Examen final de Cálculo Integral
5 de septiembre de 2014 (Soluciones)

Cuestiones

C$_1$ Sí que es posible, tal como se explica en el ejemplo 1.21.

Observaciones tras la corrección:

- Repasar la observación 25 de los apuntes.

C$_2$ No puede asegurarse.

De hecho, la función podría no ser integrable: bastaría con que dentro del rectángulo $[0,1]\times[0,2]$ la función f coincidiera con la del ejemplo 2.7.

Observaciones tras la corrección:

- El enunciado no se refiere a la curva de la circunferencia, sino al círculo completo, por lo que de los datos que tenemos no se deduce que se cumpla la hipótesis de la condición suficiente que aparece en el teorema 2.10.

C$_3$ La fórmula del plano tangente es $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}(u_0,v_0)=0$ y la explicación se da en la observación 75.

La invarianza del plano tangente al cambiar de parametrización es consecuencia inmediata del teorema 3.12.

C$_4$ Ver la definición 3.32.

C$_5$ Llamamos W a la esfera cuyo borde es la superficie Σ. Por el teorema de la Divergencia de Gauss,

$$\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_W \operatorname{div}\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{F}\,dV.$$

Como $\boldsymbol{F}$ es de clase $\mathcal{C}^2$, sus derivadas cruzadas de segundo orden son iguales, por lo que la divergencia de su rotacional es nula, luego $\iiint_W \operatorname{div}\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{F}\,dV=0$. Por tanto, independientemente de cuál sea la orientación de Σ^+,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \pm\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = 0.$$

$\boxed{\textit{\textbf{Problemas}}}$

P₁ Sea C^+ la curva del enunciado, con la orientación que en él se establece (observar que se dice "desde $x = 0$ hasta $x = 1$"). El trabajo pedido es $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$. Una parametrización de C^+ es:

$$c(t) = (t, t^3, 2), \quad t \in [0, 1].$$

Entonces, aplicando las definiciones 1.13 y 1.28,

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} &= \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{c}'(t)\, dt = \int_0^1 (t^2, t^3, 2^5) \cdot (1, 3t^2, 0)\, dt = \int_0^1 (t^2 + 3t^5)\, dt = \\ &= \left| \frac{t^3}{3} + 3\frac{t^6}{6} \right|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}. \end{aligned}$$

Otra forma de calcular la integral es observar que el campo $\boldsymbol{F}$ es conservativo (aplicar la parte C) del teorema 1.32 de los apuntes). Un cálculo sencillo permite obtener una función f cuyo gradiente es $\boldsymbol{F}$: basta tomar $f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}z^6$. Por otra parte, el punto inicial de la curva C es $(0, 0, 2)$ (tómese $x = 0$) y el punto final es $(1, 1, 2)$ (tómese $x = 1$), luego, de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo generalizado,

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = f(1, 1, 2) - f(0, 0, 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}}.$$

P₂

Primera Solución.

D es la unión de tres regiones bidimensionales simples en la dirección de las y, D^1, D^2 y D^3, definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D^1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x \le -1,\ 0 \le y \le 4 - x^2\}. \\ D^2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le -1,\ 1 - x^2 \le y \le 4 - x^2\}. \\ D^3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4 - x^2\}. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema 2.28,

$$\iint_D x^2\, dA = \iint_{D^1} x^2\, dA + \iint_{D^2} x^2\, dA + \iint_{D^3} x^2\, dA.$$

Y aplicando el teorema 2.20 a cada una de las tres integrales dobles que aparecen en la fórmula anterior,

$$\iint_D x^2\, dA = \int_{-2}^{-1} \left(\int_0^{4-x^2} x^2\, dy \right) dx + \int_{-1}^{1} \left(\int_{1-x^2}^{4-x^2} x^2\, dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{4-x^2} x^2\, dy \right) dx. \tag{1}$$

Finalmente, calculamos las integrales reiteradas que aparecen y obtenemos que:

$$\begin{aligned}\iint_D x^2\,dA &= \int_{-2}^{-1} x^2\Big|y\Big|_0^{4-x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} x^2\Big|y\Big|_{1-x^2}^{4-x^2}\,dx + \int_{1}^{2} x^2\Big|y\Big|_0^{4-x^2}\,dx = \\ &= \int_{-2}^{-1} x^2(4-x^2)\,dx + \int_{-1}^{1} 3x^2\,dx + \int_{1}^{2} x^2(4-x^2)\,dx = \\ &= \Big|4\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\Big|_{-2}^{-1} + \Big|x^3\Big|_{-1}^{1} + \Big|4\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\Big|_{1}^{2} = \boxed{\frac{124}{15}}.\end{aligned}$$

Segunda Solución.

D puede expresarse como una región bidimensional simple en la dirección de las y, en la siguiente forma:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

siendo φ_1 y φ_2 las funciones de $[-2,2]$ en $\mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en los demás casos,} \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = 4-x^2.$$

φ_1 y φ_2 son funciones continuas en $[-2,2]$. Entonces, aplicando el teorema 2.20,

$$\iint_D x^2\,dA = \int_{-2}^{2}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} x^2\,dy\right)dx.$$

Teniendo en cuenta las definiciones de las funciones φ_1 y φ_2, se llega facilmente a la misma igualdad que en (1).

