,1) y (0,2,0,3) en $\mathbb{R}^4$,

(●●) **a)** Hallar su matriz de proyección.

(●) **b)** Proyectar sobre dicho subespacio el vector (0,0,0,5).

E-10) Dado el vector v=(3,4) de $\mathbb{R}^2$,

(●) **a)** Hallar su simétrico respecto a la recta generada por (2,1).

(●) **b)** Hallar el área del triángulo definido por v y su simétrico.

(●●) **E-11)** Hallar la mejor aproximación al vector (1,0,1) en el plano generado por (2,0,1) y (1,0,2).

(●●) **E-12)** En el espacio de funciones continuas ***C***[0,2] con el producto escalar $f \cdot g = \int_0^2 f(x)g(x)\,dx$ hallar la mejor aproximación de la función f(x)=2x+1 en el subespacio generado por la función g(x)=x.

(●●) **E-14)** Comprobar que el sistema $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 3 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$ es incompatible y resolverlo por mínimos cuadrados.