Examen final de Cálculo Integral
15 de junio de 2015 (Soluciones)

Cuestiones

C1 1. Hay muchos. Uno sencillo es el del ejemplo 1.21.

2. *a*) Falso. Cualquier ejemplo que haya resuelto el punto anterior sirva para demostrarlo.
   b) Cierto. Se explica en la observación 15.

C2 No es conservativo. En la demostración del apartado B) del teorema 1.32 y en la observación 29 se explica cómo es posible que $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ pero el campo $P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$ no tenga un potencial

Observaciones tras la corrección:

- No ser capaz de hallar una solución no significa que tal solución no exista. No podía concluirse que el campo careciera de función potencial por el mero hecho de que no se supiera obtener.
- No es buena idea tratar de verificar si existe una función potencial mediante el cálculo *por separado* de las primitivas $\int P(x,y)\,dx$, $\int Q(x,y)\,dy$. Puede dar la casualidad de que funcione, pero si no encontramos solución, eso no garantiza que no exista.

  Si en nuestra cuestión integramos por separado se obtienen como posibles soluciones $\arctan(x/y)+\varphi(x)$ y $\arctan(y/x)+\psi(y)$ (si nos restringimos a $x,y>0$). De aquí no se puede concluir que no hay solución. De hecho, sí que la hay si nos hemos restringido al primer cuadrante. La explicación es que $\arctan(x/y)+\arctan(y/x) = \pi/2$. Nuevamente, lo que ha sucedido es que no hemos sabido encontrar la solución, no es que no existiera.
- Los que han comprobado que se cumple que $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ y han deducido que existe función potencial han de tener más presente la distinción entre condición necesaria y condición suficiente.

C3 1. Falso, ver la observación 37. Una muestra es el ejemplo 2.9.

2. Cierto: teorema 2.8.
3. Falso. Es una aserción equivalente a la primera.

C4 La superficie cilíndrica admite dos orientaciones, ver el apartado 3.3.3.

El borde está formado por dos circunferencias. Si se interpretan como dos circunferencias independientes, hay cuatro orientaciones en total; si se interpretan conjuntamente, como borde del cilindro, hay dos, cada una relacionada con una orientación de la superficie cilíndrica. (Ambas respuestas se han dado por buenas.)

Observación tras la corrección: Cuando estamos en el espacio tridimensional es un error hablar, sin más aclaración, del sentido horario o antihorario de una circunferencia.

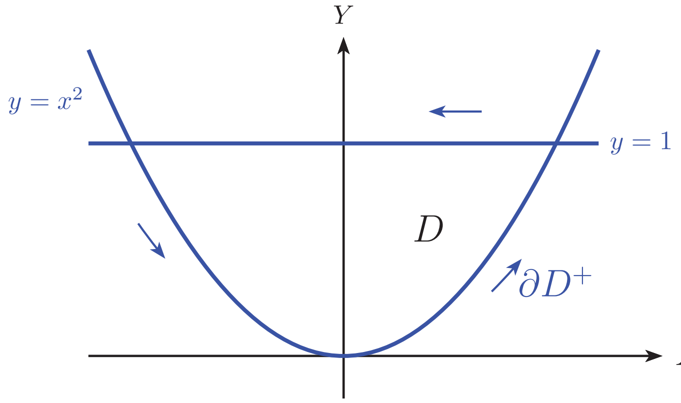
C$_5$ Sí que existen. Hay varias soluciones. Basta tomar $\boldsymbol{F} = (-y, x)$ para la primera igualdad (corolario 2.43) y $\boldsymbol{G} = (x, y, z)$ para la segunda (página 180).

Problemas

P$_1$ Dotemos a C de la orientación establecida en el Teorema de Green-Riemann (teorema 2.36). Vamos a calcular $\int_{C^+} y^2\,dx + x\,dy$ aplicando dicho teorema. Tenemos que

$$\int_{C^+} y^2\,dx + x\,dy = \int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy, \quad P(x,y) = y^2, \quad Q(x,y) = x.$$

D es una región simple tanto en las x (ya que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\}$) como en las y (ya que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$).



Entonces, aplicando el teorema de Green-Riemann,

$$\begin{aligned}\int_{C^+} y^2\,dx + x\,dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (1-2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} (1-2y)\,dy\right) dx = \\ &= \int_{-1}^{1} \left[y - y^2\right]_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1} (x^4 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{-4}{15}.\end{aligned}$$

(en la tercera igualdad se ha usado el teorema 2.20 y la expresión de D como región simple en las y).

