Hacia la resolución del Problema XVII de Smale en el caso real.

Ejercicio público para la obtención del D.E.A.

Cruz Enrique Borges Hernández

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación.

31 de enero de 2008

Contenidos

Contenidos

Actividad formativa.

Actividad formativa

- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de La Laguna.

Actividad formativa.

Actividad formativa

- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de La Laguna.
- Estancia de un año en la Universidad de Cantabria (SICUE).

Actividad formativa.

Actividad formativa

- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de La Laguna.
- Estancia de un año en la Universidad de Cantabria (SICUE).
- Trabajo fin de carrera en la Universidad de Cantabria.

Actividad formativa.

Actividad formativa

- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de La Laguna.
- Estancia de un año en la Universidad de Cantabria (SICUE).
- Trabajo fin de carrera en la Universidad de Cantabria.
- Cursos de doctorado en el programa *Las matemáticas y sus aplicaciones*.

Actividad formativa.

Actividad formativa

- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de La Laguna.
- Estancia de un año en la Universidad de Cantabria (SICUE).
- Trabajo fin de carrera en la Universidad de Cantabria.
- Cursos de doctorado en el programa *Las matemáticas y sus aplicaciones*.
- Trabajos dirigidos de investigación.

Actividad formativa.

Actividad formativa

- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de La Laguna.
- Estancia de un año en la Universidad de Cantabria (SICUE).
- Trabajo fin de carrera en la Universidad de Cantabria.
- Cursos de doctorado en el programa *Las matemáticas y sus aplicaciones*.
- Trabajos dirigidos de investigación.
- C.E. Borges and L.M. Pardo, On the Probability Distribution of Data at Points in Real Complete Intersection Varieties, To appear in *Journal of Complexity* (ISI. IF. 1.422, 19/298), 2008.

El problema XVII de Smale.

Problema XVII de Smale [Smale, 2000]

Can a zero of n complex polynomial equations in n unknowns be found approximately, on the average, in polynomial time with a uniform algorithm?

El problema XVII de Smale.

Problema XVII de Smale [Smale, 2000]

Can a zero of n complex polynomial equations in n unknowns be found approximately, on the average, in polynomial time with a uniform algorithm?

Respuesta positiva en [Beltrán and Pardo, 2008].

Teorema ([Beltrán and Pardo, 2008])

Existe un algoritmo que, con alta probabilidad encuentra, en tiempo polinomial, un cero aproximado de un sistema polinomial complejo.

El problema XVII de Smale.

Problema XVII de Smale [Smale, 2000]

Can a zero of n complex polynomial equations in n unknowns be found approximately, on the average, in polynomial time with a uniform algorithm?

Respuesta positiva en [Beltrán and Pardo, 2008].

Teorema ([Beltrán and Pardo, 2008])

Existe un algoritmo que, con alta probabilidad encuentra, en tiempo polinomial, un cero aproximado de un sistema polinomial complejo.

Problema XVII de Smale en el caso real [Smale, 2000].

Can a zero of n real polynomial equations in m unknowns be found approximately, on the average, in polynomial time with a uniform algorithm?

¿Por qué es importante el XVII problema de Smale en el caso real?

Aplicaciones Prácticas.

- Problema clásico de las matemáticas.

¿Por qué es importante el XVII problema de Smale en el caso real?

Aplicaciones Prácticas.

- Problema clásico de las matemáticas.
- Problemas de optimización.

¿Por qué es importante el XVII problema de Smale en el caso real?

Aplicaciones Prácticas.

- Problema clásico de las matemáticas.
- Problemas de optimización.
- Modelos matemáticos No-lineales.

¿Por qué es importante el XVII problema de Smale en el caso real?

Aplicaciones Prácticas.

- Problema clásico de las matemáticas.
- Problemas de optimización.
- Modelos matemáticos No-lineales.
- Equilibrios de Nash.

¿Por qué es importante el XVII problema de Smale en el caso real?

Aplicaciones Prácticas.

- Problema clásico de las matemáticas.
- Problemas de optimización.
- Modelos matemáticos No-lineales.
- Equilibrios de Nash.
- Movimientos de un robot.

¿Por qué no valen los resultados anteriores?

Problemas relacionados con el caso real.

- $\mathbb{R}^n$ es un espacio de medida nula en $\mathbb{C}^n$.
- La geometría de las soluciones reales es inestable y dispersa ([Azaïs and Wschebor, 2005]).
- Hay más de una componente conexa en el espacio de trabajo.

¿Por qué no valen los resultados anteriores?

Problemas relacionados con el caso real.

- $\mathbb{R}^n$ es un espacio de medida nula en $\mathbb{C}^n$.
- La geometría de las soluciones reales es inestable y dispersa ([Azaïs and Wschebor, 2005]).
- Hay más de una componente conexa en el espacio de trabajo.

