Cálculo Integral

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

Recuperación del examen final, 6 de septiembre de 2016

Soluciones

Cuestiones

C_1) a) Cierto. Ver la observación 16 de los apuntes.

b) Cierto. Es consecuencia del teorema 1.11 de los apuntes.

c) Falso. Para probarlo basta poner un contraejemplo.

Tomamos una función $c : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua (y por tanto es un camino) pero no derivable en ningún punto. Por el apartado anterior, si c fuese una suma de caminos de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, la propia c sería de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, por lo que sería derivable en todos los puntos salvo, a lo más, en un número finito.

C_2) (a) Del teorema 2.10 se deduce que f es integrable, puesto que la circunferencia inscrita en R es unión de dos gráficas de funciones continuas: la función que describe a la semicircunferencia superior y la que describe a la semicircunferencia inferior.

(b) Como en el caso anterior, f es integrable porque los puntos donde f no es continua están contenidos en la unión de las gráficas de cuatro funciones continuas de una variable (las que describen los lados): si $R = [a,b] \times [c,d]$, basta considerar las cuatro funciones

$$\begin{aligned} [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow c \\ [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow d \\ [c,d] &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \rightsquigarrow a \\ [c,d] &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \rightsquigarrow b. \end{aligned}$$

(c) No puede deducirse nada porque el teorema 2.10 no es aplicable. No debe confundirse la *gráfica* de una función continua con la *imagen* de una función continua (observación 24 de los apuntes). De hecho, puede ocurrir cualquier cosa (ver la observación 120).

C_3) A) Puede asegurarse que Σ es orientable, ver el ejemplo 3.27 de los apuntes.

B) También, puesto que es un caso particular del anterior. (Además, se trata de una superficie parametrizada en forma explícita, cuyas orientaciones se han estudiado en el apartado 3.3.2.)

C_4) La propia definición 3.31 contiene la fórmula que se nos pide. No tiene sentido recurrir aquí al teorema de la divergencia de Gauss, que ni es aplicable a cualquier superficie orientada ni daría lugar a una integral de un campo escalar sobre Σ.

C₅) Siguiendo la observación 102 de los apuntes, consideramos la fórmula de Green-Riemann en su forma vectorial (corolario 2.40).

Entonces la fórmula de Green-Riemann resulta ser la misma que la fórmula de Stokes aplicada a la superficie formada por el recinto plano considerado como subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (páginas 112 y 113 de los apuntes).

No basta con observar la similitud de ambas fórmulas. Lo que se pide aquí es comprobar que una de las fórmulas puede deducirse de la otra.

Problemas

P₁) Primera forma de resolución.

Vamos a tomar como orientación de ∂D la establecida en la fórmula de Riemann-Green para el caso de regiones más generales que rectángulos (Corolario 2.37). De acuerdo con dicha fórmula, tomando $P(x,y) = x^2y^2$, $Q(x,y) = x^3y$, tenemos que

$$\int_{\partial D^+} x^2y^2\,dx + x^3y\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D x^2y\,dx\,dy.$$

Resolvamos la integral doble que aparece. Para ello, observar que D es una región simple en la dirección de las y, ya que puede expresare de la siguiente forma:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4 - x^2\}.$$

Por tanto, aplicando el teorema 2.20,

$$\iint_D x^2y\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} \left(\int_0^{4-x^2} x^2y\,dy\right) dx = \int_{-2}^{2} x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{4-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2(4-x^2)^2\,dx.$$

Y por simetría, $\int_{-2}^{2} x^2(4-x^2)^2\,dx = 2\int_0^2 x^2(4-x^2)^2\,dx$, con lo que

$$\begin{aligned}\iint_D x^2y\,dx\,dy &= \int_0^2 x^2(4-x^2)^2\,dx = \int_0^2 (16x^2 + x^6 - 8x^4)\,dx = \\ &= \left[16\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} - 8\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{1024}{105}.\end{aligned}$$

Segunda forma de resolución.

Consideramos la misma orientación en ∂D que en la primera forma de resolución. Ahora vamos a calcular $\int_{\partial D^+} x^2y^2\,dx + x^3y\,dy$ directamente, es decir, aplicando la definición de integral de un campo a lo largo de una curva orientada.

