# Examen final de Cálculo Integral
## 16 de junio de 2014 (Soluciones)

**_Cuestiones_**

**$\mathbf{C_1}$** Una solución se encuentra detallada en la definición 1.8.

Observaciones tras la corrección:

- El enunciado nos pedía que trabajásemos con *cualquier* camino. Resolver la cuestión para un camino concreto solamente es resolver un ejemplo, no prueba nada para la totalidad de los caminos.
- Cualquier reparametrización que se proponga como solución ha de tener la misma imagen que la parametrización inicial, de lo contrario no es una reparametrización (ver definición 1.19).
- Cambiar el intervalo $[a, b]$ por $[b, a]$ no resuelve la cuestión, puesto que como $b > a$, el "intervalo" $[b, a]$ sería el conjunto vacío.

**$\mathbf{C_2}$** La respuesta es afirmativa, tal como se expone en la observación 16. Unos sumandos que sirvan para tal descomposición se pueden obtener de la siguiente manera (notaciones como en la definición 1.5): Si llamamos $\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{k}}$ a la restricción de $\boldsymbol{c}$ al intervalo $[t^{k-1}, t^k]$ (para $k = 1, \ldots, N$), entonces cada uno de los $\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{k}}$ es derivable y con derivada continua en todos sus puntos, y además $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}^{\mathbf{1}} + \cdots + \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{N}}$, coo puede comprobarse inmediatamente.

Observaciones tras la corrección:

- El enunciado nos pedía que trabajásemos con un camino genérico. Resolver la cuestión para un camino concreto solamente es resolver un ejemplo, no prueba nada para la totalidad de los caminos.
- No se pedía sumar caminos, la pregunta no tiene nada que ver con condiciones necesarias para sumar dos caminos.
- La respuesta estaba en la propia definición de camino de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos.

**$\mathbf{C_3}$** La otra condición que se exige a la parametrización $\boldsymbol{\Phi}$ es la que aparece en el apartado 2 de la definición 3.27.

Observación tras la corrección: El error más común, entre quienes han contestado bastante bien, ha sido olvidarse de los "vértices".

**C$_4$** El valor de la integral de un campo vectorial cambia de signo (ver el corolario 3.34). Por el contrario, el valor de la integral de un campo escalar no cambia nada (esto último es consecuencia del teorema 3.16).

**C$_5$** Llamaremos $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}$ al campo vectorial que nos dan.

Utilizamos un círculo máximo $C$ para dividir la superficie esférica $\Sigma$ en dos semiesferas, $\Sigma_1$ y $\Sigma_2$. Las dos semiesferas comparten borde, que resulta ser el círculo $C$, es decir, $\partial\Sigma_1 = \partial\Sigma_2 = C$.

Tomamos sobre la esfera completa una orientación (cualquiera), que llamaremos positiva. Esta normal unitaria que hayamos elegido sirve también para orientar a las dos semiesferas. Cada una de las dos semiesferas orientadas, $\Sigma_i^+$ $(i = 1, 2)$, induce una orientación sobre su borde, con la particularidad de que estas orientaciones del borde $C$ son opuestas, es decir, $\partial\Sigma_1^+ = \partial\Sigma_2^-$.

Entonces, aplicando el teorema de Stokes,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma_1^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{\Sigma_2^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} =$$
$$= \int_{\partial\Sigma_1^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\partial\Sigma_2^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\partial\Sigma_1^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} - \int_{\partial\Sigma_1^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0.$$

Otra forma diferente de obtener el mismo resultado es el razonamiento del punto 3.a) del apartado 3.4.2.

Observaciones tras la corrección:

- Una tercera forma de demostrar lo mismo es a través del teorema de la divergencia, pero esto no es lo que se pedía.
- El rotacional de un rotacional no siempre es nulo.

## *Problemas*

**P$_1$** **(a)** La curva $C$ es la suma de las tres curvas $C_1$, $C_2$ y $C_3$ que se consideran a continuación. Para cada una de ellas se da una parametrización que corresponde a la orientación establecida para $C^+$.