Hay que reescribir todos los resultados desde cero.

Técnicas para resolver el problema.

Corriente simbólica.

Busca información universal sobre el variedad solución.

Técnicas para resolver el problema.

Corriente simbólica.

Busca información universal sobre el variedad solución.

Corriente numérica.

Busca información aproximada sobre elementos de la variedad solución.

Técnicas para resolver el problema.

Corriente simbólica.

Busca información universal sobre el variedad solución.

Corriente numérica.

Busca información aproximada sobre elementos de la variedad solución.

Desarrollo histórico.

Resolución por radicales,
Teoría de Galois.

Técnicas para resolver el problema.

Corriente simbólica.

Busca información universal sobre el variedad solución.

Corriente numérica.

Busca información aproximada sobre elementos de la variedad solución.

Desarrollo histórico.

Resolución por radicales, $\mathcal{O}(n!)$
Teoría de Galois.

Técnicas para resolver el problema.

Corriente simbólica.

Busca información universal sobre el variedad solución.

Corriente numérica.

Busca información aproximada sobre elementos de la variedad solución.

Desarrollo histórico.

Resolución por radicales, Teoría de Galois. $\mathcal{O}(n!)$

Teoría de Eliminación, Bases de Gröbner.

Técnicas para resolver el problema.

Corriente simbólica.

Busca información universal sobre el variedad solución.

Corriente numérica.

Busca información aproximada sobre elementos de la variedad solución.

Desarrollo histórico.

Resolución por radicales, Teoría de Galois.	$\mathcal{O}(n!)$
Teoría de Eliminación, Bases de Gröbner.	$\mathcal{O}\left(2^{2^n}\right)$

Técnicas para resolver el problema.

Corriente simbólica.

Busca información universal sobre el variedad solución.

Corriente numérica.

Busca información aproximada sobre elementos de la variedad solución.

Desarrollo histórico.

Resolución por radicales, Teoría de Galois. $\mathcal{O}(n!)$

Teoría de Elimінación, Bases de Gröbner. $\mathcal{O}\left(2^{2^n}\right)$

Kronecker, TERA.

Técnicas para resolver el problema.

Corriente simbólica.

Busca información universal sobre el variedad solución.

Corriente numérica.

Busca información aproximada sobre elementos de la variedad solución.

Desarrollo histórico.

Resolución por radicales, Teoría de Galois.	$\mathcal{O}(n!)$
Teoría de Eliminación, Bases de Gröbner.	$\mathcal{O}\left(2^{2^n}\right)$
Kronecker, TERA.	$\mathcal{O}(2^n)$

Técnicas para resolver el problema.

Corriente simbólica.

Busca información universal sobre el variedad solución.

Corriente numérica.

Busca información aproximada sobre elementos de la variedad solución.

Desarrollo histórico.

- Resolución por radicales, Teoría de Galois. $\mathcal{O}(n!)$
- Teoría de Eliminación, Bases de Gröbner. $\mathcal{O}\left(2^{2^n}\right)$
- Kronecker, TERA. $\mathcal{O}(2^n)$

Técnicas.

- Búsqueda exhaustivas.

Técnicas para resolver el problema.

Corriente simbólica.

Busca información universal sobre el variedad solución.

Corriente numérica.

Busca información aproximada sobre elementos de la variedad solución.

Desarrollo histórico.

Resolución por radicales, Teoría de Galois.	$\mathcal{O}(n!)$
Teoría de Eliminación, Bases de Gröbner.	$\mathcal{O}\left(2^{2^n}\right)$
Kronecker, TERA.	$\mathcal{O}(2^n)$

Técnicas.

Búsqueda exhaustivas.	$\mathcal{O}\left(2^{n^2}\right)$

Técnicas para resolver el problema.

Corriente simbólica.

Busca información universal sobre el variedad solución.

Corriente numérica.

Busca información aproximada sobre elementos de la variedad solución.

Desarrollo histórico.

- Resolución por radicales, Teoría de Galois. $\mathcal{O}(n!)$
- Teoría de Eliminación, Bases de Gröbner. $\mathcal{O}\left(2^{2^n}\right)$
- Kronecker, TERA. $\mathcal{O}(2^n)$

Técnicas.

- Búsqueda exhaustivas. $\mathcal{O}\left(2^{n^2}\right)$
- Método de Newton.

Técnicas para resolver el problema.

Corriente simbólica.

Busca información universal sobre el variedad solución.

Corriente numérica.

Busca información aproximada sobre elementos de la variedad solución.

Desarrollo histórico.

- Resolución por radicales, Teoría de Galois. $\mathcal{O}(n!)$
- Teoría de Eliminación, Bases de Gröbner. $\mathcal{O}\left(2^{2^n}\right)$
- Kronecker, TERA. $\mathcal{O}(2^n)$

Técnicas.