De acuerdo con la notación establecida en el recuadro 20 de la página 36,

$$\int_{\partial D^+} x^2y^2\,dx + x^3y\,dy = \int_{\partial D^+} \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{s},$$

siendo $\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2y^2, x^3y)$.

Calculemos la integral sobre ∂D^+ del campo $\boldsymbol{F}$. Observar que $\partial D = C_1 + C_2$, donde:

- C_1 es el segmento que va desde el punto $(-2,0)$ al punto $(2,0)$ (en este orden, lo que define una orientación para C_1 compatible con la de ∂D^+).
- C_2 es la parte de la parábola $y = 4 - x^2$ que va desde el punto $(2,0)$ al punto $(-2,0)$ (en este orden, lo que define una orientación para C_2 compatible con la de ∂D^+).

Entonces,

Una parametrización de C_1^+ es

$$\boldsymbol{c_1}(t) = (t,0), \quad t \in [-2,2].$$

Una parametrización de C_2^+ es

$$\boldsymbol{c_2}(t) = (-t, 4-t^2), \quad t \in [-2,2].$$

Aplicando ahora la definición 1.13 y el teorema 1.14, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D^+} \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{s} &= \int_{\boldsymbol{c_1}} \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{s} + \int_{\boldsymbol{c_2}} \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{s} = \\ &= \int_{-2}^{2} (0,0)\cdot(1,0)\,dt + \int_{-2}^{2} (t^2(4-t^2)^2, -t^3(4-t^2))\cdot(-1,-2t)\,dt.\end{aligned}$$

La primera integral es nula. Se deja como ejercicio para el alumno hacer el cálculo (muy sencillo) de la segunda integral y comprobar que su valor es $\frac{1024}{105}$, con lo que de nuevo obtenemos que $\int_{\partial D^+} x^2y^2\,dx + x^3y\,dy = \frac{1024}{105}$.

P$_2$) Primera forma de resolución.

La superficie Σ puede expresarse en forma explícita como

$$z = g(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad (x,y) \in D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}.$$

En este caso, orientación de las normales hacia afuera de la esfera es equivalente a orientación de las normales hacia abajo. Entonces, de acuerdo con lo visto en el ejemplo 3.6, el vector normal em un punto cualquiera $(x, y, z) \in \Sigma$ viene dado por

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, -1\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, -1\right).$$

Por tanto, aplicando la definición 3.22, obtenemos:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_D \left(1, 1, -\sqrt{1-x^2-y^2} - xy\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, -1\right) dx\, dy \\ &= \iint_D \left(\frac{x+y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{1-x^2-y^2} + xy\right) dx\, dy.\end{aligned}$$

Por simetría las integrales dobles del primero y tercer sumando son nulas, con lo

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$

Calculamos ahora la última integral doble utilizando coordenadas polares y el teorema del cambio de variable 2.33, con lo que se llega a que

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\; r\, dr = 2\pi \left[-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi.$$

Segunda forma de resolución.

La superficie Σ también puede parametrizarse usando coordenadas esféricas de la siguiente forma:

$$x = \sin\varphi \cos\theta, \quad y = \sin\varphi \sin\theta, \quad z = \cos\varphi, \quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

(sólo se considera $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$ en vez de $0 \le \varphi \le \pi$, ya que $z \le 0$). Con el mismo razonamiento que en el ejemplo 3.2 (donde el radio de la esfera es 2, en vez de 1) se obtiene que el vector normal apuntado hacia afuera en un punto $(x, y, z) \in \Sigma$ viene dado por:

$$(x, y, z)\sin\varphi = (\sin^2\varphi \cos\theta, \sin^2\varphi \sin\theta, \sin\varphi\cos\varphi).$$

Aplicando de nuevo la definición 3.22, obtenemos:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[(1, 1, \cos\varphi - \sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta) \cdot (\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\varphi)\right] d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\sin^2\varphi\cos\theta + \sin^2\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi\cos\varphi\cos\theta\sin\theta\right) d\varphi\, d\theta.\end{aligned}$$

Por simetría las integrales dobles del primero, segundo y cuarto sumando son nulas (ejercicio para el alumno). Por tanto,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi \, d\theta = 2\pi \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi.$$

Tercera forma de resolución.

