Matemáticas para Maestros (Educación Primaria)
Examen final del 20-enero-2014
Proporcionalidad geométrica y magnitudes
Solución al ejercicio 1

Versión 2

Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se calificará ninguna respuesta sin justificar aunque sea correcta.

a) Di si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes

- *I. En todo triángulo rectángulo e isósceles sus ángulos agudos miden 45º*
- *II. Todo triángulo isósceles es acutángulo*
- *III. Dos rectángulos son siempre semejantes*

b) Enuncia los criterios de congruencia o igualdad de triángulos

Parte a)

I. Verdadera.

Sabemos que los tres ángulos suman 180º y que uno, que llamaremos $\hat{A}$, mide 90º. Entonces, como la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es de 180º, los otros dos tienen que sumar 90º, $\hat{B} + \hat{C} = 90$.

Por otra parte, hay dos ángulos iguales porque el triángulo es isósceles. Es imposible que uno de esos dos ángulos sea $\hat{A}$, porque entonces uno de los otros dos mediría 90º y el tercero habría de ser nulo, con lo que no tendríamos un triángulo. La única posibilidad es que $\hat{B} = \hat{C}$ y, por tanto, que $\hat{B} = \hat{C} = 45$º.

II. Falsa.

Basta tomar un triángulo rectángulo e isósceles, como los del apartado I, para comprobar que no todos los triángulos isósceles son acutángulos.

III. Falsa.

Aunque todos los ángulos midan 90º, los lados pueden no ser proporcionales. Hay muchos ejemplos de parejas de rectángulos que no son semejantes.

Una de tales parejas es: un rectángulo de lados 1 y 2; y otro rectángulo de lados 1 y 3. En efecto, la proporción entre sus lados pequeños es $1/1 = 1$, pero la proporción entre sus lados grandes es $3/2 = 1{,}5$.

Errores observados en algunas de las respuestas:

1. No bastaba con contestar "verdadero" o "falso". Ni con repetir la propiedad del enunciado, afirmándola o negándola. Había que dar una justificación matemática para cada caso.

2. La mejor manera de probar que la afirmación II es falsa es poner un ejemplo que la contradiga. Y lo mismo con la III. En ambos casos hay una gran variedad de ejemplos que sirven para demostrar la falsedad de la afirmación.

3. Para justificar que la afirmación I es verdadera no basta con dibujar un triángulo rectángulo e isósceles, hay que argumentar por qué en este caso los ángulos agudos han de medir exactamente 45º.

4. La parte III no se refería a triángulos, sino a rectángulos. No pueden aplicarse los criterios de semejanza de triángulos, como se ha visto en algunos exámenes.

5. Un triángulo "rectángulo e isósceles" (parte I) es las dos cosas a la vez, no una sola. Distinto sería si el enunciado dijera "rectángulo o isósceles".

   Por consiguiente, quienes han argumentado suponiendo primero que el triángulo es sólo rectángulo y después suponiendo que el triángulo es sólo isósceles, no han resuelto bien la pregunta.

Parte b)

Los tres criterios están detallados en los apuntes.

Errores observados en algunas de las respuestas:

1. Hay que tener cuidado en distinguir los criterios de semejanza de los criterios de congruencia o igualdad. Ha habido bastantes confusiones entre estos dos tipos de criterios.

2. En el criterio LAL no puede obviarse la condición de que el ángulo sea el comprendido entre

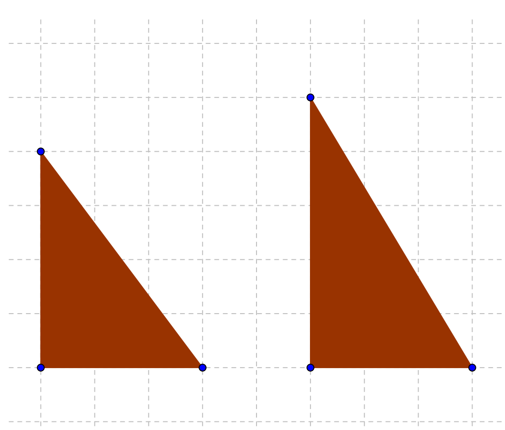

Figura 1: Dos triángulos que no son iguales pero tienen un ángulo igual y dos lados iguales

los dos lados.

Si no se pone esta condición, entonces el enunciado del criterio es incorrecto. Así, por ejemplo, la frase "dos triángulos son congruentes cuando tienen dos lados iguales y un ángulo igual" es incorrecta. Para comprobarlo tomemos dos triángulos rectángulos (con lo cual nos aseguramos de que tienen un ángulo igual), el primero con lados que midan 3, 4 y 5, y el segundo con lados que midan 3, 5 y $\sqrt{34}$, ver la figura 1. Tienen un ángulo igual y dos lados iguales, pero los triángulos no son iguales.

3. Análogamente con el criterio ALA y la condición de que los ángulos sean los que se apoyan en el lado. La frase "dos triángulos son congruentes cuando tienen dos ángulos iguales y un lado igual" es falsa. Para comprobarlo basta tomar, por ejemplo, dos triángulos rectángulos

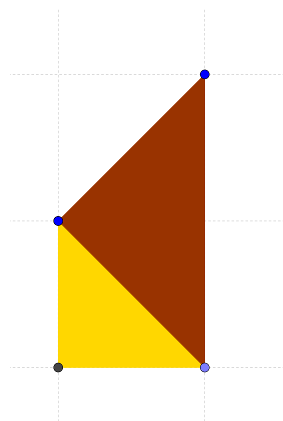

Figura 2: Dos triángulos que no son iguales pero tienen un lado igual y los tres ángulos iguales

e isósceles, con los catetos midiendo 1 en el primer triángulo y $\sqrt{2}$ en el segundo (ver la figura 2). Los tres ángulos son, en ambos casos, de 90º, 45º y 45º; y tienen un lado igual, puesto que la hipotenusa del primero mide lo mismo que uno cualquiera de los catetos del segundo. Sin embargo, los triángulos no son iguales.

4. La definición de congruencia no es un criterio de congruencia. En este contexto se llama "criterio" a una propiedad que aparentemente no exige todas las condiciones de la definición, sino solamente una parte, pero puede demostrarse que las condiciones que faltan se deducen de las que se exigen.

Versión 1

Parte a) de la versión 1	=	parte b) de la versión 2
Parte b)I de la versión 1	=	parte a)II de la versión 2
Parte b)II de la versión 1	=	parte a)III de la versión 2
Parte b)III de la versión 1	=	parte a)I de la versión 2