- Búsqueda exhaustivas. $\mathcal{O}\left(2^{n^2}\right)$
- Método de Newton. ¿?

El método de Newton.

Definición (Operador de Newton)

Sea f un sistema real de m ecuaciones con n variables. Definimos el operador de Newton como:

$$\begin{array}{rccc} N_f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & x - (Df(x))^{\dagger} f(x), \end{array}$$

donde $(Df(x))^{\dagger}$ es la pseudo-inversa de Moore-Penrose de la matriz diferencial de f.

El método de Newton.

Definición (Operador de Newton)

Sea f un sistema real de m ecuaciones con n variables. Definimos el operador de Newton como:

$$\begin{array}{rccc} N_f : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & x - (Df(x))^{\dagger} f(x), \end{array}$$

donde $(Df(x))^{\dagger}$ es la pseudo-inversa de Moore-Penrose de la matriz diferencial de f.

Método de Newton.

El método de Newton consiste en, dado un punto inicial x, iterar el operador de Newton.

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = N_f(x_n). \end{cases}$$

El método de Newton.

Definición (Operador de Newton)

Sea f un sistema real de m ecuaciones con n variables. Definimos el operador de Newton como:

$$\begin{array}{rccc} N_f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & x-(Df(x))^{\dagger}f(x), \end{array}$$

donde $(Df(x))^{\dagger}$ es la pseudo-inversa de Moore-Penrose de la matriz diferencial de f.

Método de Newton.

El método de Newton consiste en, dado un punto inicial x, iterar el operador de Newton.

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = N_f(x_n). \end{cases}$$

Problema.

¿Cómo escogemos el punto inicial x?

Ceros aproximados.

Definición (Cero Aproximado.)

Decimos que $x \in \mathbb{R}^n$ *es un* *cero aproximado* *de* f *si existe una raíz* ζ *de* f *tal que:*

$$\|N_f^k(x) - \zeta\| \leq \frac{1}{2^{2^n-1}}\|x - \zeta\|,$$

donde $N_f^k(x)$ *denota aplicar* k *veces el operador de Newton.*

Ceros aproximados.

Definición (Cero Aproximado.)

Decimos que $x \in \mathbb{R}^n$ es un cero aproximado *de f si existe una raíz ζ de f tal que:*

$$\|N_f^k(x) - \zeta\| \leq \frac{1}{2^{2^n-1}} \|x - \zeta\|,$$

donde $N_f^k(x)$ denota aplicar k veces el operador de Newton.

Posibles soluciones.

- Monte Carlo ([Hubbard et al., 2001]).

Ceros aproximados.

Definición (Cero Aproximado.)

Decimos que $x \in \mathbb{R}^n$ es un cero aproximado de f si existe una raíz ζ de f tal que:

$$\|N_f^k(x) - \zeta\| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}} \|x - \zeta\|,$$

donde $N_f^k(x)$ denota aplicar k veces el operador de Newton.

Posibles soluciones.

- Monte Carlo ([Hubbard et al., 2001]).

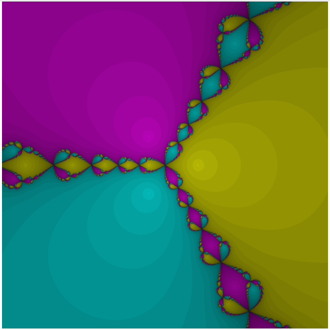


Figura: Fractal de Newton de $z^3 - 1$.

Ceros aproximados.

Definición (Cero Aproximado.)

Decimos que $x \in \mathbb{R}^n$ *es un cero aproximado de* f *si existe una raíz* ζ *de* f *tal que:*

$$\|N_f^k(x) - \zeta\| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}} \|x - \zeta\|,$$

donde $N_f^k(x)$ *denota aplicar* k *veces el operador de Newton.*

Posibles soluciones.

- Monte Carlo ([Hubbard et al., 2001]).
- Inclusion-Exclusion ([Cucker et al., 2008]).

Ceros aproximados.

Definición (Cero Aproximado.)

Decimos que $x \in \mathbb{R}^n$ es un cero aproximado de f si existe una raíz ζ de f tal que:

$$\|N_f^k(x) - \zeta\| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}} \|x - \zeta\|,$$

donde $N_f^k(x)$ denota aplicar k veces el operador de Newton.

Posibles soluciones.

- Monte Carlo ([Hubbard et al., 2001]).
- Inclusion-Exclusion ([Cucker et al., 2008]).

α Teorema de Smale.

Existe una constante $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ y una función $\alpha(f, x)$ tal que:
Si $\alpha(f, x) \leq \alpha_0$ entonces x es un cero aproximado de f.

