Recuperación del examen final de Cálculo Integral
5 de septiembre de 2015 (Soluciones)

Cuestiones

C$_1$ Como se cumplen todas las hipótesis del teorema 1.15, la igualdad 2 es cierta.

La igualdad 2 nos sugiere que la 1 es difícil que siempre sea cierta, puesto que los vectores $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{n}$ son ortogonales. Un contraejemplo es el siguiente: Sea C^+ el segmento $[0,1]\times\{0\}\subset\mathbb{R}^2$ orientado por la parametrización $c(t)=(t,0)$; y sea $\boldsymbol{F}$ el campo constante $\boldsymbol{F}(x,y)=(1,0)$. Entonces, $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=0$ y $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}=1$, luego $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,ds=0$ y $\int_{C^+}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds}=1$.

La igualdad 3 tampoco es siempre cierta, como muestra el mismo contraejemplo. En efecto, $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=0$, con lo que nuevamente una de las dos integrales vale 0 y la otra 1.

C$_2$ Ver el enunciado del corolario 2.37.

C$_3$ Del teorema 3.12 se deduce que la recta normal y el plano tangente son independientes de la parametrización pero el vector normal no lo es.

Que el vector normal en un cierto punto sea nulo sí que depende de la parametrización, como muestran, entre otros, los ejemplos 3.1 y 3.2.

En cuanto a la orientación, es obvio que depende de la parametrización, por su propia definición (3.29).

C$_4$ La respuesta es afirmativa, ver los comentarios previos a la observación 81.

C$_5$ Para la circunferencia es cierto, como consecuencia del teorema 1.5.

Para el cilindro es falso, como prueba el ejemplo 6.20.

Problemas

P$_1$ **Primera resolución**

Las curvas $y=x^3$, $x=y^2$ se cortan cuando $x=x^6$, cuyas soluciones son $x=0$, $x=1$. Por tanto, los puntos de corte de estas dos curvas son $(0,0)$ y $(1,1)$.

D es una región bidimensional simple en la dirección de las y, ya que puede expresarse en la forma
$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ x^3\le y\le\sqrt{x}\}.$$

Aplicando el teorema 2.20, obtenemos que

$$\begin{aligned}\iint_D (\sqrt{x}-y)\,dA &= \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (\sqrt{x}-y)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[y\sqrt{x}-\frac{y^2}{2}\right]_{x^3}^{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{2}-x^{7/2}+\frac{x^6}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{4}-\frac{x^{9/2}}{9/2}+\frac{x^7}{14}\right]_0^1 = \frac{25}{252}.\end{aligned}$$

Segunda resolución (Indicación)

Si para cada $(x,y)\in D$ definimos $P(x,y)=\frac{y^2}{2}$, $Q(x,y)=\frac{2}{3}x^{3/2}$, se tiene que $\frac{\partial Q}{\partial x}=\sqrt{x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}=y$. Por tanto la ecuación doble del enunciado puede escribirse como

$$\iint_D (\sqrt{x}-y)\,dA = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Además, D es una región bidimensional simple en la dirección de las y (ya visto) y en la dirección de las x (ejercicio para el alumno). Por tanto, podemos aplicar la fórmula de Green-Riemann para este tipo de regiones (teorema 2.35). Entonces,

$$\iint_D (\sqrt{x}-y)\,dA = \int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy.$$

En este caso, $\partial D = C_1 + C_2$, siendo C_1 y C_2 curvas para las que unas parametrizaciones compatibles con la orientación de Riemann-Green son:

$$\boldsymbol{c_1}(t)=(t,t^3),\quad \boldsymbol{c_2}(t)=((1-t)^2,1-t),\quad t\in[0,1].$$

Por tanto,

$$\int_{\partial D^+} P\,dx+Q\,dy = \int_{C_1^+} P\,dx+Q\,dy + \int_{C_2^+} P\,dx+Q\,dy.$$

El alumno interesado tiene las herramientas necesarias para continuar esta segunda forma de resolución y comprobar que se obtiene el mismo resultado que antes.

P_2 Primera resolución

Vamos a calcular la integral triple pedida usando el teorema 4.3.

Los puntos en los que el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y la esfera $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ se cortan verifican la ecuación $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2-x^2-y^2}$. Llamando $r=\sqrt{x^2+y^2}$, esta ecuación se escribe como $r=\sqrt{2-r^2}$. Elevando al cuadrado en ambos miembros de la ecuación llegamos a $r^2=2-r^2$, es decir, $r^2=1$, cuya única solución válida es $r=1$.

Entonces, W es una región tridimensional simple en la dirección de las z, ya que puede expresarse de la forma

$$W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}\right\},$$

donde D es la región simple bidimensional definida por:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}.$$

Entonces, aplicando el teorema 4.3 obtenemos que

$$\begin{aligned} \iiint_W x\,z\,dV &= \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} x\,z\,dz \right) dx\,dy = \iint_D \left[x\,\frac{z^2}{2} \right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dx\,dy = \\ &= \iint_D x(1-x^2-y^2)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

A continuación calculamos la última integral doble usando coordenadas polares ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, con jacobiano r) y aplicamos el teorema del cambio de variable (teorema 2.32). La desigualdad $x \leq 0$ equivale a $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$. Entonces se obtiene que

$$\begin{aligned} \iiint_W x\,z\,dV &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^1 r\cos\theta(1-r^2)r\,dr\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_0^1 (r^2-r^4)\,dr = \qquad (1) \\ &= \Big[\sin\theta \Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{-4}{15}. \end{aligned}$$

Segunda resolución

Vamos a calcular la integral triple del enunciado usando coordenadas cilíndricas. Recordar (sección 4.5) que dichas coordenadas vienen dadas por

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

y que el jacobiano de este cambio de variable es r.