- $C_1$ es el segmento que va del punto $(0, 0)$ al punto $(1, 0)$. Una parametrización de $C_1$ es $\boldsymbol{c_1}(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$.
- $C_2$ es el segmento que va del punto $(1, 0)$ al punto $(0, 1)$. Una parametrización de $C_2$ es $\boldsymbol{c_2}(t) = (1 - t, t)$, $t \in [0, 1]$.

- $C_3$ es el segmento que va del punto $(0, 1)$ al punto $(0, 0)$. Una parametrización de $C_3$ es $\boldsymbol{c_3}(t) = (0, 1-t)$, $t \in [0, 1]$.

Entonces, aplicando el teorema 1.14 y la definición 1.28,

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{c_1}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\boldsymbol{c_2}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\boldsymbol{c_3}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

Aplicando ahora la definición 1.13,

$$\begin{aligned}\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} &= \int_0^1 \left[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{c_1}(t)) \cdot \boldsymbol{c_1'}(t) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c_2}(t)) \cdot \boldsymbol{c_2'}(t) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c_3}(t)) \cdot \boldsymbol{c_3'}(t)\right] dt = \\ &= \int_0^1 \left[(0, t^2) \cdot (1, 0) + ((1-t)t, (1-t)^2) \cdot (-1, 1) + (0, 0) \cdot (0, -1)\right] dt = \\ &= \int_0^1 (2t^2 - 3t + 1)\, dt = \left[2\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}}.\end{aligned}$$

**(b)** Siguiendo el criterio de orientación positiva del teorema de Riemann-Green (teorema 2.35), tenemos que $C^+ = \partial D^+$, donde $D$ es la región de $\mathbb{R}^2$ encerrada por el triángulo del enunciado. Por tanto, de acuerdo con la definición del campo $\boldsymbol{F}$,

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\partial D^+} P\, dx + Q\, dy, \quad P(x, y) = xy, \quad Q(x, y) = x^2.$$

$D$ es una región simple tanto en las $x$ (ya que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1 - y\}$) como en las $y$ (ya que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}$).
Entonces, aplicando el teorema de Riemann-Green,

$$\begin{aligned}\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_D x\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x\, dy\right) dx = \\ &= \int_0^1 x(1-x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

(en la tercera igualdad se ha usado el teorema 2.20 y la expresión de $D$ como región simple en las $y$).
Como es de esperar, obtenemos el mismo resultado que en (a).

## $P_2$ Primera forma de resolución.

El volumen pedido $V$ es:

$$V = \iiint_W dx\, dy\, dz. \tag{1}$$

Vamos a calcular $V$ usando el teorema 4.3. El cono y la semiesfera se cortan cuando $3 + \sqrt{x^2 + y^2} = 2 + \sqrt{5 - x^2 - y^2}$. Llamando, como es usual, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, la ecuación anterior se escribe $3 + r = 2 + \sqrt{5 - r^2}$, es decir, $\sqrt{5 - r^2} = 1 + r$. Elevando los dos miembros de la última igualdad al cuadrado llegamos a la ecuación $2r^2 + 2r - 4 = 0$. Sus soluciones son 1 y $-2$, de las cuales la única válida es $r = 1$, ya que $r \geq 0$.

Por tanto, $W$ es una región tridimensional simple en la dirección de las $z$, ya que puede expresarse de la siguiente forma:

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\, 3 + \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 + \sqrt{5 - x^2 - y^2}\right\}, \tag{2}$$

donde $D$ es la regón bidimensional simple definida por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}. \tag{3}$$

Entonces, aplicando el teorema 4.3,

$$V = \iint_D \left(\int_{3+\sqrt{x^2+y^2}}^{2+\sqrt{5-x^2-y^2}} dz\right) dx\,dy = \iint_D \left(\sqrt{5 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} - 1)\right) dx\,dy. \tag{4}$$

A continuación calculamos la última integral doble usando coordenadas polares ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, con jacobiano $= r$). Aplicando el Teorema del Cambio de Variable (teorema 2.32) y el Teorema de Fubini (teorema 21.2), se obtiene que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r\sqrt{5 - r^2} - r^2 - r\right) dr\right) d\theta = \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(5 - r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3} - \frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{\left(\frac{10}{3}\sqrt{5} - 7\right)\pi}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

## Segunda forma de resolución.

Vamos a calcular ahora el volumen $V$ usando coordenadas cilíndricas. Recordar (Sección 4.5) que dichas coordenadas vienen dadas por

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

y que el jacobiano de este cambio de variable es $r$.