Vamos a calcular $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$ aplicando el teorema de la divergencia 4.12. Para ello, consideremos

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \, z \leq 0\}.$$

Aplicando dicho teorema, se tiene que

$$\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_W \operatorname{div}\boldsymbol{F} \, dx \, dy \, dz,$$

con la orientación de la normales hacia afuera en ∂W^+. Ahora bien, $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 1$, con lo que

$$\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_W dx \, dy \, dz = \text{volumen}(W).$$

Por otra parte, $\partial W = \Sigma + \Sigma_0$, donde:

- Σ es la superficie del enunciado y con la orientación de las normales como en él.
- Σ_0 es la "tapa de arriba" de W, es decir, la superficie definida en forma explícita por

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

  con la orientación de las normales hacia afuera de W, es decir, hacia arriba. Por el ejemplo 3.6, el vector normal en todo punto de Σ_0 es $(0, 0, 1)$.

Aplicando de nuevo la definición 3.22 y pasando a coordenadas polares se tiene:

$$\iint_{\Sigma_0^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1, 1, -r^2 \cos\theta \sin\theta) \cdot (0, 0, 1) \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^1 r \, dr = 0,$$

ya que, por simetría, la integral respecto de θ vale 0.

Por tanto,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \text{volumen}(W).$$

Se ha calculado en clase, usando integrales triples, el volumen de una esfera de radio 1, cuyo valor es $\frac{4}{3}\pi$. Como en este caso W es la mitad de dicha esfera, se tiene que $\text{volumen}(W) = \frac{2}{3}\pi$. Concluimos por tanto que

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{2}{3}\pi.$$

P$_3$) Usando coordenadas cilíndiricas, las desigualdades que definen W se escriben de la siguiente forma:

- $2z^2 - x^2 \leq y^2 \Longleftrightarrow 2z^2 \leq r^2$.
- $z^2 - x^2 \geq y^2 - 1 \Longleftrightarrow r^2 \leq z^2 + 1$.
- $y \geq 0 \Longleftrightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$.

Además,

$$2z^2 \leq r^2 \text{ y } r^2 \leq z^2 + 1 \Longleftrightarrow 2z^2 \leq r^2 \leq z^2 + 1 \Longleftrightarrow \sqrt{2}\,|z| \leq r \leq \sqrt{z^2+1}.$$

También, $2z^2 \leq r^2 \leq z^2+1$ implica $2z^2 \leq z^2+1$. Y resolviendo esta última desigualdad obtenemos $-1 \leq z \leq 1$.

Por tanto, W puede describirse en coordenadas cilíndiricas como

$$W = \{(r, \theta, z) : \sqrt{2}\,|z| \leq r \leq \sqrt{z^2+1},\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ -1 \leq z \leq 1\}.$$

De acuerdo con esta descripción, W es una región simple en las dirección de las r. Aplicando ahora la versión tridimensional del teorema del cambio de variable 2.33 y el teorema 4.3 usando como coordenadas las cilíndricas, llegamos a que

$$\iiint_W (y^2+1)\,dV = \int_0^\pi \int_{-1}^1 \left(\int_{\sqrt{2}|z|}^{\sqrt{z^2+1}} (r^2 \sin^2\theta + 1)\, r\, dr \right) dz\, d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \int_{-1}^1 \left(\int_{\sqrt{2}|z|}^{\sqrt{z^2+1}} (r^3 \sin^2\theta + r)\, dr \right) dz\, d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \int_{-1}^1 \left[\sin^2\theta\, \frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right]_{\sqrt{2}|z|}^{\sqrt{z^2+1}} dz\, d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \int_{-1}^1 \left[\sin^2\theta \left(\frac{(z^2+1)^2 - 4z^4}{4} \right) + \left(\frac{z^2+1-2z^2}{2} \right) \right] dz\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta \int_{-1}^1 (1 + 2z^2 - 3z^4)\, dz + \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \int_{-1}^1 (1 - z^2)\, dz.$$

Resolviendo las integrales en θ y z que aparecen en la ecuación anterior, las cuales son todas muy sencillas (ejercicio para el alumno), se obtiene que

$$\iiint_W (y^2+1)\,dV = \frac{14}{15}\pi.$$

P$_4$) Primera forma de resolución.

