Cálculo Integral

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

Examen final, 13 de junio de 2016

Soluciones

Cuestiones

C$_1$) Sea $a(x,y)$ la altitud del punto (x,y) del mapa.

(a) La altitud media (o promedio de las altitudes, ejemplo 1.8) de cada senderista es $\int_{\boldsymbol{c_i}} a\,ds / \int_{\boldsymbol{c_i}} ds$, $i = 1, 2$.

(b) Sí, razonando de la siguiente manera: llamamos t_0 al momento en el que la segunda senderista se detiene para comer. De los datos del enunciado deducimos que

- para $t \leq t_0$ los dos caminos coinciden; por tanto, $\int_0^{t_0} a(\boldsymbol{c_2}(t))\|\boldsymbol{c_2'}(t)\|\,dt = \int_0^{t_0} a(\boldsymbol{c_1}(t))\|\boldsymbol{c_1'}(t)\|\,dt$, y también $\int_0^{t_0} \|\boldsymbol{c_2'}(t)\|\,dt = \int_0^{t_0} \|\boldsymbol{c_1'}(t)\|\,dt$;
- la segunda senderista permanece parada durante el tiempo $[t_0, t_0 + \Delta T]$, luego $\boldsymbol{c_2'}(t) = 0$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \Delta T]$; en consecuencia, $\int_{t_0}^{t_0+\Delta T} a(\boldsymbol{c_2}(t))\|\boldsymbol{c_2'}(t)\|\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta T} \|\boldsymbol{c_2'}(t)\|\,dt = 0$;
- el camino restricción de $\boldsymbol{c_2}$ al intervalo $[t_0 + \Delta T, T + \Delta T]$ es una reparametrización de la restricción $\boldsymbol{c_1}$ al intervalo $[t_0, T]$, con cambio de parámetros $t \rightsquigarrow t - \Delta T$; luego $\int_{t_0+\Delta T}^{T+\Delta T} a(\boldsymbol{c_2}(t))\|\boldsymbol{c_2'}(t)\|\,dt = \int_{t_0}^{T} a(\boldsymbol{c_1}(t))\|\boldsymbol{c_1'}(t)\|\,dt$; y también $\int_{t_0+\Delta T}^{T+\Delta T} \|\boldsymbol{c_2'}(t)\|\,dt = \int_{t_0}^{T} \|\boldsymbol{c_1'}(t)\|\,dt$, sin más que hacer el cambio de variable $t \rightsquigarrow t - \Delta T$.

Para comprobar que $\int_{\boldsymbol{c_2}} a\,ds / \int_{\boldsymbol{c_2}} ds = \int_{\boldsymbol{c_1}} a\,ds / \int_{\boldsymbol{c_1}} ds$, basta descomponer cada integral en una suma y aplicar las igualdades anteriores.

Observaciones:

- Para contestar la pregunta (b) hay que razonar dentro del modelo matemático, no puede apelarse a la intuición o al sentido que tendría una u otra respuesta.
- En (b) no se preguntaba si las dos medias *pueden ser* iguales, sino *si podemos deducir* si son iguales.
- Para deducir que ambas medias son iguales no se podía apelar a un cambio de parámetros entre los dos caminos, puesto que $\boldsymbol{c_2}$ no es una reparametrización de $\boldsymbol{c_1}$.
- En algunos exámenes se ha interpretado que la media de las altitudes había que considerarla respecto del tiempo transcurrido. No es el tipo de promedio que se ha desarrollado en varios contextos durante el curso, pero se ha admitido esta interpretación, *con la condición de que se fuese coherente al interpretar las dos preguntas (a) y (b).*
- También hay que mantener la coherencia al escribir la media como un cociente, interpretando de manera análoga el numerador y el denominador.