De acuerdo con (2) y (3), podemos expresar $W$ en coordenadas cilíndricas como una región tridimensional simple en la dirección de las $z$, de la siguiente forma:

$$W = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 3 + r \leq z \leq 2 + \sqrt{5 - r^2}\right\}.$$

Aplicando la versión del Teorema del Cambio de Variable (teorema 2.32) para integrales triples y el teorema 4.3 (para las coordenadas $r, \theta, z$), obtenemos que

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{3+r}^{2+\sqrt{5-r^2}} dz\right) r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r\sqrt{5 - r^2} - r^2 - r\right) dr\right) d\theta,$$

con lo que llegamos a la misma integral que en (5).

**Tercera forma de resolución.**

Se trata de calcular la integral triple de (1) cambiando el orden de integración respecto al utilizado en (4). Ahora vamos a integrar primero respecto de $x$ e $y$ y posteriormente respecto de $z$. En primer lugar, observar que para un $z$ fijo:

1. En el cono tenemos la circunferencia de centro $(0, 0, z)$ y radio $z - 3$.
2. En la semiesfera tenemos la circunferencia de centro $(0, 0, z)$ y radio $\sqrt{5 - (z - 2)^2}$.

También, recordar que el cono y la semiesfera se cortan cuando $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ (ver la primera forma de resolución), equivalentemente, cuando $z = 4$.

Entonces,

$$V = \int_3^4 \left[ \int \int_{D_1} dx\, dy \right] dz + \int_4^{2+\sqrt{5}} \left[ \iint_{D_2} dx\, dy \right] dz. \tag{6}$$

• La primera integral corresponde al volumen encerrado por el cono desde $z = 3$ hasta el valor de $z$ en el que éste intersecta con la semiesfera ($z = 4$). Sabemos que, para cada $z$, $D_1$ es el círculo de centro $(0, 0, z)$ y radio $z - 3$. Esto implica que

$$\iint_{D_1} dx\, dy = \text{Area de } D_1 = \pi(z - 3)^2.$$

• La segunda integral corresponde al volumen encerrado por la semiesfera desde donde ésta intersecta con el cono ($z = 4$) hasta el valor máximo que puede tomar $z$ en ella ($z = 2 + \sqrt{5}$, ya que es una semiesfera de centro $(0, 0, 2)$ y radio $\sqrt{5}$). Sabemos que, para cada $z$, $D_2$ es el círculo de centro $(0, 0, z)$ y radio $\sqrt{5 - (z - 2)^2}$. Esto implica que

$$\iint_{D_2} dx\, dy = \text{Area de } D_2 = \pi(5 - (z - 2)^2).$$

Entonces, aplicando (6),

$$\begin{aligned} V &= \int_3^4 \pi(z - 3)^2\, dz + \int_4^{2+\sqrt{5}} \pi(5 - (z - 2)^2)\, dz = \\ &= \pi \left[ \frac{(z - 3)^3}{3} \right]_3^4 + \pi \left[ 5z - \frac{(z - 2)^3}{3} \right]_4^{2+\sqrt{5}} = \boxed{\left( \frac{10}{3}\sqrt{5} - 7 \right) \pi}\, . \end{aligned}$$

Y obtenemos el mismo resultado que en la primera forma de resolución.

**$\mathbf{P_3}$ Primera forma de resolución.**

El paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 3$ se cortan cuando $x^2 + y^2 = 1$. Por tanto, $\Sigma$ es un superficie dada en forma explícita, para la que una parametrización compatible con su orientación es:

$$\boldsymbol{\Phi_{explic}}(x, y) = (x, y, g(x, y)),\ g(x, y) = 4-x^2-y^2,\ (x, y) \in D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Aplicando el teorema de Stokes para este tipo de superficies (teorema 3.38),

$$\int_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{7}$$

Calculemos la integral de superficie que aparece en la fórmula anterior. Es trivial ver que

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}(x, y, z) = (0, 0, -6(x^2 + y^2) - 1) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Por el ejemplo 3.6, el vector normal a $\Sigma$ apuntando hacia arriba es

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi_{explic}}}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right) = (2x, 2y, 1).$$