Ceros aproximados.

Definición (Cero Aproximado.)

Decimos que $x \in \mathbb{R}^n$ es un cero aproximado de f si existe una raíz ζ de f tal que:

$$\|N_f^k(x) - \zeta\| \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}} \|x - \zeta\|,$$

donde $N_f^k(x)$ denota aplicar k veces el operador de Newton.

Posibles soluciones.

- Monte Carlo ([Hubbard et al., 2001]).
- Inclusion-Exclusion ([Cucker et al., 2008]).
- Homotopía ([Shub and Smale, 1993b]).

¿En qué consiste el método de homotopía?
Notaciones.

Notaciones.

- Sea $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ y $(d) = (d_1, \ldots, d_m) \in \mathbb{N}^m$. Denotamos por $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}_{(d)}$ el espacio vectorial de todos los sistemas de m polinomios en n variables con coeficientes reales y de, a lo sumo, grado (d).

¿En qué consiste el método de homotopía?

Notaciones.

Notaciones.

- Sea $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ y $(d) = (d_1, \ldots, d_m) \in \mathbb{N}^m$. Denotamos por $\mathcal{H}_{(d)}^{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial de todos los sistemas de m polinomios en n variables con coeficientes reales y de, a lo sumo, grado (d).
- Definimos variedad proyectiva $V_{\mathcal{P}}(f)$ de un polinomio f, como el siguiente subconjunto de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$:

$$V_{\mathcal{P}}(f) := \{\zeta \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : f(\zeta) = 0\}.$$

¿En qué consiste el método de homotopía?
Notaciones.

Notaciones.

- Sea $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ y $(d) = (d_1, \ldots, d_m) \in \mathbb{N}^m$. Denotamos por $\mathcal{H}_{(d)}^{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial de todos los sistemas de m polinomios en n variables con coeficientes reales y de, a lo sumo, grado (d).
- Definimos variedad proyectiva $V_{\mathcal{P}}(f)$ de un polinomio f, como el siguiente subconjunto de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$:

$$V_{\mathcal{P}}(f) := \{\zeta \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : f(\zeta) = 0\}.$$

- Definimos variedad de incidencia V como el siguiente subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{H}_{(d)}^{\mathbb{R}}) \times \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$:

$$V := \left\{(f, \zeta) \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_{(d)}^{\mathbb{R}}) \times \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : f(\zeta) = 0\right\}.$$

¿En qué consiste el método de homotopía?

Notaciones.

Notaciones.

- Denotamos por π_1 y π_2 las dos proyecciones canónicas. Esto es:

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
\mathcal{P}(\mathcal{H}_{(d)}^{\mathbb{R}}) & & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}).
\end{tikzcd}
$$

¿En qué consiste el método de homotopía?

Notaciones.

Notaciones.

- Denotamos por π_1 y π_2 las dos proyecciones canónicas. Esto es:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathcal{P}(\mathcal{H}_{(d)}^{\mathbb{R}}) & & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}). \end{tikzcd}$$

- Llamamos variedad discriminante Σ al subcojunto de sistemas polinomiales con alguna raíz singular.

¿En qué consiste el método de homotopía?

Notaciones.

Notaciones.

- Denotamos por π_1 y π_2 las dos proyecciones canónicas. Esto es:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathcal{P}(\mathcal{H}_{(d)}^{\mathbb{R}}) & & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \,. \end{tikzcd}$$

- Llamamos variedad discriminante Σ al subcojunto de sistemas polinomiales con alguna raíz singular.
- Denotamos por $\Sigma^{'}$ al siguiente subconjunto de V:

$$\Sigma^{'} := \{(f,\zeta) \in V : \zeta \text{ es una raíz singular}\}.$$

¿En qué consiste el método de homotopía?

Notaciones.

Notaciones.

- Denotamos por π_1 y π_2 las dos proyecciones canónicas. Esto es:

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathcal{P}(\mathcal{H}_{(d)}^{\mathbb{R}}) & & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) . \end{tikzcd}$$

- Llamamos variedad discriminante Σ al subcojunto de sistemas polinomiales con alguna raíz singular.
- Denotamos por Σ' al siguiente subconjunto de V:

$$\Sigma' := \{(f,\zeta) \in V : \zeta \text{ es una raíz singular}\}.$$

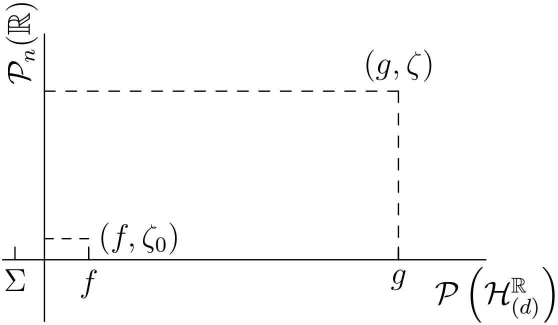
- Mucho cuidado:

$$V \setminus \Sigma' \supsetneq V \setminus \pi_1^{-1}(\Sigma).$$

¿En qué consiste el método de homotopía?