C$_2$)

1. Cierto, teorema 2.12.
2. Falso, página 78.
3. Cierto, corolario 2.13.

Observaciones:

- No era suficiente decir "verdadero" o "falso". Había que dar alguna justificación para cada caso.
- Como f continua $\Rightarrow$ [f es acotada y además la integral doble existe y las dos integrales reiteradas también], era absurdo decir que el apartado 1. es cierto pero que el apartado 3. es falso.

C$_3$) La solución es

$$\int_0^1 \int_{2-x}^2 \int_x^1 dz\,dy\,dx = \int_1^2 \int_{2-y}^1 \int_{2-y}^z dx\,dz\,dy.$$

En efecto, en primer lugar es fácil comprobar la equivalencia de estos dos sistemas de desigualdades:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le x \le 1 \\ 2-x \le y \le 2 \\ x \le z \le 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{r} 1 \le y \le 2 \\ 2-y \le z \le 1 \\ 2-y \le x \le z \end{array}\right.$$

Para que se cumplan las hipótesis del teorema 4.3 hemos de comprobar además que las nuevas desigualdades son una descripción del recinto de integración como región simple tridimensional (definiciones 4.2 y 2.18):

$$\begin{array}{rl} \varphi_1(z) \le \varphi_2(z): & 1 \le y \;\Rightarrow\; -y \le 1 \;\Rightarrow\; 2-y \le 1 \\ \alpha(y,z) \le \beta(y,z): & 2-y \le z \;\Rightarrow\; 2-y \le z \text{ (trivial)}. \end{array}$$

Algunos errores observados:

- También son equivalentes los sistemas

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le x \le 1 \\ 2-x \le y \le 2 \\ x \le z \le 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{r} 1 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le 1 \\ 2-y \le x \le z \end{array}\right.$$

  pero para el segundo sistema de inecuaciones no se cumplen todas las condiciones de la definición 4.2, puesto que no es cierto que $\alpha(y,z) \le \beta(y,z)$ en todos los puntos:

$$1 \le y \le 2 \;\wedge\; 0 \le z \le 1 \;\not\Rightarrow\; 2-y \le z$$

  (bastaría tomar, por ejemplo, $y=1$, $z=0$, con lo que $2-y \not\le z$).

Que no se cumplan todas la condiciones de la definición 4.2 tiene trascendencia, como puede comprobarse viendo lo que ocurriría si calculásemos las integrales reiteradas:

$$\int_0^1 \int_{2-x}^2 \int_x^1 dz\, dy\, dx = \int_1^2 \int_{2-y}^1 \int_{2-y}^z dx\, dz\, dy = \frac{1}{6}; \quad \text{pero} \quad \int_1^2 \int_0^1 \int_{2-y}^z dx\, dz\, dy = 0.$$

- Por otra parte,

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le x \le 1 \\ 2-x \le y \le 2 \\ x \le z \le 1 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} 1 \le y \le 2 \\ 2-y \le z \le 1 \\ 0 \le x \le z \end{array}\right.$$

pero estos dos sistemas no son equivalentes: la desigualdad $2 - x \le y$, que forma parte del primer sistema, no se puede deducir del segundo. Por ejemplo, $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$ es solución del segundo sistema pero no lo es del primero.

- Un error de otro tipo ha sido el de poner la integral que se pedía en la forma

$$\int_{\boxed{h}}^2 \int_{\dots}^1 \int_{\dots}^z dx\, dz\, dx,$$

donde h es función de alguna de las variables. Los límites de la última de las integrales que se calcule nunca pueden depender de alguna variable, tienen que ser números.

C$_4$) Aplicando la definición 3.31,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{dS} = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N}\, d\sigma = \iint_{\Sigma} \|\boldsymbol{N}\|^2\, d\sigma = \iint_{\Sigma} d\sigma = \text{área de } \Sigma.$$

Observación: No bastaba con decir que la integral es igual al área de Σ, había que dar alguna justificación.