Entonces, aplicando la definición 3.32,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{D_1} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})(\boldsymbol{\Phi_{explic}}(x, y)) \cdot \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi_{explic}}}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{D_1} (0, 0, -6(x^2 + y^2) - 1) \cdot (2x, 2y, 1)\, dx\, dy = -\iint_{D_1} \big(6(x^2 + y^2) + 1\big)\ dx\, dy.$$

Utilizando coordenadas polares para calcular la última integral doble,

$$\iint_{D_1} \big(6(x^2 + y^2) + 1\big)\ dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (6r^2 + 1)r\, dr\right)\ d\theta = 2\pi \left[6\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_0^1 = 4\pi. \tag{8}$$

Por tanto, $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = -4\pi$.

Aplicando (7) finalmente obtenemos que $\int_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \boxed{-4\pi}$ .

**Segunda forma de resolución.**

La superficie $\Sigma$ también puede parametrizarse mediante coordenadas cilíndricas en la siguiente forma

$$\boldsymbol{\Phi_{cilind}}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 4 - r^2),\ (r, \theta) \in D_2 = [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Un vector normal asociado a dicha parametrización es $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi_{cilind}}}(r,\theta) = (2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, r)$. Como $r > 0$, la tercera componente de este vector es positiva, con lo que nuevamente tenemos la orientación de las normales hacia arriba. Entonces, aplicando la definición 3.32,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{D_2} (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})(\boldsymbol{\Phi_{cilind}}(r,\theta))\cdot\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi_{cilind}}}(r,\theta)\,dr\,d\theta =$$

$$= -\iint_{D_2}(6r^3+r)\,dr\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (6r^3+r)\,dr\right)d\theta,$$

con lo que llegamos a la misma integral que la segunda de (8).

Finalmente basta aplicar (7) a esta parametrización de $\Sigma^+$ (ver 3.4.2), obteniendo el mismo valor que en la primera forma de resolución.

### Tercera forma de resolución.

La superficie $\Sigma$ también puede parametrizarse en la siguiente forma

$$\boldsymbol{\Phi}(z,\theta) = (\sqrt{4-z}\,\cos\theta, \sqrt{4-z}\,\sin\theta, z),\ \ (z,\theta)\in D_3 = [3,4]\times[0,2\pi].$$

Un vector normal asociado a dicha parametrización y orientado hacia arriba es

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}(r,\theta) = (\sqrt{4-z}\,\cos\theta, \sqrt{4-z}\,\sin\theta, 1/2).$$

Entonces, aplicando nuevamente la definición 3.32,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{D_3}(0,0,-6(4-z)-1)\cdot(\sqrt{4-z}\,\cos\theta, \sqrt{4-z}\,\sin\theta, 1/2)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_3^4\left(3z-\frac{25}{2}\right)dz\right)d\theta = 2\pi\left[3\frac{z^2}{2}-\frac{25}{2}z\right]_3^4 = \boxed{-4\pi},$$

obteniendo el mismo resultado

### Cuarta forma de resolución.

También puede hacerse el cálculo directo de la integral pedida, $\int_{\partial\Sigma^+}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$. El proceso es técnicamente más engorroso que aplicando el Teorema de Stokes. Vamos a indicar los pasos claves de dicho proceso.

Una parametrización de $\partial\Sigma^+$ es

$$\boldsymbol{c}(t) = (\cos t, \sin t, 3) \quad (t\in[0,2\pi]).$$

Aplicando las definiciones 1.13 y 1.28,

$$\int_{\partial\Sigma^+}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^{2\pi}(2\sin^3 t - \cos^5 t + 3^6 + \sin t, \sin^4 t - 2\cos^3 t + 3^5, 3^5\,6\cos t + 3^4\,5\sin t)\,\cdot$$

$$\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}(-2\sin^4 t + \cos^5 t\sin t - 3^6\sin t - \sin^2 t + \sin^4 t\cos t - 2\cos^4 t + 3^5\cos t)\,dt.$$

Las integrales que aparecen en la fórmula anterior, o bien son inmediatas, o bien se resuelven usando las tablas. El alumno interesado puede realizar el cálculo de dichas integrales y comprobar que nuevamente se obtiene que $\int_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \boxed{-4\pi}$ .