Aplicando el teorema de la divergencia 4.12 y teniendo en cuenta que en dicho teorema la orientación de las normales es hacia afuera, tenemos que

$$\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = -\iiint_W \operatorname{div}\boldsymbol{F}\, dx\, dy\, dz.$$

Y como en este caso $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = -1$,

$$\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_W dx\, dy\, dz = \text{volumen}(W).$$

Por tanto, el valor de la integral del enunciado coincide con el volumen de W, volumen(W). Calculemos dicho volumen.

El cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ se cortan cuando $z = 1$, es decir, $\sqrt{x^2+y^2} = 1$. Por tanto, W es una región simple en la región de las z, ya que se describe como

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2-x^2-y^2, (x,y) \in D\}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}.$$

Aplicando el teorema 4.3,

$$\text{volumen}(W) = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} dz \right) dx\, dy = \iint_D \left(2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy.$$

Usando ahora coordenadas polares para calcular la última integral y el teorema del cambio de variable 2.33, obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{volumen}(W) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (2 - r^2 - r)\, r\, dr \right) d\theta = 2\pi \int_0^1 (2r - r^3 - r^2)\, dr = \\ &= 2\pi \left[2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5}{6}\pi. \end{aligned}$$

Observación. También se puede calcular volumen(W) usando coordenadas cilíndricas. La descripción de W en dichas coordenadas es

$$W = \{(r,\theta,z) : r \le z \le 2 - r^2,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Entonces, aplicando la versión tridimensional del teorema del cambio de variable 2.33,

$$\text{volumen}(W) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\int_r^{2-r^2} dz \right) r\, dr\, d\theta,$$

con lo que se llega a las mismas integrales en r, θ que antes.

Segunda forma de resolución.

Vamos a calcular $\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$ directamente, es decir, aplicando la definición de integral de un campo a lo largo de una superficie orientada (definición 3.22). Para ello, observar que $\partial W = \Sigma_1 + \Sigma_2$, donde:

- Σ_1 es la superficie del cono hasta su corte con el paraboloide, es decir, Σ_1 es la superficie expresada en forma explícita por:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- Σ_2 es la superficie del paraboloide hasta su corte con el cono, es decir, Σ_2 es la superficie expresada en forma explícita por:

$$z = 2 - x^2 - y^2, \quad (x, y) \in D.$$

Las orientaciones en Σ_1 y Σ_2 son las de las normales hacia adentro de W, es decir, hacia arriba en Σ_1 y hacia abajo en Σ_2. Entonces, por lo visto en el ejemplo 3.6:

• Un vector normal en cada punto $(x, y, z) \in \Sigma_1$ es $(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)$.

• Un vector normal en cada punto $(x, y, z) \in \Sigma_1$ es $(-2x, -2y, -1)$.

Finalmente, puesto que

$$\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma_1{}^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{\Sigma_2{}^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S},$$

aplicando la definición 3.22 en cada una de las integrales de superficie sobre Σ_1^+ y Σ_2^+ que aparecen en la fórmula anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_D (-x, (x^2+y^2)^{3/2}, y^3) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) dx\, dy \, + \\
&+ \iint_D (-x, (2 - x^2 - y^2)^3, y^3) \cdot (-2x, -2y, -1)\, dx\, dy = \\
&= \iint_D \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - y(x^2+y^2) + 2x^2 - 2y(2 - x^2 - y^2)^3\right) dx\, dy.
\end{aligned}$$

Observamos que en esta segunda forma de resolución está involucrado un mayor número de cálculos que en la anterior. El alumno interesado puede resolver la ultima integral doble utilizando coordenadas polares y comprobar que se obtiene el mismo valor que en la primera forma de resolución.