P_3

Σ es un cilindro que tiene por eje el OX, con radio $\sqrt{3}$ y tal que $0 \leq x \leq 4$. Adaptando las coordenadas cilíndricas usuales a esta situación, podemos parametrizar Σ en la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\Phi}(x,\theta) = (x, \sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta), \quad (x,\theta) \in D = [0,4]\times[0,2\pi].$$

Un vector normal asociado a dicha parametrización es

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}(x,\theta) = \boldsymbol{\Phi}_x(x,\theta) \times \boldsymbol{\Phi}_\theta(x,\theta) = (0, -\sqrt{3}\cos\theta, -\sqrt{3}\sin\theta).$$

Elegimos como orientación positiva de Σ la correspondiente a esta normal (que es la normal interior al cilindro). Entonces, aplicando la definición 3.32,

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(x,\theta))\cdot \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}(x,\theta)\,dx\,d\theta = \\ &= \iint_D (2x^3 - 27\cos^4\theta + 7\sqrt{3}\sin\theta, -5\sqrt{3}\cos\theta, -5\sqrt{3}\sin\theta)\cdot(0,-\sqrt{3}\cos\theta,-\sqrt{3}\sin\theta)\,dx\,d\theta = \\ &= \iint_D (15\cos^2\theta + 15\sin^2\theta)\,dx\,d\theta = \iint_D 15\,dx\,d\theta = 15\int_0^4 dx\int_0^{2\pi} d\theta = 15\cdot 4\cdot 2\pi = \boxed{120\pi}.\end{aligned}$$

P4

En primer lugar vamos a describir la región W como región simple. Después comprobaremos que estamos en condiciones de aplicar la fórmula de la divergencia y por último haremos los cálculos.

***W* es región simple.** La región W está formada por los puntos que están por debajo del paraboloide y por encima del cono, puesto que, de los conjuntos limitados por ambas superficies, éste es el único acotado. Por tanto, los puntos de W se caracterizan por

$$\alpha(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6 - x^2 + y^2 = \beta(x,y).$$

Para conocer el dominio D de las funciones α y β (definición 4.2) imponemos la condición de que $\alpha(x,y) \leq \beta(x,y)$, es decir, $r \leq 6 - r^2$, donde para simplificar hemos puesto $\sqrt{x^2+y^2} = r$. Resolvemos la inecuación $r^2 + r - 6 \leq 0$ y obtenemos $-3 \leq r \leq 2$, pero como r ha de ser positivo nos quedamos con $0 \leq r \leq 2$, es decir, la desigualdad que define al conjunto D es $x^2 + y^2 \leq 4$.

Sobre *W* es válida la fórmula de la divergencia. El cono y el paraboloide se cortan, como acabamos de calcular, en los puntos en los que $\sqrt{x^2+y^2} = 2$, es decir, en los puntos en los que $z = 2$ (puesto que son puntos del cono).

Como consecuencia, podemos descomponer W en dos regiones: la que está por debajo del plano $z = 2$, limitada por el cono,

$$z \leq 2, \quad z \geq \sqrt{x^2+y^2}$$

y la que está por encima del plano $z = 2$, limitada por el paraboloide,

$$z \geq 2, \quad z \leq 6 - x^2 - y^2.$$

Bsta aplicar las consideraciones que se hacen en los apuntes inmediatamente antes del apartado 4.6.2 para concluir que la fórmula de la divergencia es válida sobre W.

Entonces, como $\operatorname{div} \boldsymbol{F}(x,y,z) = 2x + 2y + 1$, la integral pedida es igual a

$$\iiint_W (2x + 2y + 1)\, dV$$

(para aplicar la fórmula de la divergencia hemos dotado a la superficie ∂W con la orientación exterior a W).

Cálculo de la integral. Debido a la simetría de W respecto del eje X y respecto del eje Y, $\iiint_W 2x\, dV = \iiint_W 2y\, dV = 0$. Nos queda solamente calcular el volumen de W, $\iiint_W dV$.

Integrando primero respecto de (x,y) y después respecto de z. De acuerdo con nuestra descripción de W como región simple en las z,

$$V(W) = \iint_D \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2} dz = \iint_D \left(6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dz,$$

Pasando a coordenadas polares la última integral,

$$V(W) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (6r - r^3 - r^2)\; d\theta\, dr = 2\pi \left| 3r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3 \right|_0^2 = \boxed{\frac{32}{3}\,\pi}\,.$$

Utilizando coordenadas cilíndricas. Es un proceso muy similar al anterior. De acuerdo con nuestra descripción de W como región simple, en coordenadas cilíndricas el conjunto W equivale a $r \le z \le 6 - r^2$. Por tanto,

$$V(W) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_r^{6-r^2} r\; dz\, d\theta\, dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (6r - r^3 - r^2)\; d\theta\, dr = \boxed{\frac{32}{3}\,\pi}\,.$$

Integrando primero respecto de z y después respecto de (x, y). Llamando W_z a la sección de W con el plano horizontal situado a la altura z,

$$V(W) = \int_0^6 A(W_z)\, dz = \int_0^2 A(W_z)\, dz + \int_2^6 A(W_z)\, dz.$$

Resulta que cuando z está comprendido entre 0 y 2 el conjunto W_z no es otro que el círculo de radio z, $x^2 + y^2 \le z^2$, tal como hemos visto al descomponer W en dos partes, luego $A(W_z) = \pi z^2$. Por motivos análogos,

$$2 \le z \le 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \le 6 - z \text{ (círculo de radio } \sqrt{6-z}) \quad \Rightarrow \quad A(W_z) = \pi(6 - z).$$

Luego

$$V(W) = \int_0^2 \pi z^2\, dz + \int_2^6 \pi(6 - z)\, dz = \frac{8}{3}\pi + 8\pi = \boxed{\frac{32}{3}\,\pi}\,.$$