Segunda resolución

Vamos a calcular directamente $\int_{C^+} y^2\,dx + x\,dy$. Consideramos la misma orientación de C que en la primera resolución. Tenemos que $C = C_1 + C_2$, donde, de acuerdo con dicha orientación:

• C_1 es la parte de la parábola $y = x^2$ que va desde el punto $(-1, 1)$ al punto $(1, 1)$ (recorrida en este orden).

• C_2 es la parte de la recta $y = 1$ que va desde el punto $(1, 1)$ al punto $(-1, 1)$ (recorrida en este orden).

Una parametrización de C_1^+ es $\boldsymbol{c_1}(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, t^2)$, $t \in [-1, 1]$. Y una parametrización de C_2^+ es $\boldsymbol{c_2}(t) = (x_2(t), y_2(t)) = (1 - 2t, 1)$, $t \in [0, 1]$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} y^2\,dx + x\,dy &= \int_{\boldsymbol{c_1}} y^2\,dx + x\,dy + \int_{\boldsymbol{c_2}} y^2\,dx + x\,dy = \\
&= \int_{-1}^{1} \left[y_1^2(t)x_1'(t) + x_1(t)y_1'(t)\right] dt + \int_0^1 \left[y_2^2(t)x_2'(t) + x_2(t)y_2'(t)\right] dt = \\
&= \int_{-1}^{1} (t^4 + 2t^2)\,dt + \int_0^1 (-2)\,dt = \left[\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} - 2\left[t\right]_0^1 = \frac{-4}{15}.
\end{aligned}$$

P$_2$ Primera resolución.

La recta $y = x$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ se cortan cuando $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y cuando $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. En nuestro caso $x \geq 0$, con lo que la única solución válida es $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por tanto D es una región simple en las y, que puede escribirse como:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1,\ \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq x\right\}.$$

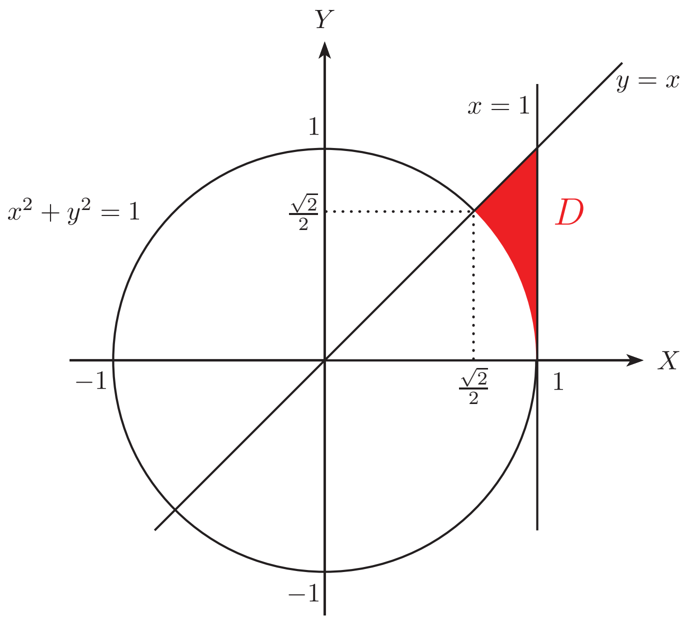
Aplicando el teorema 2.20,

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dA &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\right) dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{x} dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} (2x^3 - x)\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\left[2\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Segunda resolución (Planteamiento)

D es la unión de dos regiones simples en la x, D_1 y D_2, las cuales pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq 1\right\}, \\
D_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1\right\}.
\end{aligned}$$



Por tanto:

$$\begin{aligned} \iint_D xy\, dA &= \iint_{D_1} xy\, dA + \iint_{D_2} xy\, dA = \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 xy\, dx \right) dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left(\int_y^1 xy\, dx \right) dy. \end{aligned}$$

Se observa que en esta segunda forma de resolución hay que hacer más cálculos. El alumno interesado puede hacerlos y comprobar que se obtiene el mismo resultado que en la primera forma de resolución.

P$_3$ El cono y la esfera se cortan cuando $z = 0$ y cuando $z = 1$. Por tanto, Σ es un superficie dada en forma explícita, para la que una parametrización es:

$$\boldsymbol{\Phi_{explic}}(x, y) = (x, y, g(x, y)),\ g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Por el ejemplo 3.6, el vector normal a Σ apuntando hacia arriba (y por tanto hacia adentro del cono) es

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi_{explic}}}(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y), 1 \right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Entonces, aplicando la definición 3.31,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi_{explic}}(x,y)) \cdot \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi_{explic}}}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D (x, y, 1+\sqrt{x^2+y^2}+xy) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) dx\,dy = \iint_D (1+xy)\,dx\,dy =$$

$$= \text{área}(D) + \iint_D xy\,dx\,dy = \pi + \iint_D xy\,dx\,dy.$$

Por simetría $\iint_D xy\,dx\,dy = 0$. También, puede calcularse esta integral utilizando coordenadas polares y el teorema del cambio de variable (teorema 2.33), con lo que tendríamos

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta\,d\theta \int_0^1 r^3\,dr = \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 0.$$

Por tanto, $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \pi$.