Método de homotopía.

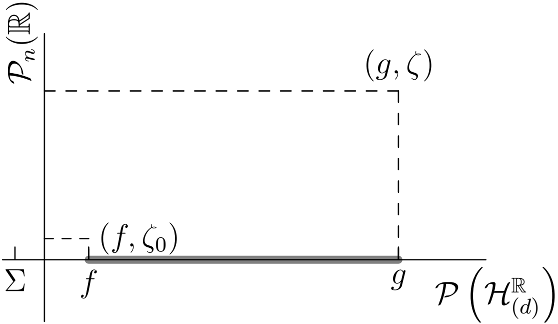
- Sean f, g dos sistemas en la misma componente conexa de $\mathcal{P}(\mathcal{H}_{(d)}^{\mathbb{R}}) \setminus \Sigma$ tales que conocemos una raíz ζ_0 de f.



¿En qué consiste el método de homotopía?

Método de homotopía.

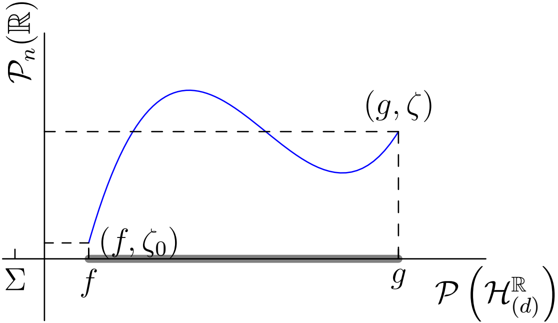
- Sea $F : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H}_{(d)}^{\mathbb{R}}) \setminus \Sigma$ un camino que los une.



¿En qué consiste el método de homotopía?

Método de homotopía.

- Usando el Teorema del Fibrado de Ereshmann levantamos el camino a $V \setminus \pi_1^{-1}(\Sigma)$ con punto inicial (f, ζ_0).

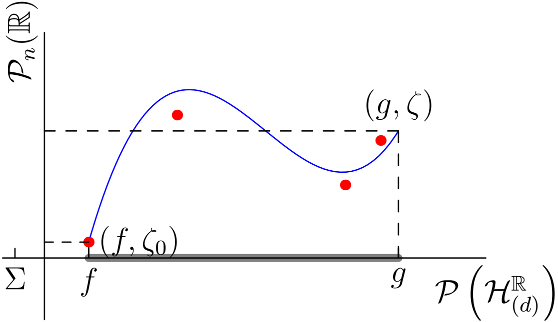


¿En qué consiste el método de homotopía?

Método de homotopía.

- Hacemos una sucesión de Newton de l pasos sobre una partición de $[0,1]$ $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k = 1$.

$$\begin{cases} x_0 = \zeta \\ x_{n+1} = N^l_{F(t_n)}(x_n). \end{cases}$$



¿Cuándo funciona la sucesión de Newton?

Teorema (Teorema del seguimiento de la homotopía, [Shub and Smale, 1993a, Borges and Pardo, 2008a])

Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo elemento de la sucesión de Newton x_n, este es cero aproximado de $F(t_n)$. En particular, x_k es cero (proyectivo) aproximado de $F(1) = g$.

¿Cuándo funciona la sucesión de Newton?

Teorema (Teorema del seguimiento de la homotopía, [Shub and Smale, 1993a, Borges and Pardo, 2008a])

Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo elemento de la sucesión de Newton x_n, este es cero aproximado de $F(t_n)$. En particular, x_k es cero (proyectivo) aproximado de $F(1) = g$.

Problemas.

- Estimar k.

¿Cuándo funciona la sucesión de Newton?

Teorema (Teorema del seguimiento de la homotopía, [Shub and Smale, 1993a, Borges and Pardo, 2008a])

Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo elemento de la sucesión de Newton x_n, este es cero aproximado de $F(t_n)$. En particular, x_k es cero (proyectivo) aproximado de $F(1) = g$.

Problemas.

- Estimar k.
- Describir las componentes conexas de $\mathcal{P}(\mathcal{H}_{(d)}^{\mathbb{R}}) \setminus \Sigma$ y $V \setminus \pi_1^{-1}(\Sigma)$.

¿Cuándo funciona la sucesión de Newton?

Teorema (Teorema del seguimiento de la homotopía, [Shub and Smale, 1993a, Borges and Pardo, 2008a])

Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo elemento de la sucesión de Newton x_n, este es cero aproximado de $F(t_n)$. En particular, x_k es cero (proyectivo) aproximado de $F(1) = g$.