W puede expresarse en coordenadas cilíndricas de la siguiente forma:

$$W = \left\{ (r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1,\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2},\ r \leq z \leq \sqrt{2-r^2} \right\}.$$

Tenemos que W, expresada en coordenadas cilíndricas, es una región simple tridimensional en la dirección de las z. Aplicando la versión del teorema del cambio de variable (teorema 2.32) para integrales triples y el teorema 4.3 (para las coordenadas r, θ, z), obtenemos que

$$\begin{aligned} \iiint_W x\,z\,dV &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^1 \left(\int_r^{\sqrt{2-r^2}} r\,\cos\theta\,z\,r\,dz \right) dr\,d\theta = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^1 \left(r^2\cos\theta \left[\frac{z^2}{2} \right]_r^{\sqrt{2-r^2}} \right) dr\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^1 r^2\cos\theta(1-r^2)\,dr\,d\theta = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_0^1 (r^2-r^4)\,dr \end{aligned}$$

Y llegamos a las mismas integrales que en (1).

P$_3$ (a) Elegimos como orientación positiva para la curva C la correspondiente a la siguiente parametrización de dicha curva:

$$\boldsymbol{c}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t + \sin t - 1), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Para cada $t \in [0, 2\pi]$, tenemos que

$$\boldsymbol{c}'(t) = (-\sin t, \cos t, -\sin t + \cos t), \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) = (\sin t, \cos t \, \sin t, -\cos t - \sin t + 1).$$

Por tanto, aplicando la definición 1.28,

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{2}$$

Aplicando ahora la definición 1.13,

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{c}'(t)\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t + \cos^2 t \, \sin t + \sin t \, \cos t + \sin^2 t - \sin t - \cos^2 t - \sin t \, \cos t + \cos t\right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-1 + \cos^2 t \, \sin t + \sin^2 t - \sin t + \cos t\right) dt.\end{aligned}$$

Se verifica que

$$\int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \pi.$$

Entonces, $\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -\pi$.

Finalmente, a partir de (2) se obtiene que $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -\pi$.

(b) **Primera resolución**

C es el borde la superficie Σ dada en forma explícita mediante la siguiente parametrización:

$$\boldsymbol{\Phi_{explic}}(x, y) = (x, y, g(x, y)), \; g(x, y) = x + y - 1, \; (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Teniendo en cuenta la orientación positiva elegida para C en el apartado (a), la orientación positiva de Σ de acuerdo con el teorema de Stokes es la de las normales hacia arriba (punto 5 de la sección 3.4.2). Por el Ejemplo 3.6, el vector nornal a Σ apuntando hacia arriba es

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi_{explic}}}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1\right) = (-1, -1, 1).$$

Aplicando el teorema de Stokes para superficies en explícitas (teorema 3.37),

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{3}$$

Calculemos la integral de superficie que aparece en la fórmula anterior. Es trivial ver que

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}(x, y, z) = (0, 0, y - 1) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Entonces, aplicando la definición 3.32,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_D (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})(\boldsymbol{\Phi_{explic}}(x, y)) \cdot \boldsymbol{n_{\Phi_{explic}}}(x, y)\, dx\, dy = \\ &= \iint_D (0, 0, y - 1) \cdot (-1, -1, 1)\, dx\, dy = \iint_D (y - 1)\, dx\, dy. \qquad (4) \end{aligned}$$

Por simetría, $\iint_D y\, dx\, dy = 0$, con lo que llegamos a que

$$\iint_D (y - 1)\, dx\, dy = -\iint_D dx\, dy = -\text{Area(D)} = -\pi.$$

Por tanto, $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = -\pi$.

Aplicando (3) finalmente obtenemos que $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -\pi$, con lo que se comprueba que el resultado es el mismo que en (a).

Segunda resolución

La superficie Σ cuyo borde es la curva C también puede parametrizarse mediante coordenadas cilíndricas en la siguiente forma

$$\boldsymbol{\Phi_{cilind}}(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta, r \cos\theta + r \sin\theta - 1),\ (r, \theta) \in D' = [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

El vector normal apuntando hacia arriba asociado a dicha parametrización es $\boldsymbol{n_{\Phi_{cilind}}}(r, \theta) = (-r, -r, r)$. Entonces, aplicando la definición 3.32,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{D'} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})(\boldsymbol{\Phi_{cilind}}(r, \theta)) \cdot \boldsymbol{n_{\Phi_{cilind}}}(r, \theta)\, dr\, d\theta = \\ = \iint_{D'} [(r \sin\theta) - 1] r\, dr\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 [(r \sin\theta) - 1] r\, dr\, d\theta. \end{aligned}$$

La integral doble a la que llegamos es la misma que la segunda de (4), sin más que utilizar coordenadas polares.

Finalmente, aplicando (3) a esta parametrización de Σ^+ se obtiene el mismo valor que en la primera forma de resolución.