P_4

PRIMERA RESOLUCION

Empezaremos describiendo la región W como región simple. Después aplicaremos el teorema de la divergencia (teorema 4.12) para convertir la integral pedida en una integral triple. Y por último haremos los cálculos.

***W* es región simple.** La región W está formada por los puntos que están por encima del paraboloide $z = x^2+y^2$ y por debajo del plano $z = 4$. El paraboloide y el plano se cortan cuando $x^2+y^2 = 4$. Por tanto, W es una región simple en las z, que puede escribirse como:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, x^2+y^2 \leq z \leq 4\},$$

siendo D la región simple en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}.$$

Aplicación del teorema de la divergencia Tenemos que $\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x,y,z) = 1$. Y puesto que la orientación considerada en ∂W es la establecida en el teorema de la divergencia, la integral pedida es igual a $\iiint_W dV$, es decir, es igual al volumen de W, $\mathrm{V}(W)$.

Cálculo de la integral.

Integrando primero respecto de z y después respecto de (x, y). De acuerdo con nuestra descripción de W como región simple en las z,

$$V(W) = \iint_D \int_{x^2+y^2}^{4} dz = \iint_D (4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

Pasando a coordenadas polares la última integral,

$$V(W) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^3)\, dr\, d\theta = 2\pi \left[4\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi.$$

Utilizando coordenadas cilíndricas. Es un proceso muy similar al anterior. De acuerdo con nuestra descripción de W como región simple, en coordenadas cilíndricas el conjunto W se describe por las desigualdades

$$r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ r^2 \leq z \leq 4.$$

Por tanto,

$$V(W) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^3)\, dr\, d\theta,$$

Con lo que llegamos a la misma integral que en el anterior método de cálculo.

Integrando primero respecto de (x, y) y después respecto de z. Llamando W_z a la sección de W con el plano horizontal situado a la altura z,

$$V(W) = \int_0^4 \text{área}(W_z)\, dz.$$

Para cada z comprendido entre 0 y 4, el conjunto W_z es el círculo de radio $\sqrt{z}$, $x^2 + y^2 \leq z$, luego área$(W_z) = \pi z$. Por tanto,

$$V(W) = \int_0^4 \pi z\, dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi.$$

SEGUNDA RESOLUCION (Planteamiento)

Puede plantearse el cálculo directo de $\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$. Tenemos que

$$\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma_1^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{\Sigma_2^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S},$$

donde

• Σ_1 es la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ (superficie en explícitas), para la que una parametrización es:

$$\mathbf{\Phi_1}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2),\ (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

• Σ_2 es la tapa del paraboloide (superficie en explícitas), para la que una parametrización es:

$$\mathbf{\Phi_2}(x, y) = (x, y, 4),\ (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Por el ejemplo 3.6, el vector normal exterior a Σ_1 (y por tanto apuntando hacia abajo) es $\boldsymbol{n}_{\mathbf{\Phi_1}}(x, y) = (2x, 2y, -1)$; y el vector normal exterior a Σ_2 (y por tanto apuntando hacia arriba) es $\boldsymbol{n}_{\mathbf{\Phi_2}}(x, y) = (0, 0, 1)$.

Entonces, aplicando la definición 3.31,

$$\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{F}(\mathbf{\Phi_1}(x, y)) \cdot \boldsymbol{n}_{\mathbf{\Phi_1}}(x, y)\, dx\, dy + \iint_D \boldsymbol{F}(\mathbf{\Phi_2}(x, y)) \cdot \boldsymbol{n}_{\mathbf{\Phi_2}}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D \left\{[y^3 + (x^2 + y^2)^3]2x + [x^4 - (x^2 + y^2)^4]2y - (x^2 + y^2)\right\}\, dx\, dy + \iint_D 4\, dx\, dy.$$

El valor de la segunda integral doble es $4\, \text{área}(D) = 16\pi$. Pero el cálculo de la primera integral doble requiere hacer un buen número de cálculos. El alumno interesado puede hacerlos y comprobar que se obtiene el mismo resultado que en la primera forma de resolución.