Problemas.

- Estimar k.
- Describir las componentes conexas de $\mathcal{P}(\mathcal{H}_{(d)}^{\mathbb{R}}) \setminus \Sigma$ y $V \setminus \pi_1^{-1}(\Sigma)$.
- Dar soluciones afines.

El número de condicionamiento.

Definición (Condicionamiento de un sistema polinomial.)

Definimos el condicionamiento $\mu(f,\zeta)$ de un sistema polinomial f en una raíz ζ, como el inverso de la distancia de f a la intersección $\Sigma \cap V_\zeta$ donde V_ζ es el conjunto de sistemas que tienen a ζ como alguna de sus raices.

El número de condicionamiento.

Definición (Condicionamiento de un sistema polinomial.)

Definimos el condicionamiento $\mu(f,\zeta)$ de un sistema polinomial f en una raíz ζ, como el inverso de la distancia de f a la intersección $\Sigma \cap V_\zeta$ donde V_ζ es el conjunto de sistemas que tienen a ζ como alguna de sus raices.

Teorema ([Shub and Smale, 1993b, Borges and Pardo, 2008b])

El número de pasos de la homotopía es directamente proporcional al número de condicionamiento.

El número de condicionamiento.

Definición (Condicionamiento de un sistema polinomial.)

Definimos el condicionamiento $\mu(f,\zeta)$ de un sistema polinomial f en una raíz ζ, como el inverso de la distancia de f a la intersección $\Sigma \cap V_\zeta$ donde V_ζ es el conjunto de sistemas que tienen a ζ como alguna de sus raices.

Teorema ([Shub and Smale, 1993b, Borges and Pardo, 2008b])

El número de pasos de la homotopía es directamente proporcional al número de condicionamiento.

Definición

- $\mu^w(f) := \text{máx}_{\zeta \in V_{\mathcal{P}}(f)}\{\mu(f,\zeta)\}$.

El número de condicionamiento.

Definición (Condicionamiento de un sistema polinomial.)

Definimos el condicionamiento $\mu(f,\zeta)$ de un sistema polinomial f en una raíz ζ, como el inverso de la distancia de f a la intersección $\Sigma \cap V_\zeta$ donde V_ζ es el conjunto de sistemas que tienen a ζ como alguna de sus raices.

Teorema ([Shub and Smale, 1993b, Borges and Pardo, 2008b])

El número de pasos de la homotopía es directamente proporcional al número de condicionamiento.

Definición

- $\mu^w(f) := \max_{\zeta\in V_{\mathcal{P}}(f)}\{\mu(f,\zeta)\}$.
- $\mu^{av}_\varepsilon(f) := \frac{1}{\nu_{n-m}[V_{\mathcal{P}}(f)]}\int_{V_{\mathcal{P}}(f)} \chi_\varepsilon$, *donde* χ_ε *es la función característica del conjunto:*

$$A_\varepsilon(f) = \{\zeta \in V_{\mathcal{P}}(f) : \mu(f,\zeta) > \varepsilon^{-1}\}.$$

El número de condicionamiento.

Definición (Condicionamiento de un sistema polinomial.)

Definimos el condicionamiento $\mu(f, \zeta)$ de un sistema polinomial f en una raíz ζ, como el inverso de la distancia de f a la intersección $\Sigma \cap V_\zeta$ donde V_ζ es el conjunto de sistemas que tienen a ζ como alguna de sus raices.

Teorema ([Shub and Smale, 1993b, Borges and Pardo, 2008b])

El número de pasos de la homotopía es directamente proporcional al número de condicionamiento.

Definición

- $\mu^w(f) := \max_{\zeta \in V_{\mathcal{P}}(f)}\{\mu(f, \zeta)\}$.
- $\mu^{av}_\varepsilon(f) := \frac{1}{\nu_{n-m}[V_{\mathcal{P}}(f)]} \int_{V_{\mathcal{P}}(f)} \chi_\varepsilon$, *donde* χ_ε *es la función característica del conjunto:*

$$A_\varepsilon(f) = \{\zeta \in V_{\mathcal{P}}(f) : \mu(f, \zeta) > \varepsilon^{-1}\}.$$

El número de condicionamiento.

Definición (Condicionamiento de un sistema polinomial.)

Definimos el condicionamiento $\mu(f,\zeta)$ de un sistema polinomial f en una raíz ζ, como el inverso de la distancia de f a la intersección $\Sigma \cap V_\zeta$ donde V_ζ es el conjunto de sistemas que tienen a ζ como alguna de sus raices.

Teorema ([Shub and Smale, 1993b, Borges and Pardo, 2008b])

El número de pasos de la homotopía es directamente proporcional al número de condicionamiento.