C$_5$) $\partial\Sigma_1$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$, $z = 6$. Dado que orientación de Σ_1^+ es la de las normales hacia arriba, la de $\partial\Sigma_1^+$ es la orientación cuya proyección sobre el plano XY sea la antihoraria (comparar con la figura 3.25 de los apuntes).

Para $\partial\Sigma_2^+$, ver la figura adjunta. El razonamiento es similar al de la figura 3.27 de los apuntes, aunque allí se trata de un cilindro y aquí de un cono truncado.

Observación: Las tapas del cono o del cono truncado no forman parte de Σ_1 o de Σ_2, ni juegan ningún papel en la pregunta sobre las orientaciones.

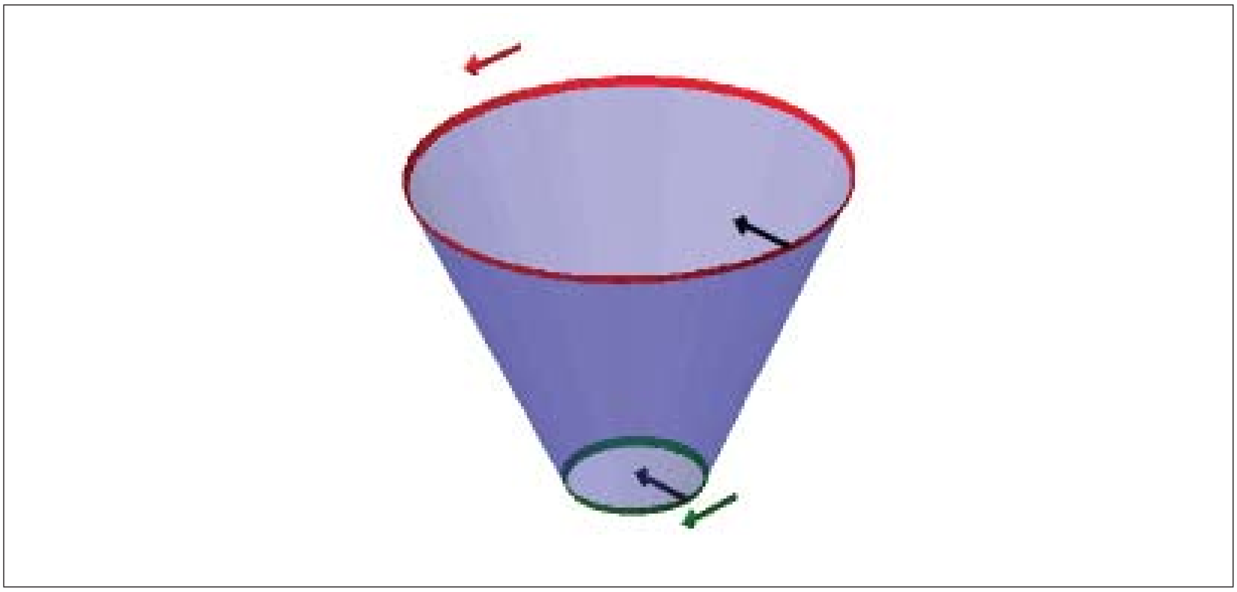

Figura 1: Las flechas negras indican la orientación de la superficie Σ_2^+. El borde la superficie, $\partial\Sigma_2$, es la unión de las dos circunferencias de color. Cada circunferencia tiene la orientación que indica la flecha del mismo color.

Problemas

P$_1$) Vamos a exponer dos formas de resolución.

Integrando primero respecto de y y después respecto de x.

Sea $D' = \{(x,y) \in D : x \geq 0\}$. Observar que por la simetría del problema,

$$\iint_D |x| \cos y \, dA = 2 \iint_{D'} |x| \cos y \, dA = 2 \iint_{D'} x \cos y \, dA.$$

Calculemos entonces $\iint_{D'} x \cos y \, dA$.

