Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

6 de septiembre de 2013 (Teoría)

- El 40 % de la nota del examen final se obtiene por las cuestiones y el 60 % restante se obtiene por los problemas.
- Todas las cuestiones puntúan por igual para la nota del examen final.
- Las cuestiones $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- Las cuestiones $\mathbf{C}_3$ y $\mathbf{C}_4$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

$\mathbf{C_1}$ Sea C un arco simple y $\boldsymbol{T}$ el vector tangente unitario en cada punto de C. ¿A qué equivale la integral $\int_C \boldsymbol{T} \cdot d\boldsymbol{s}$?

$\mathbf{C_2}$ Dado cualquier camino de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos, $\boldsymbol{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, explicar cómo se puede construir una reparametrización de $\boldsymbol{c}$ de manera que invierta la orientación.

$\mathbf{C_3}$ Si $\Phi_i : D_i \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$, son dos parametrizaciones de la misma superficie, con la condición adicional de que ambas son inyectivas y regulares en todo su dominio, ¿qué relación hay entre los vectores normales de ambas parametrizaciones?

$\mathbf{C_4}$ De acuerdo con la definición que se ha manejado en el curso, para que una superficie Σ sea orientable es necesario, en primer lugar, que tenga una parametrización $\boldsymbol{\Phi} : D_1 \cup \cdots \cup D_m \longrightarrow \Sigma$ de modo que el vector normal unitario $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}/\|\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}\|$ sea una función continua sobre el subconjunto de Σ formado por la imagen $\boldsymbol{\Phi}(\operatorname{Int} D_1 \cup \cdots \cup \operatorname{Int} D_m)$. ¿Qué otra condición se exige a $\boldsymbol{\Phi}$?

$\mathbf{C_5}$ ¿Cómo hay que interpretar $\partial\Sigma^+$ cuando aparece en la fórmula de Stokes, $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}\, d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$, donde Σ^+ es una superficie cilíndrica (sin las tapas) con la orientación de las normales que apuntan hacia dentro del cilindro?

Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

6 de septiembre de 2013 (Problemas)

- El 60 % de la nota del examen final se obtiene por los problemas y el 40 % restante se obtiene por las cuestiones.
- Todos los problemas puntúan por igual para la nota del examen final.
- El problema $\mathbf{P}_1$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- El problema $\mathbf{P}_3$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

$\mathbf{P_1}$ Sea D la región de $\mathbb{R}^2$ encerrada por las rectas

$$y - 2x = 0, \quad y - 2x = 1, \quad x + y = \pi, \quad x + y = 2\pi.$$

Haciendo un cambio de variable adecuado, calcular $\iint_D (y-2x)^3 \sin(x+y)\, dA$.

$\mathbf{P_2}$ Sea Σ la parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ que está definida por $0 \le z \le x$. Consideremos el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + (z^2 + xy)\boldsymbol{k}$. Elegir una orientación positiva para Σ y calcular $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$.

$\mathbf{P_3}$ Sea W la bola unidad de $\mathbb{R}^3$ definida por $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. Calcular

$$\iiint_W \frac{z^2}{2 + \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}\, dV.$$

$\mathbf{P_4}$ Sea W la región de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$x^2 + y^2 \le z \le 4, \quad x \ge 0$$

y sea ∂W^+ la frontera de W con la orientación de las normales exteriores. Consideremos el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y,z) = z^4 y\boldsymbol{i} + yx\boldsymbol{j} - x^3\boldsymbol{k}$. Calcular $\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$.

Entregar cada problema en una hoja distinta.