Definición

- $\mu^w(f) := \max_{\zeta \in V_{\mathcal{P}}(f)}\{\mu(f,\zeta)\}$.
- $\mu^{av}_\varepsilon(f) := \frac{1}{\nu_{n-m}[V_{\mathcal{P}}(f)]}\int_{V_{\mathcal{P}}(f)} \chi_\varepsilon$, *donde χ_ε es la función característica del conjunto:*

$$A_\varepsilon(f) = \{\zeta \in V_{\mathcal{P}}(f) : \mu(f,\zeta) > \varepsilon^{-1}\}.$$

Nos interesa acotar la experanza de las cantidades anteriores.

Técnicas de Geometría Integral.

Técnicas de Geometría Integral.

- Fórmula de la Co-Área de Federer aplicada la variedad de incidencia ([Shub and Smale, 1993a, Federer, 1969]).

Técnicas de Geometría Integral.

Técnicas de Geometría Integral.

- Fórmula de la Co-Área de Federer aplicada la variedad de incidencia ([Shub and Smale, 1993a, Federer, 1969]).
- Invarianza unitaria de $\mu(f,\zeta)$ respecto al grupo $\mathcal{O}(n,\mathbb{R})$.

Técnicas de Geometría Integral.

Técnicas de Geometría Integral.

- Fórmula de la Co-Área de Federer aplicada la variedad de incidencia ([Shub and Smale, 1993a, Federer, 1969]).
- Invarianza unitaria de $\mu(f, \zeta)$ respecto al grupo $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$.
- Acotaciones del condicionamiento de matrices reales rectangulares ([Chen and Dongarra, 2005, Azaïs and Wschebor, 2004]).

Técnicas de Geometría Integral.

Técnicas de Geometría Integral.

- Fórmula de la Co-Área de Federer aplicada la variedad de incidencia ([Shub and Smale, 1993a, Federer, 1969]).
- Invarianza unitaria de $\mu(f, \zeta)$ respecto al grupo $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$.
- Acotaciones del condicionamiento de matrices reales rectangulares ([Chen and Dongarra, 2005, Azaïs and Wschebor, 2004]).

Teorema ([Borges and Pardo, 2008b].)

Sea $\varepsilon \leq \frac{1}{n-m+2}$ *y* $5{,}013 \leq C \leq 6{,}414$*, entonces:*

$$\mathrm{E}_{\Delta}\left[\mu_{\varepsilon}^{av}\right] \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(N\mathcal{D})^{1/2}}{\vartheta_{n-m}} \left(\frac{(n+1)^{3/2} C\varepsilon}{n-m+2}\right)^{n-m+2},$$

donde ϑ_n *denota el volumen de* $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$*. Además, si* $n = m$*, se tiene:*

$$\mathrm{E}_{\Delta}\left[\mu^{w}\right] \leq 2\sqrt{2} \left(\frac{N\mathcal{D}}{\pi}\right)^{1/4} (n+1)^{3/2} C.$$

El número de componentes conexas de $V \setminus \pi_1^{-1}(\Sigma)$.

Sistemas Complejos.

- En el caso $n = m$ tenemos 1 componente conexa.

Sistemas Reales.

El número de componentes conexas de $V \setminus \pi_1^{-1}(\Sigma)$.

Sistemas Complejos.

- En el caso $n = m$ tenemos 1 componente conexa.

Sistemas Reales.

- En el caso $n = m$ tenemos al menos $\mathcal{D}$ componentes conexas.

El número de componentes conexas de $V \setminus \pi_1^{-1}(\Sigma)$.

Sistemas Complejos.

- En el caso $n = m$ tenemos 1 componente conexa.
- En el caso $n > m$ tenemos 1 componente conexa.

Sistemas Reales.

- En el caso $n = m$ tenemos al menos $\mathcal{D}$ componentes conexas.

El número de componentes conexas de $V \setminus \pi_1^{-1}(\Sigma)$.

Sistemas Complejos.

- En el caso $n = m$ tenemos 1 componente conexa.
- En el caso $n > m$ tenemos 1 componente conexa.

Sistemas Reales.

- En el caso $n = m$ tenemos al menos $\mathcal{D}$ componentes conexas.
- En el caso $n > m$ tenemos al menos 2 componentes conexas.

De ceros proyectivos a ceros afines.

Teorema ([Beltrán and Pardo, 2008, Borges and Pardo, 2008b])

Sea $n = m$, la probabilidad de que la norma de todas las raices de un sistema polinomial real f sea mayor que ε^{-1} es menor que:

$$4\mathcal{D}^{1/2}\varepsilon^{1/2}.$$

Sea $n < m$, la probabilidad de que un abierto de la variedad solución esté contenido en la bola $B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon^{-2})$ es menor que[a]:

$$4\varepsilon.$$

[a] Las estimaciones anteriores eran del orden d^{2^n}, donde $d := \max\{d_i\}$.