Las curvas $y = x$ e $y = 2 - x^2$ se cortan para los valores de x que son soluciones de $x^2 + x - 2 = 0$, es decir, para $x = 1$, $x = -2$, de los cuales el único valido es $x = 1$ (recordar que $x \geq 0$). Por tanto, D' es una región bidimensional simple en la dirección de las y, ya que puede escribirse como:

$$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \, x \leq y \leq 2 - x^2\}.$$

Aplicando el teorema 2.20,

$$\iint_{D'} x\cos y\,dA = \int_0^1 x\left(\int_x^{2-x^2}\cos y\,dy\right)dx = \int_0^1 x\big[\sin y\big]_x^{2-x^2}dx =$$
$$= \int_0^1 \big(x\sin(2-x^2) - x\sin x\big)\,dx = \left[\frac{1}{2}\cos(2-x^2) - (-x\cos x + \sin x)\right]_0^1 =$$
$$= \frac{3}{2}\cos 1 - \sin 1 - \frac{1}{2}\cos 2.$$

Concluimos que

$$\iint_D |x|\cos y\,dA = 2\iint_{D'} x\cos y\,dA = 3\cos 1 - 2\sin 1 - \cos 2.$$

Integrando primero respecto de x y después respecto de y (planteamiento).

D' es la unión de dos regiones bidimensionales simples en la dirección de las x, D_1 y D_2, las cuales vienen dadas por:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\},\\ D_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le y\le 2,\ 0\le x\le \sqrt{2-y}\}. \end{aligned}$$

De acuerdo con ello,

$$\iint_{D'} x\cos y\,dA = \iint_{D_1} x\cos y\,dA + \iint_{D_2} x\cos y\,dA.$$

Por otra parte, aplicando el teorema 2.21,

$$\iint_{D_1} x\cos y\,dA = \int_0^1 \cos y\left(\int_0^y x\,dx\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2\cos y\,dy.$$
$$\iint_{D_2} x\cos y\,dA = \int_1^2 \cos y\left(\int_0^{\sqrt{2-y}} x\,dx\right)dy = \frac{1}{2}\int_1^2 (2\cos y - y\cos y)\,dy.$$

Las integrales simples que aparecen en las dos fórmulas anteriores, o bien son muy sencillas, o pueden calcularse usando las tablas. Se deja como ejercicio para el alumno.

P$_2$) Sea $D=[0,1]\times[0,1]$. La aplicación $\boldsymbol{\Phi} : D\to\mathbb{R}^3$ asociada a la parametrización dada, está definida por

$$\boldsymbol{\Phi}(u,v) = (u^2+4v, v^2-u^2, u+v), \quad (u,v)\in D.$$

Si $(x_0,y_0,z_0)=(5,0,2)$, entonces $(x_0,y_0,z_0)=\Phi(u_0,v_0)$, siendo $(u_0,v_0)=(1,1)$. De acuerdo con la página 129 de los apuntes, la ecuación del plano tangente a Σ en el punto (x_0, y_0, z_0) viene dada por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (\mathbf{\Phi}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{\Phi}_v(u_0, v_0)) = 0.$$

En nuestro caso,

$$\mathbf{\Phi}_u(u_0, v_0) = (2u_0, -2u_0, 1) = (2, -2, 1), \quad \mathbf{\Phi}_v(u_0, v_0) = (4, 2v_0, 1) = (4, 2, 1),$$
$$(2, -2, 1) \times (4, 2, 1) = (-4, 2, 12).$$

Concluimos que la ecuación del plano tangente a Σ en el punto $(5, 0, 2)$ es

$$(x - 5, y, z - 2) \cdot (-4, 2, 12) = 0, \text{ es decir, } -2x + y + 6z - 2 = 0.$$

P$_3$) Vamos a exponer tres formas de resolución.

Integrando primero respecto de z y después respecto de x, y.

