AUTOEVALUACIÓN - Aplicaciones Lineales.

Cada **(●)** *es un punto.*

Hay en total 40 puntos, de los cuales 15 son de cuestiones y 25 de ejercicios.

A) Cuestiones (15 puntos)

C-1) Razonar las respuestas:

(●) **a)** ¿Una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ puede ser inyectiva?

(●) **b)** ¿Una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ puede ser inyectiva?

(●) **c)** ¿Una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ puede ser suprayectiva?

(●) **d)** ¿Una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ puede ser suprayectiva?

(●) **e)** ¿Una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ puede ser inyectiva sin ser suprayectiva?

(●) **f)** ¿Una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ puede ser inyectiva sin ser suprayectiva?

C-2) Verdadero o falso:

(●) Dada $f: V \longrightarrow W$, si $v_1, \ldots, v_n$ son un sistema generador de V, entonces $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ son un sistema generador de W.

C-3) Construye una matriz que pueda corresponder a:

(●) **a)** una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ inyectiva

(●) **b)** una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ suprayectiva

(●) **c)** una aplicación lineal entre los espacios que quieras, biyectiva

(●) **C-4)** Dada una aplicación lineal f, con matriz asociada A, ¿qué relación hay entre **Im(f)** y el rango de A?

C-5) Para cada una de estas aplicaciones lineales, ¿cuáles son las posibilidades para la dimensión de **Im(f)** ?

(●) **a)** $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

(●) **b)** $f: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

C-6) Para cada una de estas aplicaciones lineales, ¿cuáles son las posibilidades para la dimensión de **Ker(f)** ?

(•) **a)** $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

(•) **b)** $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

B) Ejercicios (25 puntos)

E-1) Probar si las siguientes aplicaciones son o no lineales:

(•) **a)** $$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+1\ ,\ y+1,\ x+y\ ) \end{array}$$

(•) **b)** $$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y\ ,\ x\ ) \end{array}$$

E-2) Dada $\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x+2y+t,\ \ y+3z-t,\ 0) \end{array}$, dar una base de la imagen de los siguientes subespacios:

(•) **a)** S= <(1,0,1,0), (2,3,0,–1)>

(•) **b)** T= <(0,0,3,2), (4,6,3,–1), (1,0,0,2)>

E-3) Dada la aplicación del ejercicio **E-2)**, hallar:

(•) **a)** una base del núcleo,

(•) **b)** una base de la imagen.

E-4) Clasificar (inyectiva, suprayectiva, biyectiva) las siguientes aplicaciones:

(•) **a)** $$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x-z,\ \ y-t) \end{array}$$

(•) **b)** $$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \mapsto & (z+2x,\ z+2x,\ -x-y-z,\ y) \end{array}$$

(•) **c)** $$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-x-y,\ 2x+2y,\ z) \end{array}$$

(•) **d)** $$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (3x+y,\ 3y+z,\ 3z) \end{array}$$

(•) **E-5)** Dar la ecuación de la aplicación $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sabiendo que:
$f(1,0,0)=(4,4)$; $f(0,1,0)=(-1,1)$; $f(0,0,1)=(2,9)$.

E-6)

(•) **a)** Dada la aplicación
$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x+y+z,\ z,\ y,\ x) \end{array}$$
hallar todos los vectores cuya imagen sea $w=(4,1,3,0)$.

(•) **b)** Dada la aplicación
$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x+y,\ y-z) \end{array}$$
hallar todos los vectores cuya imagen sea $u=(1,1)$.

(•) **E-7)** Dada la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que la imagen de (1,0) es (5,2) y la imagen de (0,1) es (7,3), hallar la ecuación de la aplicación inversa f^{-1} .

(•) **E-8)** Dadas las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x+y+z,\ z,\ y,\ x) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcl} g: \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x-2z,\ y-2t) \end{array}$$

hallar la aplicación compuesta $h = g \circ f$.

(••) **E-9)** Dada la aplicación
$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x+3z,\ x+2y) \end{array}$$
y la base B= { (1,1,0), (0,1,1), (0,0,1) } en $\mathbb{R}^3$, hallar la matriz de f tomando como bases B en $\mathbb{R}^3$ y la canónica en $\mathbb{R}^2$.

(••) **E-10)** Dada la aplicación del ejercicio **E-9),** y la base B'= { (–2,0), (2,1) } en $\mathbb{R}^2$, hallar la matriz de f tomando como bases la canónica en $\mathbb{R}^3$ y la base B' en p.

E-11) Dadas las bases B={ (1,4), (1,3) } de $\mathbb{R}^2$ y B'={ (2,0,1), (0,-1,0), (3,0,0) } de $\mathbb{R}^3$,

(●●) **a)** hallar la matriz en bases B y B' de una aplicación $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, si su matriz en bases canónicas es $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(●●) **b)** hallar la matriz en bases canónicas de otra aplicación $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, si su matriz en bases B y B' es $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

E-12) Ver si son equivalentes o no las siguientes matrices:

(●) **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(●) **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$