De ceros proyectivos a ceros afines.

Teorema ([Beltrán and Pardo, 2008, Borges and Pardo, 2008b])

Sea $n = m$, la probabilidad de que la norma de todas las raices de un sistema polinomial real f sea mayor que ε^{-1} es menor que:

$$4\mathcal{D}^{1/2}\varepsilon^{1/2}.$$

Sea $n < m$, la probabilidad de que un abierto de la variedad solución esté contenido en la bola $B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon^{-2})$ es menor que[a]*:*

$$4\varepsilon.$$

[a] Las estimaciones anteriores eran del orden d^{2^n}, donde $d := \max\{d_i\}$.

Teorema ([Beltrán and Pardo, 2008])

Sea N_{av} el valor experado para la norma de las soluciones de un sistema. Entonces si x es un cero (proyectivo) aproximado de f entonces existe k, del orden de $\log_2 \log_2((N_{av})^2 \mu^w)$, tal que $N_f^k(x)$ es, esencialmente, un cero (afín) aproximado de f.

Trabajos futuros.

Futuros proyectos.

- Seguir estudiando las componentes conexas de $V \setminus \pi_1^{-1}(\Sigma)$.

Trabajos futuros.

Futuros proyectos.

- Seguir estudiando las componentes conexas de $V \setminus \pi_1^{-1}(\Sigma)$.
- Adaptar el algoritmo descrito en [Beltrán and Pardo, 2008] al caso real con múltiples componentes conexas.

Trabajos futuros.

Futuros proyectos.

- Seguir estudiando las componentes conexas de $V \setminus \pi_1^{-1}(\Sigma)$.
- Adaptar el algoritmo descrito en [Beltrán and Pardo, 2008] al caso real con múltiples componentes conexas.
- Adaptar el algoritmo anterior para conseguir múltiples raíces.

Trabajos futuros.

Futuros proyectos.

- Seguir estudiando las componentes conexas de $V \setminus \pi_1^{-1}(\Sigma)$.
- Adaptar el algoritmo descrito en [Beltrán and Pardo, 2008] al caso real con múltiples componentes conexas.
- Adaptar el algoritmo anterior para conseguir múltiples raíces.
- Implementación de algoritmo y experimentación.

Trabajos futuros.

Futuros proyectos.

- Seguir estudiando las componentes conexas de $V \setminus \pi_1^{-1}(\Sigma)$.
- Adaptar el algoritmo descrito en [Beltrán and Pardo, 2008] al caso real con múltiples componentes conexas.
- Adaptar el algoritmo anterior para conseguir múltiples raíces.
- Implementación de algoritmo y experimentación.
- Ampliación a otras familias de polinomios.

Azaïs, J. and Wschebor, M. (2004).
Upper and lower bounds for the tails of the distribution of the condition number of a gaussian matrix.
J. Matrix Anal. Appl. SIAM, 26:426–440.

Azaïs, J. and Wschebor, M. (2005).
On the roots of a random system of equations. The theorem on Shub and Smale and some extensions.
Found. Comput. Math., 2:125–144.

Beltrán, C. and Pardo, L. (2008).
On Smale's 17 problem: Average polynomial solver for affine and proyective solutions.
To appear in J. Amer. Math. Soc.

Borges, C. and Pardo, L. (2008a).
Homotopy in the real undertermined case.
Manuscript.

Borges, C. and Pardo, L. (2008b).
On the probability distribution of data at points in real complete intersection varieties.
To appear in Journal of Complexity.

Chen, Z. and Dongarra, J. J. (2005).
Condition numbers of gaussian random matrices.
J. Matrix Anal. Appl. SIAM, 27:603–620.

Cucker, F., Krick, T., Malajovich, G., and Wschebor, M. (2008).
A numerical algorithm for zero counting I: Complexity and accuracy.
To appear in J. Complexity.

Federer, H. (1969).
Geometric measure theory, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153.
Springer-Verlag, New York.

Hubbard, J., Schleicher, D., and Sutherland, S. (2001).
How to find all roots of complex polynomials by Newton's method.
Inventiones Mathematicae, (1):1–33.

Shub, M. and Smale, S. (1993a).
Complexity of Bézout's Theorem I: Geometric aspects.
J. of the Amer. Math. Soc., 6:459–501.

Shub, M. and Smale, S. (1993b).
Complexity of Bézout's Theorem II: Volumes and probabilities.

Progr. Math., 109:267–285.

Smale, S. (2000).
Mathematical problems for the next century.
In *Mathematics: Frontiers and perspectives*, pages 271–294. Amer. Math. Soc., Providence.