Resolviendo la ecuación $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + 6}$, tomando como variable $x^2 + y^2$, se obtiene como solución $x^2 + y^2 = 3$. Por tanto, W es una región simple en las z, ya que puede escribirse como:

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2 + 6}\right\}, \tag{1}$$

siendo D la región simple en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3,\, x \geq 0\}. \tag{2}$$

Denotemos por $V(W)$ el volumen de W. Puesto que $V(W) = \iiint_W dV$, de acuerdo con el teorema 4.3,

$$V(W) = \iint_D \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2+6}} dz = \iint_D \left(\sqrt{x^2 + y^2 + 6} - x^2 - y^2\right) dx\, dy.$$

A continuación pasamos a coordenadas polares la última integral, teniendo en cuenta que $x \geq 0$ equivale a $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Entonces, aplicando el teorema del cambio de variable 2.33,

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{r^2 + 6} - r^2\right) r\, dr\, d\theta = \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(r\sqrt{r^2 + 6} - r^3\right) dr = \\ &= \pi \left[\frac{(r^2 + 6)^{3/2}}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = \left(\frac{27}{4} - 2\sqrt{6}\right) \pi. \end{aligned} \tag{3}$$

Usando coordenadas cilíndricas.

Es un proceso muy similar al anterior. De acuerdo con la descripción de W como región simple dada en (1) y (2), puede describirse la región W en coordenadas cilíndricas por las desigualdades

$$0 \leq r \leq \sqrt{3}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad r^2 \leq z \leq \sqrt{r^2+6}.$$

Por tanto, utilizando la versión tridimensional del teorema del cambio de variable 2.33,

$$V(W) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{r^2}^{\sqrt{r^2+6}.} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{r^2+6} - r^2\right) r\,dr\,d\theta,$$

con lo que llegamos a la misma integral que en (3).

Integrando primero respecto de x, y y después respecto de z.

Hemos visto en la primera forma de resolución que las dos superficies se cortan para $x^2 + y^2 = 3$, es decir, para $z = 3$.

Sean:

- W^1 la región del semiespacio del enunciado encerrada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ desde $z = 0$ hasta $z = 3$.
- W^2 la región del semiespacio del enunciado encerrada por la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 6}$ desde $z = \sqrt{6}$ hasta $z = 3$.

Claramente,

$$V(W) = V(W^1) - V(W^2).$$

Se comprueba facilmente que W^1 y W^2 son regiones simples en las z, con lo que se pueden usar los mismos métodos que en la primera y segunda forma de resolución para calcular sus volúmenes, $V(W^1)$ y $V(W^2)$. Se deja como ejercicio para el alumno.

El objetivo ahora es calcular $V(W^1)$ y $V(W^2)$ integrando primero respecto de x, y y después respecto de z.

Si para $i = 1, 2$ llamamos W_z^i a la sección de W^i con el plano horizontal situado a la altura z, se tiene que:

$$V(W^1) = \int_0^3 \text{área}(W_z^1)\,dz, \quad V(W^2) = \int_{\sqrt{6}}^3 \text{área}(W_z^2)\,dz.$$

En el paraboloide, W_z^1 es el semicírculo de radio $\sqrt{z}$, con lo que $\text{área}(W_z^1) = \frac{\pi}{2}z$. En el otro caso, W_z^2 es el semicírculo de radio $\sqrt{z^2-6}$, con lo que $\text{área}(W_z^2) = \frac{\pi}{2}(z^2-6)$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^3 \text{área}(W_z^1)\,dz - \int_{\sqrt{6}}^3 \text{área}(W_z^2)\,dz = \int_0^3 \frac{\pi}{2} z\,dz - \int_{\sqrt{6}}^3 \frac{\pi}{2}(z^2-6)\,dz = \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^3 - \frac{\pi}{2}\left[\frac{z^3}{3} - 6z\right]_{\sqrt{6}}^3 = \left(\frac{27}{4} - 2\sqrt{6}\right)\pi. \end{aligned}$$

P$_4$) El cálculo de esta integral puede plantearse de varias maneras:

Sin aplicar ninguno de los teoremas del cálculo vectorial. En primer lugar calculamos el rotacional de $\boldsymbol{F}$ por el procedimiento habitual: $\textbf{\textit{rot}}\,\boldsymbol{F}(x,y,z) = (1,0,1-2y)$. Aplicando el teorema 3.34 y llamando D a la proyección de Σ sobre el plano XY, que es el disco unidad,

$$\iint_{\Sigma^+} (1,0,1-2y)\cdot \boldsymbol{dS} = \iint_D \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} + 1 - 2y\right)\,dx\,dy = A(D) = \pi,$$

dado que $\partial g/\partial x = -x/\sqrt{4-x^2-y^2}$, $\partial g/\partial y = -y/\sqrt{4-x^2-y^2}$, y además en este caso la antisimetría del primer y el tercer sumando del integrando garantizan que su integral sobre D es nula.

Aplicando el teorema de Stokes para pasar a una integral de línea. Mediante el teorema de Stokes podemos convertirla en una integral de línea:

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dS} = \int_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds}.$$

En este caso el borde de la superficie $\partial\Sigma$ es la curva $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+z^2=4$ o, equivalentemente, $x^2+y^2=1$, $z=\sqrt{3}$. Una parametrización suya que es compatible con la orientación de la superficie (ver la definición 3.36) es

$$\boldsymbol{c}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \sqrt{3}), \quad \theta\in[0,2\pi],$$

por lo que

$$\int_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds} = \int_0^{2\pi}\left(-\sin^3\theta + \cos^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta\right)\,d\theta = \int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \pi,$$

donde para obtener la segunda igualdad hemos utilizado el hecho de que $\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$.

Aplicando dos veces el teorema de Stokes para cambiar la superficie. Observamos que $\partial\Sigma$ es también el borde de otra superficie más sencilla, el trozo de plano $\Sigma_0 : x^2 + y^2 = 1$, $z = \sqrt{3}$. Por tanto,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \int_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_{\partial\Sigma_0^+} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \iint_{\Sigma_0^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS},$$

si utilizamos las orientaciones adecuadas. Como $\partial\Sigma = \partial\Sigma_0$, la orientación sobre $\partial\Sigma_0$ ha de ser la misma que sobre $\partial\Sigma$. Y entonces la orientación sobre Σ_0 ha de ser la determinada por la definición 3.36, es decir, la de las normales hacia arriba. Por consiguiente, aplicando el teorema 3.34,

$$\iint_{\Sigma_0^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \iint_D (1 - 2y)\, dx\, dy = A(D) = \pi,$$

haciendo uso de que $\partial g/\partial x = \partial g/\partial y = 0$ y de la antisimetría de y sobre el disco D.

Aplicando el teorema de la divergencia. Consideramos ahora la región simple tridimensional W encerrada por Σ y Σ_0 y aplicamos el teorema de la divergencia a W y al campo $\boldsymbol{rot\, F}$. Como la divergencia de un campo de clase $\mathscr{C}^2$ siempre es nula, tendremos

$$0 = \iiint_W \operatorname{div} \boldsymbol{rot\, F}\, dV = \iint_{\partial W^+} \boldsymbol{rot\, F} \cdot \boldsymbol{dS}.$$

El borde ∂W es la unión $\Sigma \cup \Sigma_0$. Pero el borde orientado ∂W^+ está formado por la unión de Σ^+ y Σ_0^-, puesto que las normales hacia fuera de W

- en puntos de Σ coinciden con las normales asociadas a la orientación de Σ^+ (hacia arriba);
- mientras que en puntos de Σ_0 coinciden con las normales hacia abajo.

Por tanto,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = -\iint_{\Sigma_0^-} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \iint_{\Sigma_0^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS},$$

que hemos calculado en el planteamiento anterior.